Équations aux dérivées partielles et océanographie

Anne-Laure Dalibard

Sorbonne Université - Laboratoire Jacques-Louis Lions

29 janvier 2021

Master class CEPS 2021 - Marseille

European Research Council

Established by the European Commission

Principaux enjeux

Sujet de recherche : Analyse mathématique théorique de systèmes d'EDP décrivant des phénomènes océanographiques.

Pourquoi ?

- Besoin d'une compréhension théorique pour améliorer les codes numériques ou pour prendre en compte des effets plus fins dans les modèles ;
- Jolies questions de mathématiques !

Plan

Présentation rapide des modèles d'océanographie

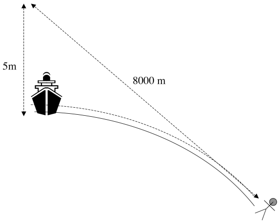
La communauté mathématique en océanographie

Présentation des équations

Plan

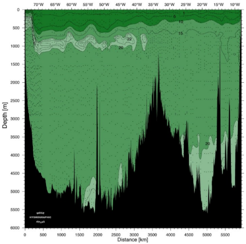
L'océan, un système complexe

- Par sa géométrie



Courbure terrestre

Découpe des côtes

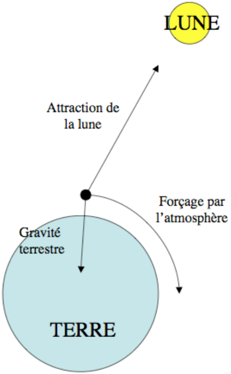


Relief sous-marin

L'océan, un système complexe

- Par ses couplages

  - Attraction de la lune
  - Gravité terrestre
  - Forçage par l'atmosphère



L'océan, un système complexe

- Par la superposition de nombreux mouvements
  - Echelle planétaire : rotation de l'océan avec la Terre
  - Echelle $\sim$ 1000 km :
    grands courants (Gulf Stream, Kuroshio)
    phénomènes quasi périodiques (El Niño)
  - Echelle $\sim$ 10 km :
    marées, houle, déferlement des vagues
    phénomènes localisés en temps (raz de marée)

Conséquences

- Description universelle non pertinente.
- Isolation de sous-problèmes, dont l'étude numérique et théorique est plus simple.

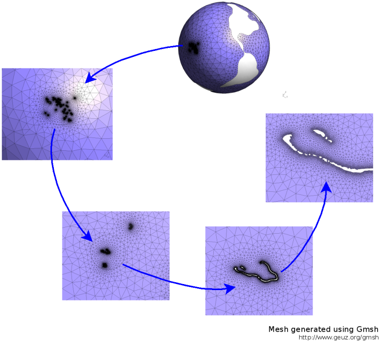


FIGURE – « Maillage adapté » de la Terre avec zoom sur l'archipel de Mururoa

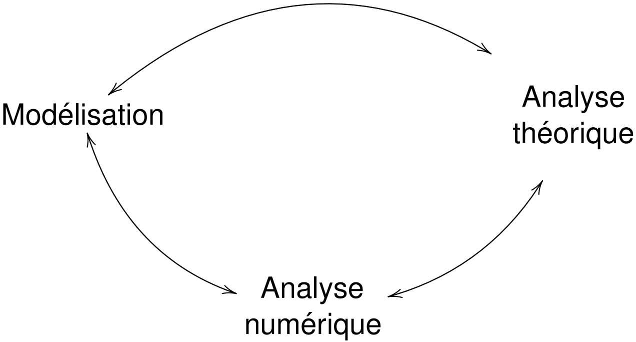
Plan

Contributions des mathématiques en océanographie

Rôle des mathématiciens : démontrer des théorèmes !

- Validation théorique et numérique des modèles et des approximations ;
- Anticipation d'évènements exceptionnels ;
- Amélioration de la rapidité des calculs et de la qualité des prédictions.

Trois grandes composantes en interaction permanente



La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

La modélisation en océanographie

- Identification des échelles et paramètres pertinents ;
- Identification des phénomènes à modéliser ;
- Proposition de mécanismes expliquant ces phénomènes ;
- Proposition de systèmes simplifiés dont l'étude mathématique est possible : exemples :
  - courants marins à grande échelle
  - comportement près des côtes
  - tsunamis
  - déferlement des vagues

L'analyse mathématique théorique en océanographie

- Preuve du caractère « bien posé » des modèles (existence et unicité des solutions).
- Analyse asymptotique des modèles (quand des petits paramètres tendent vers zéro).
- Analyse de la stabilité des solutions stationnaires (« points d'équilibre » du système).
- Attention ! en général, pas de solution explicite (c'est-à-dire pas de formule), même pour les modèles simplifiés !
  Outils : théorème de point fixe (ex. Cauchy-Lipschitz), méthodes de compacité (construction d'une suite de solutions approchées...)

L'analyse mathématique théorique en océanographie

- Preuve du caractère « bien posé » des modèles (existence et unicité des solutions).
- Analyse asymptotique des modèles (quand des petits paramètres tendent vers zéro).
  Exemples de petits paramètres :
  - Rapport d'aspect : $\delta = \dfrac{D}{L}$ où
    - D= profondeur ; $D \sim 4\mathrm{km}$;
    - L= longueur horizontale typique ; $10^2\mathrm{km} \lesssim L \lesssim 10^4\mathrm{km}$.

    $\delta \ll 1$: approximation de couche mince ;
  - Nombre de Rossby : $Ro = \frac{U}{fL}$ où
    - U= vitesse horizontale typique ; $U \sim 1\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$;
    - $f = 2\Omega_0 \sin\theta$: paramètre de Coriolis ; $f \sim 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.

    $Ro \ll 1$: fluide en rotation rapide ;
  - Viscosité turbulente...
- Analyse de la stabilité des solutions stationnaires (« points

L'analyse mathématique théorique en océanographie

- Preuve du caractère « bien posé » des modèles (existence et unicité des solutions).
- Analyse asymptotique des modèles (quand des petits paramètres tendent vers zéro).
- Analyse de la stabilité des solutions stationnaires (« points d'équilibre » du système).
- Attention ! en général, pas de solution explicite (c'est-à-dire pas de formule), même pour les modèles simplifiés !
  Outils : théorème de point fixe (ex. Cauchy-Lipschitz), méthodes de compacité (construction d'une suite de solutions approchées...)

L'analyse numérique en océanographie

- Preuve de théorèmes justifiant que l'approximation numérique est pertinente ;
- Calcul effectif de solutions approchées des modèles ;
- Prédiction de comportements explosifs/instables ;
- Analyse de la dépendance en les paramètres ;
- Développement de codes plus précis ou plus rapides, se fondant sur l'analyse mathématique du système.

L'analyse numérique en océanographie

- Preuve de théorèmes justifiant que l'approximation numérique est pertinente ;
- Calcul effectif de solutions approchées des modèles ;
- Prédiction de comportements explosifs/instables ;
- Analyse de la dépendance en les paramètres ;
- Développement de codes plus précis ou plus rapides, se fondant sur l'analyse mathématique du système.

L'analyse numérique en océanographie

- Preuve de théorèmes justifiant que l'approximation numérique est pertinente ;
- Calcul effectif de solutions approchées des modèles ;
- Prédiction de comportements explosifs/instables ;
- Analyse de la dépendance en les paramètres ;
- Développement de codes plus précis ou plus rapides, se fondant sur l'analyse mathématique du système.

L'analyse numérique en océanographie

- Preuve de théorèmes justifiant que l'approximation numérique est pertinente ;
- Calcul effectif de solutions approchées des modèles ;
- Prédiction de comportements explosifs/instables ;
- Analyse de la dépendance en les paramètres ;
- Développement de codes plus précis ou plus rapides, se fondant sur l'analyse mathématique du système.

L'analyse numérique en océanographie

- Preuve de théorèmes justifiant que l'approximation numérique est pertinente ;
- Calcul effectif de solutions approchées des modèles ;
- Prédiction de comportements explosifs/instables ;
- Analyse de la dépendance en les paramètres ;
- Développement de codes plus précis ou plus rapides, se fondant sur l'analyse mathématique du système.

Plan

Les protagonistes

- **Les inconnues :**
  - vitesse des courants marins $\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$ au temps t au point $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *(on ne suit pas les particules)* ;
  - pression $p(t, \overrightarrow{x})$;
  - densité $\rho(t, \overrightarrow{x})$;
  - température $\theta(t, \overrightarrow{x})$;
  - salinité $S(t, \overrightarrow{x})$ (concentration en sel).
- **Équations du mouvement :** expriment la conservation locale de la masse, de la quantité de mouvement (principe fondamental de la dynamique), de l'énergie.
- Pour les modèles à densité variable : équation d'état pour fermer le système.

Cas le plus “simple” : équation des fluides tournants

Simplifications : $\rho \equiv \rho_0$, $\not\theta$, $\not S$.

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \vec{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{2\rho_0 \vec{u} \wedge \vec{\Omega}}_{\text{force de Coriolis}} \\ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} , \end{array}\right.$$

(Euler, 1755)

Variante : ajout d'un terme de dissipation (pertes d'énergie en raison de phénomènes turbulents) : $\nu_h \partial^2_{x_1} \vec{u} + \nu_h \partial^2_{x_2} \vec{u} + \nu_3 \partial^2_{x_3} \vec{u}$

.

Cas le plus “simple” : équation des fluides tournants

Simplifications : $\rho \equiv \rho_0$, $\not\theta$, $\not S$.

$$\begin{cases} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \vec{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{2\rho_0 \vec{u} \wedge \vec{\Omega}}_{\text{force de Coriolis}} \\ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} , \end{cases}$$

(Euler, 1755)

Variante : ajout d'un terme de dissipation (pertes d'énergie en raison de phénomènes turbulents) : $\nu_h \partial_{x_1}^2 \vec{u} + \nu_h \partial_{x_2}^2 \vec{u} + \nu_3 \partial_{x_3}^2 \vec{u}$

.

Cas le plus "simple" : équation des fluides tournants

Simplifications : $\rho \equiv \rho_0$, $\not{\theta}$, $\not{S}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \vec{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{2\rho_0 \vec{u} \wedge \vec{\Omega}}_{\text{force de Coriolis}} \\ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} \quad , \end{array} \right.$$

(Euler, 1755)

Variante : ajout d'un terme de dissipation (pertes d'énergie en raison de phénomènes turbulents) : $\nu_h \partial^2_{x_1} \vec{u} + \nu_h \partial^2_{x_2} \vec{u} + \nu_3 \partial^2_{x_3} \vec{u}$

.

Cas le plus “simple” : équation des fluides tournants

Simplifications : $\rho \equiv \rho_0$, $\not\theta$, $\not S$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{u}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla} p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 \overrightarrow{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{2\rho_0 \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\Omega}}_{\text{force de Coriolis}} \\ \underbrace{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0}_{\text{incompressibilité}} \quad , \end{array} \right.$$

(Euler, 1755)

Variante : ajout d’un terme de dissipation (pertes d’énergie en raison de phénomènes turbulents) : $\nu_h \partial^2_{x_1} \overrightarrow{u} + \nu_h \partial^2_{x_2} \overrightarrow{u} + \nu_3 \partial^2_{x_3} \overrightarrow{u}$

.

Un cas plus compliqué : modèle compressible avec salinité et température

- **Conservation de la masse :**

$$\partial_t \rho + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{u}) = 0;$$

- **Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\partial_t(\rho \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{\nabla} p + 2\rho \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\Omega} + \rho \overrightarrow{g};$$

- **Conservation de l'énergie :**

$$\rho C_p \partial_t \theta + \rho C_p \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \theta + p \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = k_T \Delta T;$$

- **Transport-diffusion de la salinité :**

$$\rho \partial_t S + \rho \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} S = k_S \Delta S.$$

- **Équation d'état :**

$$p = P(\rho, S, \theta).$$

Et plein d'autres...

- **Équations des vagues :** fluide incompressible, homogène, à surface libre. Équation pour la surface du fluide.
- **Modèle de type Boussinesq :** fluide incompressible, couplage entre vitesse et stratification.
- **Équations primitives :** approximation hydrostatique $\partial_{x_3} p = -\rho g e_3$.
- **Système quasi-géostrophique** : réduction à deux dimensions.

etc.
Chacun de ces modèles est pertinent à une échelle temporelle/spatiale donnée, dans un certain régime, pour décrire un phénomène précis.

État de l'art

- **Système des fluides tournants** (avec viscosité) :
  - Existence/unicité de solutions ;
  - Comportement asymptotique quand $Ro \ll 1$;
  - Prise en compte des bords (géométries simples, loin de l'équateur) ;
  - Résultats partiels près de l'équateur.
- **Système compressible :**
  - Pour certaines lois de pression (pas réalistes !) : existence/unicité des solutions, comportement asymptotique ;
  - ? Prise en compte des bords ?
  - ? Prise en compte d'une équation d'état réaliste ?

Enjeux futurs

- Élaboration des modèles complexes : couplage océan-atmosphère (vent, évaporation), propriétés du fluide (salinité, température) ;
- Prise en compte de géométries réalistes ;
- Compréhension de phénomènes exceptionnels à l'aide de méthodes statistiques : calcul du mouvement moyen (turbulence) et de la déviation.

Conclusions

- Domaine très riche du point de vue des mathématiques ;
- Interactions nombreuses ;
- Enjeux humains importants.

Prochain exposé : quelques exemples de travaux mathématiques dans ce domaine.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !