Graphes croisés et non croisés

En 1994, David Aldous a montré qu'une triangulation du n-gone, c'est-à-dire un découpage du polygone régulier en triangles par des diagonales qui ne se croisent pas, choisi uniformément au hasard, converge en loi vers une triangulation aléatoire du disque, appelée triangulation brownienne (de fait, construite à partir de l'excursion brownienne). Vingt ans plus tard, Nicolas Curien et Igor Kortchemski ont montré l'universalité de cet objet, qui apparait à la limite d'autre graphes non-croisés dans le n-gone choisis uniformément au hasard dans leur famille : graphes généraux, dissections du polygone, partitions non-croisées, arbres non-croisés. Outre l'aspect géométrique, l'étude de l'asymptotique de certaines quantités, comme le nombre de composantes connexes, leurs tailles, les degrés de sommets, etc. a été considérée.

Je rappellerai ces résultats et les éléments de preuves associés avant d'aller dans deux directions ouvertes.

Tout d'abord, on peut s'affranchir de la contrainte d'absence de croisements, et simplement dessiner dans le polygone régulier son graphe aléatoire favori (Erdos-Reny, modèle de configuration, partitions, arbres, etc.) et étudier son comportement : nombre total de croisements, maximum pour chaque arête du nombre de croisements de cette arête, nombre maximum d'arêtes qui se croisent deux à deux ? Récemment, Arenas-Velila & Arizmendi par exemple ont montré un TCL pour le nombre de croisements d'un graphe donné, plongé uniformément au hasard dans le polygone.
D'un point de vue plus géométrique, étant donné le graphe avec des croisements, on peut ajouter un sommet à chaque point de croisement pour retrouver la planéité et étudier les distances de graphes de ce nouveau graphe.

Dans une autre direction, on peut se fixer une limite k pour chacun des trois nombres précédents et tirer un graphe aléatoire satisfaisant cette contrainte d'être « peu croisé » et chercher à nouveau une limite en loi pour le graphe. Si le temps le permet je discuterai un petit peu du dernier choix, où l'on fixe le nombre maximum d'arêtes qui se croisent deux à deux.