

Coloriage poissonnien du plan : propriétés fractales de la frontière (et convergence de courbes aléatoires)

Guillaume Blanc

Soient R_0, B_0 et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]^2$. On pense à R_0 comme un point initial rouge et à B_0 comme un point initial bleu, puis on imagine que X_1, X_2, \dots tombent consécutivement dans le carré unité, et on fait prendre à chaque point qui arrive la couleur du point le plus proche déjà tombé. Cela fournit un coloriage de $[0, 1]^2$, et on s'intéresse aux propriétés de la frontière rouge/bleu à la limite. Ce modèle de coloriage poissonnien a déjà été étudié par Aldous [2] et Preater [3] indépendamment. En particulier, Preater a montré que presque sûrement, la frontière est de mesure de Lebesgue nulle, et Aldous a conjecturé qu'elle est même fractale.

Dans un travail en commun avec Anne-Laure Basdevant, Nicolas Curien et Arvind Singh, nous montrons que la dimension de Hausdorff de la frontière est comprise entre 1 et 2 strictement, conformément à la conjecture d'Aldous. En revanche, nous ignorons si les courbes discrètes qui constituent la frontière rouge/bleu après l'arrivée du n -ième point convergent lorsque $n \rightarrow \infty$ vers des courbes continues constituant la frontière limite. Cette présentation sera l'occasion de parler du papier de Aizenman et Burchard [1], qui établissent des résultats en ce sens pour des courbes aléatoires venant de modèles de physique statistique critiques comme la percolation.

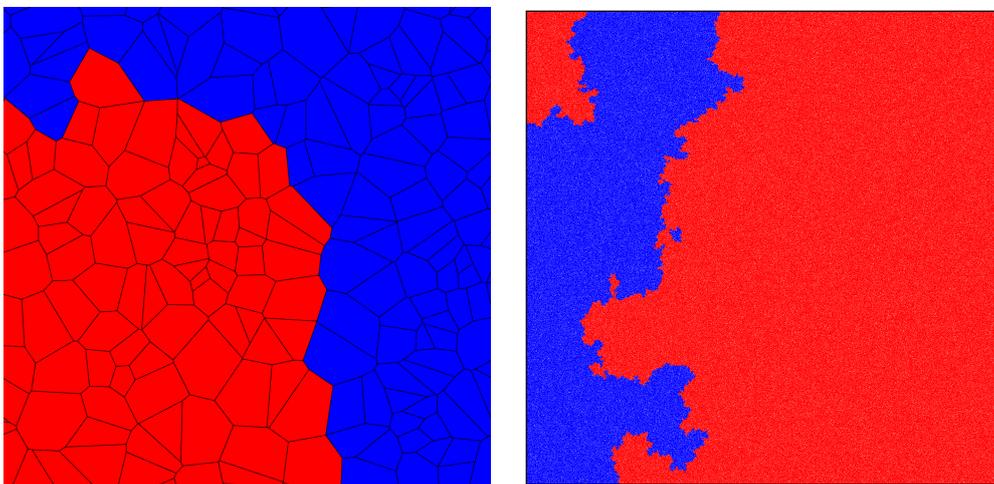


FIGURE 1 – **Gauche.** Diagramme de Voronoï colorié de $R_0, B_0, X_1, \dots, X_n$, pour n petit. **Droite.** Simulation du modèle pour n grand, due à Arvind Singh. (Les points $R_0, B_0, X_1, X_2, \dots$ simulés ne sont pas les mêmes pour les deux figures.)

Références

- [1] M. AIZENMAN AND A. BURCHARD, *Hölder regularity and dimension bounds for random curves*, Duke Mathematical Journal, 99 (1999), pp. 419 – 453.

- [2] D. ALDOUS, *Random partitions of the plane via Poissonian coloring and a self-similar process of coalescing planar partitions*, The Annals of Probability, 46 (2018), pp. 2000 – 2037.
- [3] J. PREATER, *A species of voter model driven by immigration*, Statistics & Probability Letters, 79 (2009), pp. 2131–2137.