Vers une théorie de l'élimination intégro-différentielle effective

Camille Pinto (Inria Paris, IMJ–PRG)
en collaboration avec
Thomas Cluzeau (Univ. Limoges, XLIM) & Alban Quadrat (Inria Paris, IMJ–PRG)

Dans cet exposé, nous étudierons les propriétés de l'algèbre $\mathbb{I}_1$ des opérateurs intégro-différentiels ordinaires à coefficients dans l'anneau $\mathbb{k}[t]$ des polynômes en t, où $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique nulle. Plus précisément, $\mathbb{I}_1$ est la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$ (l'anneau des $\mathbb{k}$-endomorphismes de $\mathbb{k}[t]$) générée par les $\mathbb{k}$-endomorphismes de dérivation, d'intégration et de multiplication par t.

L'algèbre de Weyl, bien connue des mathématiciens, est la sous-$\mathbb{k}$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$ générée par la dérivation et la multiplication par t. Cette algèbre forme un anneau noethérien, c'est-à-dire, les idéaux (à gauche ou à droite) sont de type fini. Ce résultat a permis le développement d'une version effective de la théorie de l'élimination pour les systèmes linéaires d'équations différentielles à coefficients polynomiaux.

Le but de ce projet de recherche est d'étendre cette théorie effective de l'élimination aux systèmes linéaires d'équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux. Malheureusement, en 2013, Bavula a prouvé que l'algèbre $\mathbb{I}_1$ n'était pas noethérienne[1], ce qui semble compromettre un tel développement. Néanmoins, Bavula a également montré que $\mathbb{I}_1$ était un anneau *cohérent*[2], c'est-à-dire, tous les idéaux (à gauche ou à droite) de type fini sont de présentation finie (c'est-à-dire, les modules de relations entre un ensemble fini de générateurs sont finiment engendrés).

La caractérisation algorithmique de la cohérence de $\mathbb{I}_1$ est au cœur d'une étude effective des systèmes linéaires intégro-différentiels à l'aide de l'*analyse algébrique* (utilisant la théorie des modules et l'algèbre homologique). En effet, un système linéaire intégro-différentiel à coefficient polynomiaux est défini par une matrice $R \in \mathbb{I}_1^{q\times p}$ et les équations $R\eta = 0$, où $\eta \in \mathcal{F}^{p\times 1}$ et $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{I}_1$-module à gauche (par exemple, $\mathbb{k}[t]$ ou $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$). Au système précédent est associé le $\mathbb{I}_1$-module à gauche de présentation finie $\mathcal{M} = \mathrm{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1\times p} \Big/ \left(\mathbb{I}_1^{1\times q}\, R\right)$. C'est ainsi que la catégorie des modules à gauche de présentation finie prend toute sa place en théorie des systèmes linéaires. Maintenant, le fait que $\mathbb{I}_1$ soit cohérent implique que tout module de présentation finie sur $\mathbb{I}_1$ (par exemple, $\mathcal{M}$) est *cohérent*. Hors, la catégorie des modules cohérents est stable par les opérations algébriques classiques (somme (directe), quotient, image, noyau, conoyau, produit tensoriel, homomorphismes, etc.). De plus, les théorèmes classiques pour les modules de type fini sur des anneaux noethériens s'étendent aux modules de présentation finie sur des anneaux cohérents. Ainsi, notre projet de recherche revient à développer les aspects effectifs de la catégorie des modules cohérents sur $\mathbb{I}_1$ en vue de l'étude des systèmes linéaires intégro-différentiels à coefficients polynomiaux.

Cependant, la preuve de la cohérence de $\mathbb{I}_1$ donnée par Bavula n'est pas algorithmique. Cet exposé a pour but de contribuer à la rendre effective en montrant comment l'*annulateur* d'un élément de $\mathbb{I}_1$, définissant un opérateur d'évaluation, peut être caractérisé explicitement et calculé à l'aide de méthodes classiques du calcul formel. Finalement, en combinant ces résultats avec ceux de la littérature (caractérisant l'annulateur d'un élément de $\mathbb{I}_1$ ne définissant pas un opérateur d'évaluation), nous obtenons alors une version effective de la première des deux conditions caractérisant la cohérence d'un anneau. La seconde condition sera étudiée dans un prochain travail.

[1] V. V. Bavula. The algebra of integro-differential operators on an affine line and its modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 217 (3), 495–529, 2013.

[2] *Op. cit.*