Pierre Ageron

Est-il possible d’apporter une réponse à toute question mathématique ?

Au XIXe siècle, les mathématiciens sont parvenus à trancher par la négative plusieurs problèmes anciens et centraux des mathématiques, ce qui a fait naître au début du XXe la conviction qu’il serait possible de « tout savoir » en mathématiques, c’est-à-dire d’apporter une réponse à tout problème, quitte à démontrer qu’il est impossible. La période dite de la « crise des fondements », dont nous examinerons différents aspects, a semblé définitivement ruiner cet espoir. Des paradoxes sont apparus, mettant en évidence des ensembles apparemment bien définis, mais dont l’existence est impossible. Certains principes logiques ont été considérés comme non fiables, semant le doute sur les démonstrations qui procèdent par l’absurde ou demandent de choisir des éléments dans des ensembles. Des énoncés arithmétiques vrais, mais indémontrables de manière purement arithmétique, ont été découverts. Des énoncés mathématiques, dont l’intuition n’aide guère à savoir s’ils sont vrais ou faux, ont été prouvés impossibles à trancher dans le cadre mathématique usuel. Le succès des théorèmes d’impossibilité s’est étendu vers 1950 aux sciences humaines : il a été par exemple démontré qu’il n’existe aucun système de vote « raisonnable ». Nous donnerons sur tous ces sujets des exemples explicites ne s’éloignant pas trop des « mathématiques ordinaires ». Nous montrerons aussi que ces résultats négatifs ont enrichi de manière positive la pratique mathématique et ouvert la créativité, de sorte qu’on peut encore penser qu’il est possible de « tout savoir ».