

GAG 2013

Programme des mini-cours

Alastair Craw (Glasgow)

Titre : The McKay correspondence and Reid's recipe

Résumé : These lectures will describe the derived McKay correspondence in dimension three, focusing on examples arising in noncommutative toric geometry. In this context, one can illustrate the geometry of the derived equivalence in a precise way known as 'Reid's recipe'.

The classical case of the (toric) McKay correspondence in dimension three studies the relationship between the derived category of a crepant resolution of \mathbf{C}^3/G and the derived category of the skew group algebra for a finite (abelian) subgroup G of $\mathbf{SL}(3, \mathbf{C})$. More generally, replacing \mathbf{C}^3/G by any Gorenstein toric 3-fold leads to the study of dimer model algebras, and again, a derived equivalence linking the geometry of a crepant resolution and the derived category of modules over the noncommutative toric algebra can be described.

Philippe Eyssidieux (Grenoble)

Titre : Métriques de Kähler-Einstein canoniques, Flot de Kähler-Ricci et programme du Modèle Minimal

Résumé : Les progrès récents sur les solutions faibles des équations de Monge-Ampère complexes ont permis de généraliser considérablement les constructions de métriques de Kähler-Einstein issues de la solution de la conjecture de Calabi par Yau en autorisant que l'espace sous-jacent ait des singularités modérées, c'est à dire log-terminales.

On introduira ces équations elliptiques non-linéaires et leur variante parabolique, on décrira les diverses méthodes de résolution puis les constructions de métriques canoniques qu'elles permettent d'effectuer et qui constituent une géométrisation -au sens de la géométrie riemannienne- de certaines parties du programme des modèles minimaux.

Jun-Muk Hwang (KIAS, Séoul)

Titre : Lagrangian tori in projective symplectic manifolds

Résumé : One central problem regarding compact hyperkähler manifolds is to find a good condition for the existence of holomorphic or almost holomorphic fibrations on a compact hyperkähler manifold. Beauville proposed the question whether the existence of a Lagrangian torus A in a compact hyperkähler manifold M gives rise to such a fibration. It turns out that this question can be reduced to whether there exists a hypersurface in M disjoint from A . In this lecture, I will explain a joint work with Richard Weiss which gives an affirmative answer to the latter question. Our work employs two different tools : the theory of action-angle variables for algebraically completely integrable Hamiltonian systems and Wielandt's theory of subnormal subgroups. To apply these tools, we will introduce the notion of webs of submanifolds and study their monodromy groups.

Alexander Kuznetsov (Moscou)

Titre : Derived categories of coherent sheaves in birational geometry

Résumé : I will discuss some interactions between derived categories of coherent sheaves and birational geometry, including construction of birational invariants and applications to resolutions of singularities. I will sketch a conjectural definition of the Griffiths component of the derived

category and its application for the understanding of birational properties of cubic fourfolds. Also I will discuss categorical resolutions of singularities and different notions of crepancy in the categorical context.

Bertrand Toën (Montpellier)

Titre : Introduction to shifted symplectic structures

Résumé : The purpose of the series of lectures is to introduce the notion of shifted symplectic structures, a generalization of symplectic structures in the context of derived algebraic geometry. It will start with two motivating examples : the moduli stack of sheaves on CY manifolds, and representations of the fundamental group of a compact oriented manifold.

I will then present the formalism of derived algebraic geometry and explain some construction techniques (derived mapping spaces, derived fiber products). In the last part these techniques will be used to define shifted symplectic structures, and to state the main existence theorem : the derived mapping space (or stack) from an oriented object (e.g. a CY variety) towards a shifted symplectic target carries a canonical shifted symplectic structure.

The two motivating examples of sheaves on a CY, and of linear representations of fundamental groups, will be considered again as instances of applications of this general existence theorem.

Exposés

Roland Abuaf (Grenoble)

Titre : Résolutions non-commutatives des singularités

Résumé : Soit X une variété algébrique complexe à singularités Gorenstein. Une résolution crépante de X est souvent considérée comme une résolution minimale des singularités pour X . Malheureusement, les variétés ayant des résolutions crépantes sont rares. Il semble donc naturel de s'intéresser aux résolutions "non commutatives" des singularités, et notamment de trouver des classes de variétés admettant des résolutions non commutatives crépantes. Dans cet exposé, par analogie avec la théorie des compactifications magnifiques des groupes algébriques linéaires, nous définirons la notion de résolution magnifique des singularités. Nous esquisserons la preuve du résultat suivant : toute variété Gorenstein à singularités rationnelles ayant une résolution magnifique des singularités admet une résolution non commutative crépante. C'est notamment le cas de toutes les variétés déterminantielles, y compris symétriques et anti-symétriques. Enfin nous explorerons la possibilité, dans certains cas, de trouver une résolution non commutative crépante en l'absence d'une résolution magnifique des singularités.

Jarek Buczynski (Varsovie)

Titre : Contact Fano manifolds : pieces of the homogeneous structure coming from geometry

Résumé : Complex contact manifolds generalise real notion, which originates from classical mechanics. I will address the problem of classification of contact Fano manifolds. It is conjectured by LeBrun and Salamon that every such manifold is necessarily homogeneous, strongly related to the Lie algebra structure of a simple Lie group. I will show how the Killing form, the Lie algebra grading and parts of the Lie bracket can be read from the geometry of an arbitrary contact manifold. Minimal rational curves on contact manifolds (or contact lines) and their chains are the essential ingredients for our constructions.

Frédéric Campana (Nancy)

Titre : Variétés projectives complexes 'spéciales' et h-principe de Grauert-Oka-Gromov

Résumé : Il s'agit d'un travail en commun avec J. Winkelmann (arXiv 1210.7369).

Nous montrons, entre autres choses, qu'une variété projective complexe X satisfaisant le h-principe est 'spéciale'. La réciproque est une question (très) ouverte en dimension 2 déjà.

Etre 'spéciale' est une propriété algébro-géométrique 'opposée' au fait d'être de type général, et joue un rôle central dans la classification birationnelle. En particulier : si X est 'spéciale', elle n'admet aucune application rationnelle dominante $f : X \dashrightarrow Y$, avec Y de type général. Cette propriété est conjecturalement équivalente au fait que deux quelconques des points de X sont joints par l'image du plan complexe par une application holomorphe.

Satisfaire le h-principe signifie, par définition, que toute application continue d'une variété de Stein S arbitraire vers X est homotope à une application holomorphe de S vers X . Les exemples connus de variétés satisfaisant le h-principe sont les groupes de Lie complexes (Grauert), leurs variétés homogènes, et, plus généralement, les variétés admettant un 'spray' dominant (c'est-à-dire 'beaucoup'-en un sens précis-d'applications holomorphes du plan complexe vers X).

Junyan Cao (Grenoble)

Titre : Deformation problem of certain Kähler manifolds

Résumé : It is well known that the curvature of the canonical bundle controls the structure of projective varieties. Therefore it is interesting to ask whether for a Kähler manifold with a nef or anti-nef canonical bundle, one can deform it to a projective variety. We will discuss the deformation properties of Kähler manifolds in the following two cases : Compact Kähler manifolds with hermitian semipositive anti canonical bundles, and Compact Kähler manifolds with nef tangent bundles.

Lie Fu (ENS)

Titre : Décomposition de la petite diagonale et anneaux de Chow de Calabi-Yau intersections complètes

Résumé : Pour une intersection complète générale X de type Calabi-Yau, on établit une décomposition de la petite diagonale de X^3 modulo l'équivalence rationnelle, généralisant le résultat de Beauville et Voisin pour une surface K3. On en déduit une conséquence sur la structure multiplicative de l'anneau de Chow de X suivante : l'intersection de deux cycles algébriques de dimensions strictement positives et complémentaires est toujours \mathbb{Q} -proportionnelle à une classe fixée d'un 0-cycle. Autrement-dit, tout 0-cycle 'décomposable' de degré zéro est en fait rationnellement équivalent à 0, à torsion près. Ce résultat contraste le fait que le Chow groupe des 0-cycles est très gros (de 'dimension infinie' au sens de Mumford).

Andreas Höring (Jussieu)

Titre : Singularities of varieties admitting an endomorphism

Résumé : Let X be a normal variety such that K_X is \mathbb{Q} -Cartier, and let $f: X \rightarrow X$ be a finite surjective morphism of degree at least two. We establish a close relation between the irreducible components of the locus of singularities that are not log-canonical and the dynamics of the endomorphism f . As a consequence we prove that if X is projective and f polarised, then X has at most log-canonical singularities.

Martí Lahoz (Orsay)

Titre : ACM bundles on cubic hypersurfaces

Résumé : In this talk, I will use Kuznetsov's description of the derived category of a smooth cubic hypersurface to give a new construction of some stable ACM bundles on cubic threefolds and cubic fourfolds containing a plane. I will also present a wall-crossing phenomenon that allows to relate the compactification of the moduli space of instantons on a cubic threefold with a moduli space of torsion sheaves a non-commutative projective plane. This is a joint work with Emanuele Macrì and Paolo Stellari.

Boris Pasquier (Montpellier)

Titre : Une approche du Programme du Modèle Minimal pour les variétés horosphériques

Résumé : Le Programme du Modèle Minimal fonctionne très bien dans le cadre des variétés toriques et même sphériques à singularités \mathbb{Q} -factorielles (travaux de M. Reid dans le cas torique, et M. Brion dans le cas sphérique) . J'expliquerai comment généraliser ces résultats aux variétés horosphériques (et toriques) à singularités \mathbb{Q} -Gorenstein, et par la même occasion comment faire tourner le programme de façon totalement explicite, via l'étude d'une famille continue de polytopes moments. Je décrirai aussi les fibres générales des fibrations de Mori pour les variétés horosphériques à singularités \mathbb{Q} -factorielles.