Séminaire commun d'analyse géométrique

Session de printemps 2011 (1er-2 avril)

Thème : « La démonstration de Kleiner du théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale »

L'objectif de la session est de présenter en détail la démonstration simple apportée par Bruce Kleiner du célèbre théorème de Misha Gromov suivant lequel tout groupe de type fini à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent. Les exposés suivent principalement l'article de Kleiner (*A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*, Journal of the AMS 23 (2010) nb. 3)

Vendredi 1er avril 2011

14h00-15h00 : *Introduction à la géométrie des groupes* par François Gautero

Après avoir énoncé le théorème de Gromov, on revient sur chacune des notions nécessaires à sa compréhension. On rappelle en particulier les bases de la géométrie des groupes (métrique du mot, quasi isométrie, croissance d'un groupe) ainsi que la définition de groupe nilpotent. Ces derniers sont replacés dans la « hiérarchie » des groupes classiques (abéliens, résolubles, moyennables,....) et chacune des catégories est plus ou moins brièvement traitée. On explicite particulièrement l'exemple des extensions du tore par $\mathbb{Z}$.

Enfin on revient sur le théorème de Milnor-Wolff, qui donne le résultat de Gromov dans le cas particulier des groupes linéaires grâce à l'alternative de Tits.

15h30-16h30 : *Inégalités de Poincaré* par Benoît Kloeckner

Les inégalités de Poincaré sont des majorations d'une norme intégrale d'une fonction par une norme intégrale de son gradient. Après avoir donné des exemples classiques de telles inégalités, on énonce et on démontre celle utilisée par Kleiner. Il s'agit d'une inégalité de Poincaré en normes L^2, s'appliquant sur les fonctions définies sur le graphe de Cayley d'un groupe quelconque, où intervient le rapport entre le volume d'une boule et le volume d'une boule de rayon double. On montre ensuite, en suivant Yau et Schoen, une inégalité de Poincaré inverse, contrôlant la norme du gradient d'une fonction *harmonique* définie sur un graphe par la norme de la fonction elle-même. Ces deux outils seront utilisés pour démontrer, sans utiliser le théorème de Gromov, un théorème de Colding et Minicozzi.

17h00-18h00 : *Existence de fonctions harmoniques* par Pierre Jammes

En préliminaire au théorème de Colding-Minicozzi, on s'intéresse dans cet exposé à l'existence de fonctions harmoniques à croissance polynomiale sur un groupe de type fini. Plus précisément, on montre que sur tout groupe infini de type fini il existe une fonction harmonique lipschitzienne non constante, en suivant une construction de Shalom et Tao. La démonstration repose essentiellement sur une utilisation du théorème spectral, les autres techniques étant élémentaires.

Samedi 2 avril 2011

09h00-10h00 : *Théorème de Colding-Minicozzi* par Erwann Aubry

Soit G un groupe de type fini et d_S la distance associée à un système de générateurs fini S. On dit qu'une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est à croissance polynomiale d'ordre α si $\sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_S(x,y)^\alpha}$ est fini, et on note H_α l'ensemble des fonctions harmoniques à croissance polynomiale d'ordre α sur G. On dit aussi que le groupe G est à croissance faiblement polynomiale d'ordre n si $\liminf\limits_{R\to+\infty} \dfrac{V_R}{R^n}$ est fini (où V_R est le cardinal de la boule de rayon R centrée en e). Notez que ces propriétés ne dépendent pas du choix du système fini de générateurs de G.

Dans cet exposé, on utilise les inégalités de Poincaré et de Poincaré inverse, démontrées dans l'exposé de B. Kloeckner, pour majorer la dimension de l'espace H_α, lorsque G est à croissance faiblement polynomiale d'ordre n, par une fonction universelle $C(s,n,\alpha)$, où s est le nombre de générateurs de S. En particulier, H_1 est de dimension finie, ce qui fournit une représentation finie non triviale (d'après l'exposé de P.Jammes) du groupe G.

10h30-11h30 : *Apothéose : le théorème de Gromov* par François Dahmani

On montre le théorème objectif de la rencontre:

Théorème (Gromov, Kleiner). *Tout groupe de type fini dont la croissance est polynomiale contient un sous-groupe d'indice fini qui est nilpotent.*

L'approche est par récurrence sur le degré de croissance, et est fondée sur un lemme de décomposition : si un tel groupe G se surjecte sur $\mathbb{Z}$, le noyau est à croissance majorée par un polynôme de degré un de moins.

Pour avoir une telle surjection, on utilise une représentation linéaire de dimension finie, d'image infinie, de G. Pour construire cette représentation, la preuve de Kleiner (plutôt, une variation de celle ci par Shalom et Tao) utilise ici l'action par précomposition sur l'espace des fonctions harmoniques lipshitziennes sur G. Cet espace est de dimension finie et n'est pas réduit aux constantes si G est infini (cf exposés précédents). Le principe du maximum permet d'obtenir que cette représentation, ou une de ses variantes, est infinie ce qu'on cherchait. Enfin, les groupes à croissance polynomiale qui sont linéaires de surjectent sur $\mathbb{Z}$. Cela est dû à Tits, Milnor et Wolf dans ce cadre général. On peut raffiner la construction précédente pour avoir une représentation d'image relativement compacte, et dans ce cas, la preuve de la surjection sur $\mathbb{Z}$ est plus facile.