

Minimalité et ensembles profonds (II)

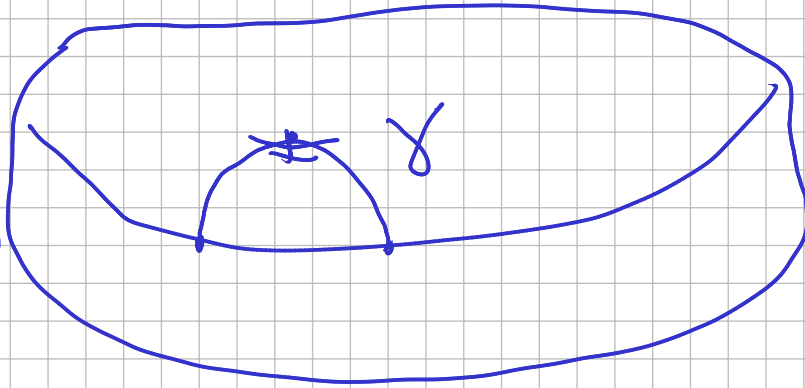
CIRM 03/06/2021
JALION (Rennes)

Petite précision. Les objets à l'étude au jour d'hui sont des courbes de sorte des $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, chaque fois qu'ils sont définis localement.

Feuille de Rolle

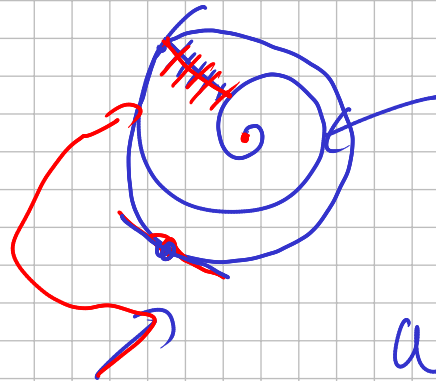
$\Pi, \omega, \omega \cap \Pi = \emptyset, \Pi \subset \{a_1^1, \dots, a_m^m\}$
 $\omega = \sum a_i \cdot \partial h_i$

$\rightarrow \mathcal{F}_\Pi \quad V \in \mathcal{F}_\Pi$



V est de Rolle
 $\forall \gamma: [0,1] \rightarrow \Pi$
 $C^1 / \gamma(0), \gamma(1) \in V$
 $\exists t / \gamma'(t) \in \ker \omega(\gamma(t))$

Toute feuille de Rolle



la feuille V de
Fournier

cette feuille n'est pas de Rolle

$$w = (x-y) dx + (x+y) dy$$

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Remarque M n'est pas simplement connexe.

Théorème $M, w, \mathcal{F}$ Si M est simplement connexe

(Poincaré) toute feuille de $\mathcal{F}$ est de Rolle
suivant l'argument de Haeffliger.

△ l'économie analytique est important.

Contre exemple

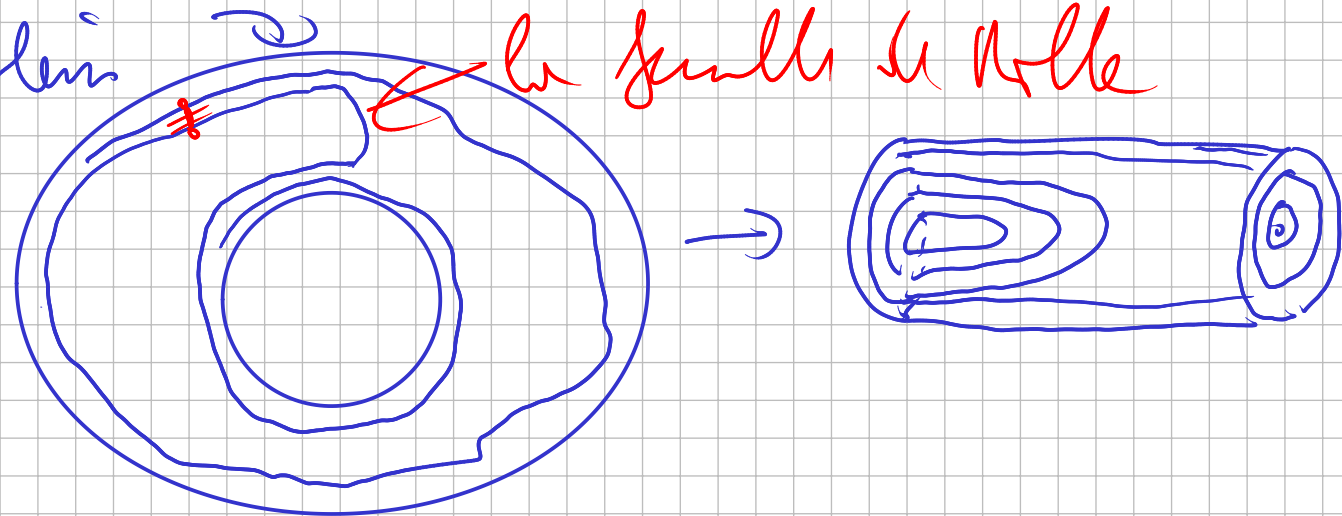
1/ On se rappelle de $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{pt\}$.

2/ On se rappelle que S^3 est la réunion de 2
Tore plein le long d'un tore

3/ On va feuilleter S^3 avec des plans et un
un tore

4/ le fini obtenu est un C^∞ mais pas analytique

$S^3 \supset T_1$ fore plein



On fait la même chose des T_2 complémentaires de T_1
 → Feuilletage C^∞ de S^3 avec une feuille qui est
 un tore la bordure les autres sont des "plans" qui
 s'accrochent au le Tre

Dans toute la suite on s'intéresse exclusivement aux feuilles de Rolle.

Théorème Les feuilles de Rolle et les semi-algébriques appartiennent à une même structure minimale.

La preuve de cette série repose sur le Théorème de Givant mis sous une forme pour les ensembles affines.

Ensemble plaffien

Soient $(M_1, w_1, F_1), \dots, (M_p, w_p, F_p)$ des
fem. lib. et soit X un semi-analyt. type.

Un ensemble plaffien associé à un
 $X \cap V_1 \cap \dots \cap V_p$

où les V_i sont des fem. lib. de F_i

Théorème Il existe un entier N qui majora

$\dim(X \cap V_1 \cap \dots \cap V_p)$ le nb. de compos. auto
connexes de $X \cap V_1 \cap \dots \cap V_p$ quelle que soient les fem. lib.
de $F_1, \dots, F_p$

Preuve. 1/ Grâce à l'existence de dérivées partielles
des semi-analytiques on peut montrer

$$(\Gamma \subset \{f_1 = \dots = f_q = 0 \mid df_1 \wedge \dots \wedge df_q \neq 0, q \geq 0, \bar{P} \mid \Gamma df_q = 0\})$$

et Γ semi-analytique différentielle analytique de codimension q)

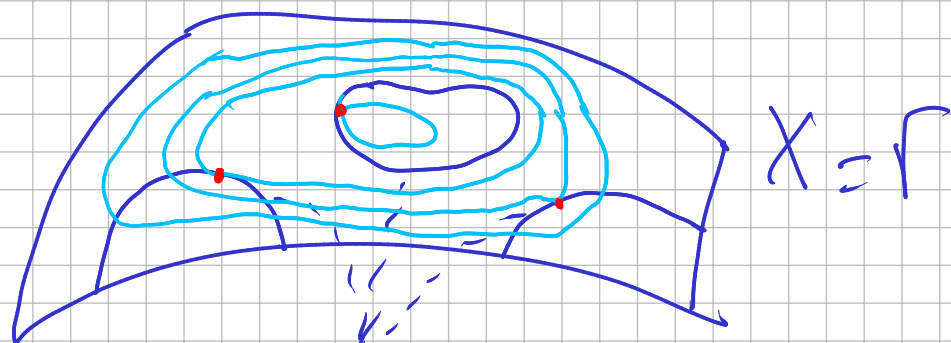
On peut supposer que $X = \Gamma$ feuillet normal et on
peut supposer que si $I \subset \{1, \dots, p\}$ alors soit

$$- df_1 \wedge \dots \wedge df_q \wedge (\bigwedge_{i \in I} W_i)|_{\Gamma} \equiv 0 \quad \text{sur}$$

$$- df_1 \wedge \dots \wedge df_q \wedge (\bigwedge_{i \in I} W_i)(a) \neq 0 \quad \forall a \in \Gamma$$

→ Variation sur le thème du théorème de rang.

2/ Donc $V \cap \dots \cap V_p \cap X$ est formé de
 feuilles de feuilletage induit par
 $W_1, \dots, W_p$ sur X



$X = \Gamma$

On reprend les
 points rouges
 (on mène un pa
 groupante

comme de $V \cap \dots \cap V_p \cap X$ qui a $\hat{\alpha} \cdot g$.
 (on suppose $W_1 \cap \dots \cap W_p \cap \text{def}_1 \cap \dots \cap \text{def}_p(a) \neq \emptyset \forall a \in P$)

les points singuliers qui sont des endomorphismes locaux
de $g \mid V_1 \cap \dots \cap V_p \cap X$ sont dans

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_p \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \wedge dy = 0$$

Donc $b_0(V_1 \cap \dots \cap V_p \cap X) \leq b_0(V_1 \cap \dots \cap V_p \cap X')$

où $X' = X \cap \{df_1 \wedge \dots \wedge df_p \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \wedge dy = 0\}$

finalement $\dim X' \leq \dim X$ ($X \neq \emptyset$)

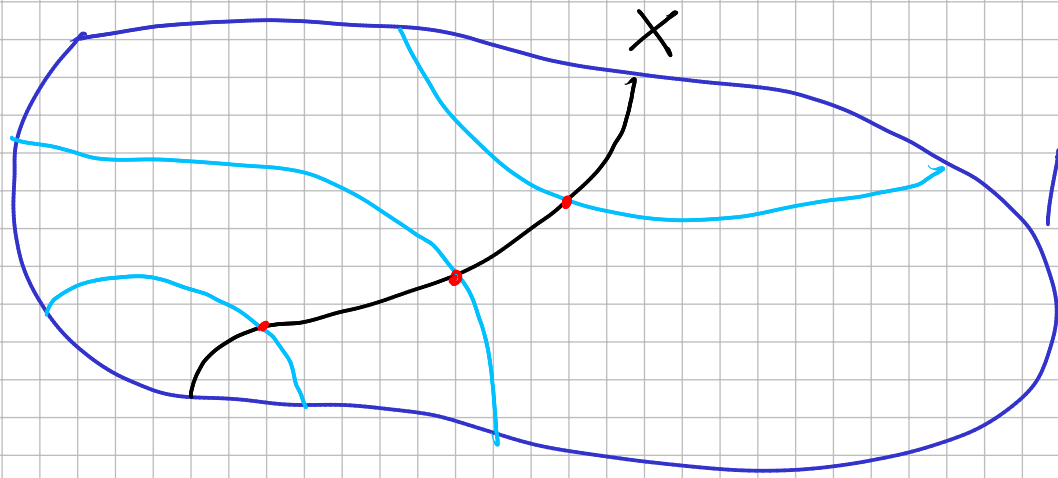
(c'est ok par l'immersion, puisque à chaque $g \in g_x$

on l'affine géométrique)

3) Pour prouver le théorème il suffit de considérer
le cas d'un $X = n - p$

(tant que $X \cap V_1 \cap \dots \cap V_p$ n'est pas de dimension
nulle on peut remplacer X par X' de dimension plus
petite)

→ Il suffit prouver le théorème de dimension longue
d'un $X = n - p$ lorsqu'on considère p formes.



$$M = M_1 \cap \dots \cap M_p$$

$$V_1 \cap \dots \cap V_p$$

$$\dim(V_1 \cap \dots \cap V_p \cap X) = 0$$

Regardons ce qui arrive avec $V_1 \cap \dots \cap V_p \cap X$

C'est de dimension $\underline{1}$. C'est donc une courbe avec plusieurs composantes. Chaque composante courbe est une courbe qui se termine au x finit des courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_p$

On a eu d'ailleurs un feuilletage.

→ On fait une double résumée en
faisant bien $(P, n-1) \in \dim X$
 $\uparrow$
nombre de feuilles

→ On est ramené à la situation $p \geq 0$
et X de dim 0
 $\text{bol}(X) < N$

Chaque composante connexe de X rencontre au
plus une fois chaque feuille $V_1, \dots, V_p$.

$$b_0(X) \geq b_0(V_1 \cap \dots \cap V_p \cap X)$$