

CIRM Summer School

**Sub-Riemannian manifolds:  
from geodesics to hypoelliptic diffusion**

September 1 - 5, 2014

Program and abstracts

**Organizers**

- ANDREI AGRACHEV, SISSA-ISAS, Trieste, Italy
- UGO BOSCAIN, CMAP, École Polytechnique, France
- FRÉDÉRIC JEAN, ENSTA ParisTech, France
- MARIO SIGALOTTI, Team GECO, INRIA Saclay, France

**Sponsors**

ERC GeCoMethods, INRIA Saclay

# Program

Monday, Sept. 1	09:00–10:30	L. Rifford, Lecture 1
	10:50–12:20	N. Garofalo, Lecture 1
	14:00–15:30	A. Thalmaier, Lecture 1
	16:00–17:30	P. Pansu, Lecture 1
Tuesday, Sept. 2	09:00–10:30	L. Rifford, Lecture 2
	10:50–12:20	N. Garofalo, Lecture 2
	14:00–15:30	A. Thalmaier, Lecture 2
	16:00–17:30	P. Pansu, Lecture 2
Wednesday, Sept. 3	09:00–10:30	L. Rifford, Lecture 3
	10:50–12:20	N. Garofalo, Lecture 3
	14:00–17:30	Free discussions
Thursday, Sept. 4	09:00–10:30	L. Rifford, Lecture 4
	10:50–12:20	N. Garofalo, Lecture 4
	14:00–15:30	A. Thalmaier, Lecture 3
	16:00–17:30	P. Pansu, Lecture 3
Friday, Sept. 5	09:00–10:30	A. Thalmaier, Lecture 4
	10:50–12:20	P. Pansu, Lecture 4
	Joint afternoon with the “Séminaire Commun d’Analyse Géométrique”	
	14:30–15:20	Talk 1: F. Jean
	15:40–16:30	Talk 2: L. Michel
	16:50–17:40	Talk 3: J. Bertrand

# Courses

- **Geometric control and sub-Riemannian geodesics**

**Lecturer:** Ludovic Rifford, University of Nice

**Abstract:** This will be an introduction to sub-Riemannian geometry from the point of view of control theory. We will define sub-Riemannian structures and prove the Chow Theorem. We will describe normal and abnormal geodesics and discuss the completeness of the Carnot-Carathéodory distance (Hopf-Rinow Theorem). Several examples will be given (Heisenberg group, Martinet distribution, Grusin plane).

- **The geometry of subelliptic diffusions**

**Lecturer:** Anton Thalmaier, University of Luxembourg

**Abstract:** We discuss hypoelliptic and subelliptic diffusions; the lectures include the following topics:

- Malliavin calculus and Hörmander's theorem;
- smoothness of transition probabilities under Hörmander's brackets condition;
- control theory and Stroock-Varadhan's support theorems;
- hypoelliptic heat kernel estimates;
- gradient estimates and Harnack type inequalities for subelliptic diffusion semi-groups;
- notions of curvature related to sub-Riemannian diffusions.

- **Differential forms and the Hölder equivalence problem**

**Lecturer:** Pierre Pansu, University of Paris-Sud

**Abstract:** In 1993, Gromov asked for which exponents  $\alpha$  there exist  $C^\alpha$ -Hölder continuous (local) homeomorphisms of Euclidean spaces to sub-Riemannian Carnot groups. I will explain some of Gromov's partial results on this question. They rely on Rumin's theory of differential forms adapted to sub-Riemannian spaces. If time permits, other approaches to the Hölder equivalence problem will be discussed. Recommended reading : Gromov's book "Carnot-Carathéodory spaces seen from within".

- **Hypoelliptic operators and analysis on Carnot-Carathéodory spaces**

**Lecturer:** Nicola Garofalo, University of Padova, Italy

**Abstract:** In this course, we will define the sub-Laplacian associated with a sub-Riemannian structure, and we will describe its hypoellipticity under the Hörmander condition. We will introduce the main tools for the study of sub-elliptic PDEs.

# Joint afternoon with the “Séminaire Commun d’Analyse Géométrique”

(the abstracts are in French but the talks are in English...)

- **Hausdorff volumes in sub-Riemannian geometry** (Frédéric JEAN, ENSTA Paris-Tech, Palaiseau)

**Abstract** Dans un espace métrique, on définit le volume de Hausdorff d’un ensemble  $E$  comme sa mesure de Hausdorff de dimension  $D$ , où  $D$  est la dimension de Hausdorff de  $E$ . Le but de cet exposé est de présenter les résultats connus sur les volumes de Hausdorff dans une variété sous-riemannienne, où la dimension de Hausdorff diffère de la dimension topologique. Je rappellerai d’abord les premiers résultats de Mitchell sur la dimension de Hausdorff et ceux plus récents de Agrachev, Boscain et Barilari sur la régularité des volumes de Hausdorff dans le cas équirégulier. J’exposerai ensuite les résultats que j’ai obtenus avec Roberta Ghezzi sur la décomposition de Radon-Nykodim du volume de Hausdorff par rapport à un volume lisse dans des variétés non équirégulières.

- **Hypoelliptic random walks** (Laurent MICHEL, LJAD - Nice)

**Abstract** On étudie la convergence vers l’équilibre d’une marche aléatoire associée à une famille hypoelliptique de champs de vecteurs sur une variété compacte (travail en collaboration avec G. Lebeau).

- **Wasserstein space of a negatively curved space** (Jérôme BERTRAND, Institut de Mathématiques de Toulouse)

**Abstract** Dans cet exposé, je présenterai des propriétés géométriques de l’espace des mesures de probabilités admettant un second moment fini (l’espace de Wasserstein) définies sur un espace  $\mathcal{CAT}(0)$ . Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec B. Kloeckner.