Groupes finis plats, formels et p-divisibles

C. Pépin et M. Romagny

3 avril 2012

Lundi 16 avril	`08:45-10:15`	Exp. 1 : Gabriel Zalamansky
	`10:45-12:15`	Exp. 2 : Riccardo Brasca
	`14:00-15:30`	Exp. 3 : Dajano Tossici
Mardi 17 avril	`08:45-10:15`	Exp. 4 : Matthieu Romagny
	`10:45-12:15`	Exp. 5 : Riccardo Brasca
	`14:00-15:30`	Exp. 6 : Dajano Tossici
Mercredi 18 avril	`08:45-10:15`	Exp. 7 : Cédric Pépin
	`10:45-12:15`	Exp. 8 : Cédric Pépin
	`14:00-15:30`	Exp. 9 : Anna Cadoret
Jeudi 19 avril	`08:45-10:15`	Exp. 10 : Matthieu Romagny
	`10:45-12:15`	Exp. 11 : Matthieu Romagny
	`14:00-15:30`	Exp. 12 : Tong Jilong
Vendredi 20 avril	`08:45-10:15`	Exp. 13 : Tong Jilong
	`10:45-12:15`	Exp. 14 :

1 Schémas en groupes finis localement libres

1. Définition, ordre, Frobenius, Verschiebung ([G] I.5, [SGA 3] $\mathrm{VII_A}$.4).
2. Propriétés de la catégorie des schémas en groupes finis localement libres. Plongement comme sous-catégorie exacte de la catégorie abélienne des faisceaux fppf. Existence du quotient par un sous-groupe ([Ra1], [SGA 3] V, th. 4.1(iv), [Ta2], th. 3.4).
3. Dualité de Cartier ([G] II.1.4, [SGA 3] $\mathrm{VII_A}$.3, [Mu] p. 132-135), comportement par rapport à F et V ([SGA 3] $\mathrm{VII_A}$.4.3.3).
4. Exemples ; types particuliers de groupes ([G] II.2), décompositions en général et sur un corps ([G] II.3.2)
5. Énoncer sans preuve le théorème de plongement de Raynaud, [BBM] th. 3.1.1.

2 Groupes formels

1. Groupes formels sur un corps : définition, p-groupes formels, dualité de Cartier (Manin [Ma], Demazure [De]).
2. Exemples.
3. Groupes formels lisses et théorème de Cartier ([De] II.10), sans preuve.
4. Groupes de Lie formels sur une base générale (noter qu'un groupe de Lie formel est ce que Dieudonné, Cartier, Zink [Z] appellent simplement un groupe formel) : définition fonctorielle, avec une brève discussion des notions d'exactitude des foncteurs sur les algèbres nilpotentes ([Z] chap. 2). Espaces tangents. Équivalence avec le point de vue des lois de groupes formels via des séries formelles ([Z] chap. 1). On mentionnera sans entrer les détails la définition alternative de Grothendieck ([Me] II.1.1.4) avec la définition des voisinages infinitésimaux, utiles pour parler de la composante neutre ([Me] II.1.1.6) dans l'exposé 7.
5. Proreprésentabilité des foncteurs lisses ([Z], th. 2.31 ; lire aussi les commentaires qui suivent [Me] II, déf. 1.1.4).
6. Culture : sur une base arbitraire, le point de vue fonctoriel sur les schémas formels n'est pas clair. Signalons deux tentatives intéressantes (quoique toutes deux en car. nulle) par Beilinson et Drinfeld ([BD] 7.11, p. 299) et Durov ([DMSS], chapitres 7–9).

3 Vecteurs de Witt, covecteurs de Witt

1. vecteurs de Witt : construction selon Serre [Se3], schéma et faisceau des vecteurs de Witt infinis et de longueur n. Propriété universelle pour les anneaux locaux complets ([DG] V, § 4, no. 2) et les anneaux de valuation discrète complets ([Se3] II, § 5).
2. Faisceau CW des covecteurs de Witt suivant Berthelot [Be] ; sous-faisceau CW^{u} des covecteurs de Witt unipotents.
3. Définition du module de Dieudonné suivant Fontaine [F] III.1 et Berthelot [Be].

4 Classification des schémas en groupes formels et finis sur un corps parfait

C'est la théorie de Dieudonné. On démontrera le th. 1 complété par la remarque qui le suit dans [F] III.1.4 (pour la définition d'un couple de foncteurs adjoints à gauche, voir [F] III.1.6). Voir aussi [G] II.4.2. Pour la cohérence avec les autres exposés, on notera W au lieu de A pour l'anneau des vecteurs de Witt infinis de k. Dans le descriptif qui suit, la référence est [F], chap. III.

1. Remarques générales : a) ressemblance formelle de l'équivalence de Dieudonné avec une dualité : $M(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathrm{CW})$ et $G(M) = \mathrm{Hom}(M, \mathrm{CW})$. b) lien avec les preuves de [DG] et [G] : compte tenu de la décomposition des groupes finis, le cas essentiel est celui des groupes unipotents ; pour G unipotent on a $M(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathrm{CW}^{\mathrm{u}})$.
2. admettre le contenu de 2.1 et se limiter à énoncer la prop. 2.2.
3. Module de Dieudonné et espace tangent : prop. 3.2, prop. 3.4 ; module de Dieudonné et espace cotangent : prop. 4.3.

4. dualité : prop. 5.1 (sans démonstration).
5. Au cours de la démonstration, on insistera sur le dictionnaire entre les propriétés de G et M, et celles de F et V.
6. On pourra faire une séance d'exemples l'après-midi.

5 Classification des schémas en groupes finis localement libres sur un anneau de valuation parfait

C'est le prolongement de la théorie de Dieudonné sur un corps parfait ([Be] 3.4.1). Suivre [Be], parties 2 et 3 en se restreignant au cas où la base est un anneau parfait intègre qui est un anneau de valuation ou un corps.

1. Faire un rappel sur l'opération d'adhérence schématique sur un anneau de valuation en s'inspirant de [Ra2] 2.1 ou EGAIV, deuxième partie, par. 2.8.
2. Énoncer la propriété d'exactitude du module de Dieudonné ([Be] 2.4.1) et esquisser la preuve. Corollaire : commutation au changement de base d'anneaux de valuation parfaits.
3. Indiquer la construction du foncteur quasi-inverse.

6 Groupes p-divisibles I

1. Motivations pour les groupes p-divisibles : a) pour un schéma abélien, le groupe p-divisible contient de l'information que le complété formel de contient pas (partie étale ; cf th. de Serre-Tate, exposé 13) ; b) il y a une bonne théorie sur une base quelconque alors que la notion de groupe formel non formellement lisse n'est pas claire ; c) ils sont le bon objet qui contient les groupes finis, et dont la classification se relie par passage à la limite à celle des groupes finis.
2. Définition, hauteur, Frobenius, Verschiebung, dualité de Cartier (on soulignera la différence avec les groupes de Lie formels pour lesquels, sur une base arbitraire, il n'y a pas de dualité de Cartier, voir notamment [Z] 2.34). Références : [Ta1], [Se2], [Me] I.
3. Exemples ([Me] I.3).
4. Sur une base locale hensélienne : décompostion connexe-étale (passer à la limite à partir de [Ta2] 3.7, cf aussi [Ri] 1.7). La décomposition connexe-étale commute au passage au point fermé mais *pas* au passage à un point générique.
5. Si la base est un corps, un groupe p-divisible est un groupe formel de p-torsion dans lequel $p : G \to G$ est une isogénie ([Sh] p. 61).

7 Groupes p-divisibles II

1. Lissité formelle des groupes p-divisibles sur une base locale noethérienne complète : tout groupe p-divisible *connexe* est un groupe de Lie formel ([Ta1] 2.2 ou [Ri] 3.3). Application : définition de la dimension d'un groupe p-divisible et égalité $\dim(G) + \dim(G') = \mathrm{ht}(G)$ ([Ri] 3.5).

2. Lissité formelle sur une base dans laquelle p est nilpotent : tout groupe p-divisible est formellement lisse ([Me] II.3.3.13) donc sa composante neutre est un groupe de Lie formel ([Me] II.3.3.18).
3. Classification : on indiquera comment les classifications des schémas en groupes finis localement libres passent à la limite pour donner des classifications pour les groupes p-divisibles : c'est un prolongement de l'exposé 4 sur un corps parfait, et de l'exposé 5 sur un anneau de valuation parfait.

8 Le groupe p-divisible d'un schéma abélien

1. Lien entre le groupe formel du groupe p-divisible d'un schéma abélien et le complété formel du schéma abélien le long de la section neutre (au moins lorsque la base est un corps).
2. Rappels sur p-rang d'un schéma abélien. En particulier, on traitera exhaustivement le cas d'un corps de base, i.e. [Mu] parag. 15, en admettant seulement la démonstration du théorème 1 p. 143 (et peut-être aussi celle du théorème 3 p. 48).
3. Hauteur et dimension de $A(p)$ (resp. $A(p)^0$), et lien avec p-rang et ordinarité-supersingularité des fibres ([Sh] parag. 5).
4. Groupe p-divisible dual et schéma abélien dual ([Sh] parag. 5).

9 Homomorphismes de groupes p-divisibles, $\mathrm{car}(K) = 0$

Les références sont [Ta1], [Se2]. et [Sh] parag. 5-6. Illustrer chaque définition avec l'exemple $G = \mathbb{G}_m(p)$.

1. fibre générique, module de Tate, comodule de Tate
2. accouplement de Tate (parfait, d'après celui de Cartier), $H^0(\mathfrak{G}, C) = K$ et accouplement sur sections, twists à la Tate
3. logarithmes et accouplement logarithmique
4. perfection des deux accouplements (sections et logarithmique), corollaires sur la dimension, décomposition de Hodge-Tate et puissances symétriques du module de Tate
5. le théorème principal : $\mathrm{Hom}_R(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(G_K, H_K)$

10 Site cristallin et cristaux

Motivation pour les puissances divisées (PD) et le site cristallin. Rudiments sur le site cristallin, incluant au minimum le chapitre IV de [G] :

- aspects algébriques : anneaux à puissances divisées (PD-anneaux), exemples, morphismes de PD-anneaux, extension de PD, morphismes compatibles aux PD, enveloppe à PD d'un anneau (cf [G], chap. IV ou [SP], chap. *Crystalline cohomology*).

- site cristallin Zariski ou fppf d'un schéma ([BBM] chap. 1), faisceaux sur le site cristallin ; les trois faisceaux fondamentaux $\mathcal{O}_{S/\mathbb{Z}_p}$, $i_*\mathcal{O}_S$, et $\mathcal{I}_{S/\mathbb{Z}_p}$. Cristaux en modules, (quasi-)cohérents, localement libres.

11 Le cristal de Dieudonné d'un groupe p-divisible

On exposera la construction du crital de Dieudonné $\mathbb{D}(G) = \mathcal{E}xt^1_{S/\mathbb{Z}_p}(G, \mathcal{O}_{S/\mathbb{Z}_p})$ faite dans [BBM].

12 Homomorphismes de groupes p-divisibles, $\mathrm{car}(K) = p$

1. Il s'agit de la bijection $\mathrm{Hom}_R(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(G_K, H_K)$, établie par Tate en caractéristique générique 0 (exposé 9). En caractéristique $p > 0$, on énoncera le résultat plus général de de Jong sur les F-cristaux. On ne donnera pas la preuve, mais on expliquera pourquoi il implique le théorème d'homomorphismes (cf. [dJ] et les références qui s'y trouvent).
2. On démontrera les corollaires suivants : critères de bonne réduction et de réduction semi-stable ([dJ] 2.5), et $\mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_p = \mathrm{Hom}(T_p(A), T_p(B)) = \mathrm{Hom}(A(p), B(p))$ ([dJ] 2.6., [Sh] p. 74).

13 Le groupe p-divisible d'un schéma abélien : relèvement le long d'un épaississement

Il s'agit du théorème de Serre et Tate. On suivra la preuve de Drinfeld [Dr], exposée dans [Ka] 1.1-1.2.1 et [Do]. Utiliser [Mu] pour les définitions de base. (D'autres preuves sont données dans [Me] V.2.3 et appendice, et [I2] A.1.3.)

Références

[Be] P. Berthelot, *Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 2, 225–268.

[Br] O. Brinon, *Le théorème de Tate en caractéristique positive (d'après A.J. de Jong)*, notes.

[BM1] P. Berthelot, W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline I*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes 1978, Vol. I, pp. 17–37, Astérisque 63, Soc. Math. France, 1979.

[BBM] P. Berthelot, L. Breen, W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Mathematics 930, Springer-Verlag, 1982.

[BD] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, prépublication disponible à `http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf`.

[BM2] P. Berthelot, W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 173–247, Progr. Math. 86, Birkhäuser, 1990.

[dJ] A. J. de Jong, *Homomorphisms of Barsotti-Tate groups and crystals in positive characteristic*, Invent. Math. 134 (1998), no. 2, 301–333. Erratum : Invent. Math. 138 (1999), no. 1, 225.

[De] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics 302, Springer-Verlag, 1972.

[DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Tome 1, Masson et Cie, 1970.

[Do] G. Dospinescu, *Lifting abelian schemes : theorems of Serre-Tate and Grothendieck* `http://www.math.ens.fr/~tly/gdt2dospinescu4.pdf`

[Dr] V. Drinfeld, *Coverings of p-adic symmetric regions*, Funkcional. Anal. i Priložen. 10 (1976), no. 2, 29–40. Translated in Funct. Anal. Appl. 10 :2 (1976), 107-115.

[DMSS] N. Durov, S. Meljanac, A. Samsarov, Z. Škoda, *A universal formula for representing Lie algebra generators as formal power series with coefficients in the Weyl algebra*, J. Algebra 309 (2007), no. 1, 318–359.

[F] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur un corps local*, Astérisque

[G] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 45, Les Presses de l'Université de Montréal, 1974.

[I1] L. Illusie, *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 12 (1979), no. 4, 501–661.

[I2] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après A. Grothendieck)*, Seminar on arithmetic bundles : the Mordell conjecture (Paris, 1983/84). Astérisque No. 127 (1985), 151–198.

[Ka] N. Katz, *Serre-Tate local moduli*, in Algebraic surfaces (Orsay, 1976-78), pp. 138–202, Lecture Notes in Math. 868, Springer, 1981.

[Ma] Y. Manin, *Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic*, Uspehi Mat. Nauk 18 (1963) no. 6 (114), 3–90. Trad. angl. Russian Mathematical Surveys, 1963, 18 :6, 1–83.

[MM] B. Mazur, W. Messing, *Universal extensions and one-dimensional crystalline cohomology*, Lecture Notes in Math. 370, Springer-Verlag, 1974, vii+134 pp.

[Me] W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to Abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Mu] D. Mumford, *Abelian varieties*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1974.

[MZ] W. Messing, T. Zink, *De Jong's Theorem on Homomorphisms of p-divisible groups*, notes.

[Ra1] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 78–85, Springer, 1967.

[Ra2] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p,\dots,p)$, Bull. S.M.F tome 102 (1974), 241-280.

[Ri] J. Riou, *Groupes p-divisibles*, notes d'exposé disponibles à `http://www.math.u-psud.fr/~riou/doc/tate.ps.gz`.

[Se1] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin : New York, 1965.

[Se2] J.-P. Serre, *Groupes p-divisibles (d'après J. Tate)*, Séminaire Bourbaki (1966/1967), Vol. 10, exposé no. 318, nov. 1966, 73–86, SMF, 1995.

[Se3] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Deuxième édition, Hermann, 1968. 245 pp.

[SGA 3] A. Grothendieck et al., *Schémas en groupes I,II,III*, Lect. Notes Math. 151, 152, 153, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Sh] S. Shatz, *Group Schemes, Formal Groups, and p-Divisible Groups*, Arithmetic Geometry, Ed. Gary Cornell and Joseph Silverman.

[SP] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, `http://math.columbia.edu/algebraic_geometry/stacks-git`.

[Ta1] J. Tate, *p-divisible groups*, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 158–183, Springer, 1967.

[Ta2] J. Tate, *Finite flat group schemes*, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 121–154, Springer, 1997.

[TO] J.Tate, F. Oort, *Group schemes of prime order*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4ème série, tome 3, 1970, 1-21.

[Z] T. Zink, *Cartiertheorie commutativer formalen Gruppen*, Teubner Texte zur Mathematik 68, 1984.