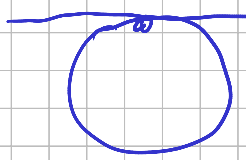
O-minimalité des ensembles pfaffiens (I)

CIRM 31/05/2021

J.M. Lion (Rennes)

⚠ $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$

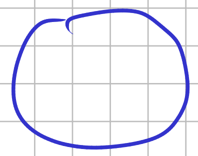


$\mathbb{P}_1$

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ $\left(\mathbb{R}^n \subset \overline{\mathbb{R}}^n\right)$

On dit que X est semi-analytique si localement $\forall a\ \exists U$ $X \cap U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} \{f_{ij} = 0,\ g_{ij} > 0\}$ où U voisinage de a ds $\overline{\mathbb{R}}^n$ et $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}(U)$

Exemples 1/ $\{x^2+y^2=1\} = S$



2) $y = \sin(x)$ avec $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) semialgébrique donc semianalytique

2) seulement semianalytique.

Décomposition locale des semianalytiques.

Localement un semianalytique est réunion finie de feuillets normaux.

Feuillet normal.

Γ est un feuillet normal si Γ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ $(p \leq n)$ et il existe $f_1, \dots, f_{n-p}$ et g telles que

$$\Gamma \subset \{f_1 = \dots = f_{n-p} = 0,\ g > 0\}$$

$$\bar{\Gamma} \setminus \Gamma \subset \{g = 0\}$$

si $x \in \Gamma$ $\quad df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-p}(x) \neq 0$

donc $T_x\Gamma = \cap \ker df_i$

Ici $f_1, \dots, f_{n-p}, g \in C(U)$ où U est un voisinage de $\bar{\Gamma}$.

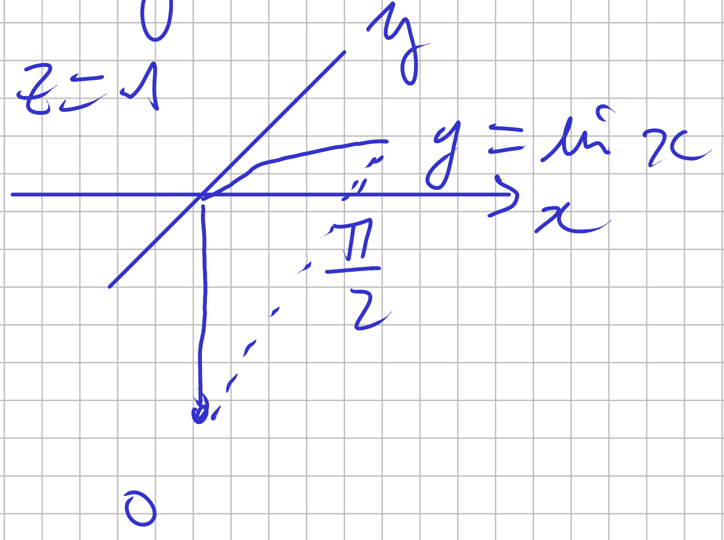
Théorème Si $X_1, \dots, X_n$ sont des semialgébriques il existe une stratification finie de $\mathbb{R}^n$ en semialgébriques compatible avec $X_1, \dots, X_n$:

$\mathbb{R}^n = \coprod \Gamma_j$, les Γ_j sont des semialgébriques et sont des variétés lisses.

$\forall X_i$ $\quad X_i = \bigcup_{j \in J_i} \Gamma_j$ et $\overline{X_i} \setminus X_i$ est aussi de cette forme. et $\dim X_i > \dim \overline{X_i} \setminus X_i$

Le Théorème de Tarski Seidenberg est-il vrai pour les semi analytiques ?

Non il est faux



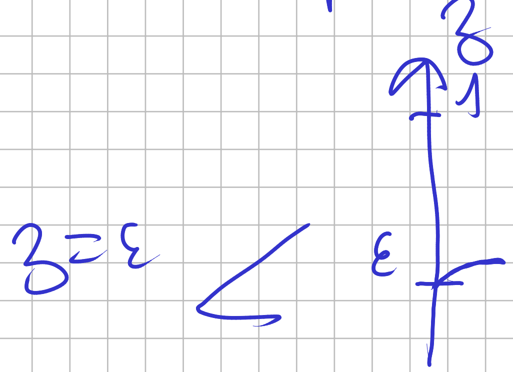
$$Y = \left\{ (x,y,z) \quad y = z \sin\left(\frac{x}{z}\right) \quad \begin{array}{l} x \in [0, \frac{\pi}{2} z] \\ z \in]0,1] \end{array} \right\}$$

L'ensemble Y est connu. C'est donc une projection.

$Y = \pi(X)$ avec $X = \{(x, y, z, t) \mid y = z\sin(t),$
$z \in]0,1]$, $x \in [0, \frac{\pi}{2} z]$,
$x = zt\}$

Y est la projection du semianalytique X.

Mais Y n'est pas un semi analytique !



$y = \varepsilon \sin(\frac{x}{\varepsilon})$

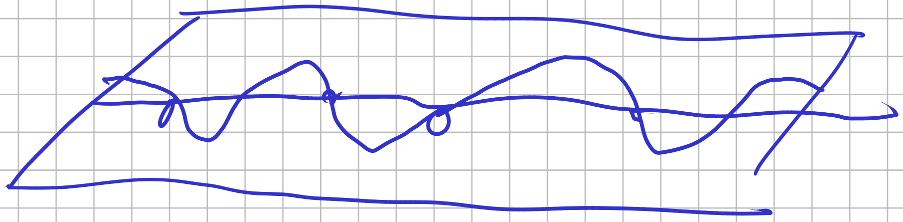
Si Y semianalytique
de dim 2
il existe $f \in \mathcal{O}_0$

$Y \subset \{f=0\}$ $\quad Y \cap \{z=\varepsilon\} \subset \{f(x,y,\varepsilon)=0\}$

= graphe de

$\lim \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ défini

sur $[-\delta,\delta]$, ou



δ

δ suff. petit dep. de ε petit

$\# \; f(x,y,\varepsilon)=0 \cap \{y=0\}$ est fini mais arbitrairement grand

$\Rightarrow$ contredit les propriétés de finitude uniforme que vérifie les semi-analytiques.

<u>Ppté de finitude uniforme</u>

Si X semi-analytique. $\exists N \in \mathbb{N}$

$b_0(X \cap E) \leq N$ quelque soit E

sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Que peut-on dire des projections des semi-analytiques ?

Théorème de Gabrielov

Les projections de semi-analytiques, appelés sous-analytiques, forment une structure o-minimale. Plus précisément :

Si $X = \pi_1(Y)$ alors il existe π_2, Z tels que $\mathbb{R}^n \setminus X = \pi_2(Z)$

($\forall Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ semi-analytique $\exists m'$ et $Z \subset \mathbb{R}^{n+m'}$ semi-analytique)

Gabrielov prouve plus que la o-minimalité:
Il prouve la modèle complétude.

Qu'est-ce qui fait marcher le théorème de Gabrielov:

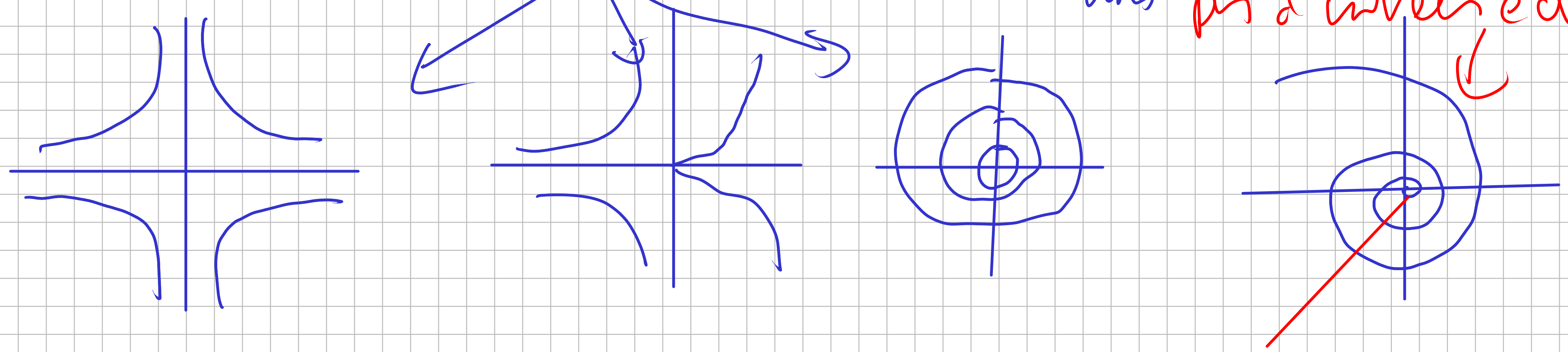
- Finitude uniforme des semi-analytiques,
- l'existence de stratifications des semianalytiques ayant connaissance "semi-

"analytique" des espaces tangents aux variétés algé-
briques lisses.

Introduction des équations différentielles

⚠ Pas toutes. On montre que quand deux candidats

NON CANDIDAT O-MINIMAL un nombre infini de pts d'intersection



Feuilletage analytique de codimension 1

Soit Ω un ouvert semi-analytique de $\mathbb{R}^n$

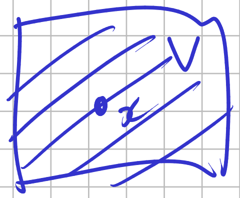
Soit ω une 1 forme différentielle, analytique, définie au voisinage de $\overline{\Omega}$.

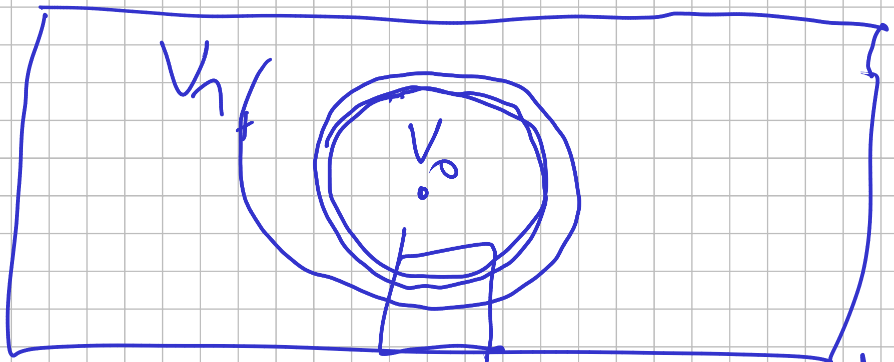
$$\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$$

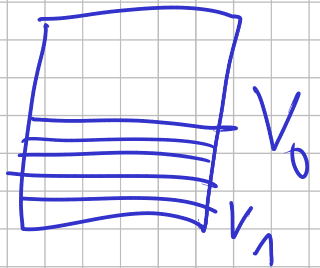
$$S(\omega) = \{a_1 = \dots = a_n = 0\} \cap \Omega = \emptyset$$

$$\omega \wedge d\omega = 0 \quad \text{(Condition d'intégrabilité)}$$

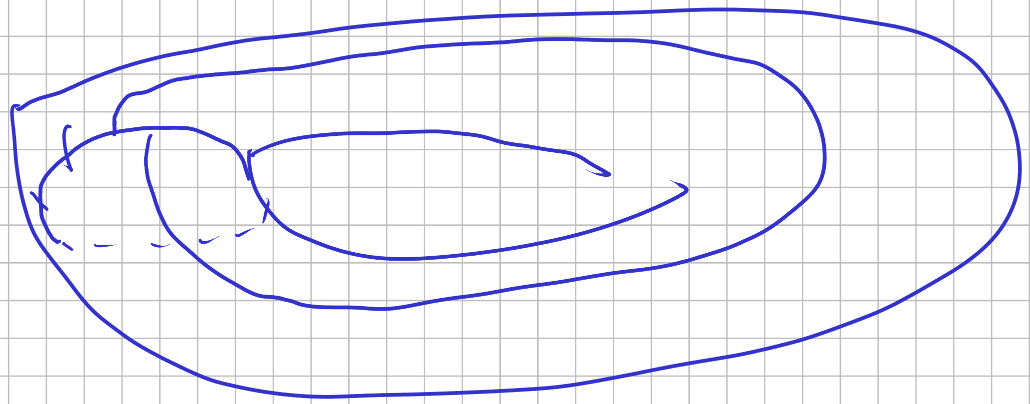
Sous ces conditions M est feuilletée par
$M = \sqcup V$ où V sont des hypersurfaces
immergées dans M et dont l'espace tangent
est donné par $T_x V = \ker \alpha(x)$.







Il y a des situations où des feuilles sont denses.



Tore de $\mathbb{R}^3$

Rotation d'angle $\alpha\pi$ avec α irrationnel

Pour conclure ? Quelles familles relever ?

$\rightarrow$ Rolle nous permet de conclure.