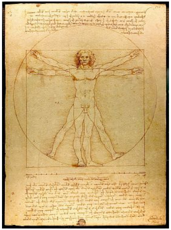
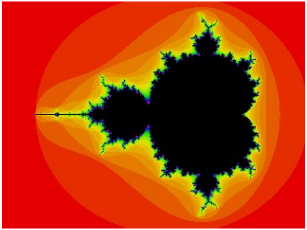
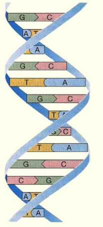
Possibles et impossibles en mathématiques

Cyril Banderier (CNRS / Univ. Paris Nord)

Centre International de Rencontres Mathématiques,
Marseille, 5 novembre 2019.
Conférence grand public dans le cadre des Journées dédiées à Christian Mauduit (1959-2019)

Transparents disponibles : `http://lipn.fr/~banderier/`

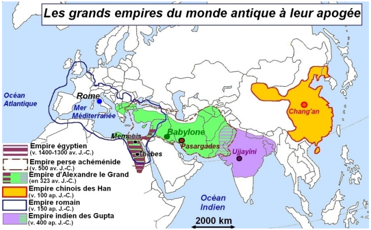





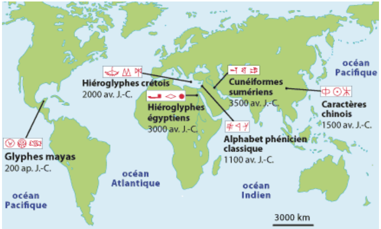
Est-ce qu'on faisait des maths à la préhistoire ?

-200 000 ans : homo sapiens (nous !)
-18 000 : Lascaux, les os d'Ishango
-10 000 : cuivre, sédentarisation, Mésopotamie
-4 000 : premières grandes citées, roue

Leurs mathématiques : compter « en base 1 »(vote des délégués de classe !)

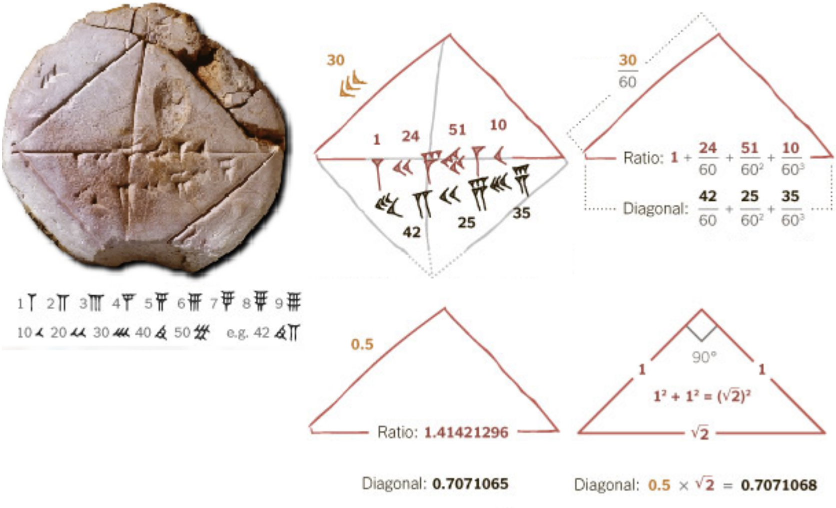
Base 10, base 2 (ordinateur), base 20 (Celtes, Mayas), base 60 (Babyloniens).





Oui, oui, oui !
Des jolies mathématiques !
Pour : calendrier, astronomie, géométrie (mesure de la terre), architecture, impôts, héritages. . .

Babylone et $\sqrt{2}$



Tablette (datant de -1800, à Babylone), en écriture "cunéiforme" = en forme de coin

Pythagore (-569, -475) :
"Tout est harmonie, tout est *rapport*, tout est fraction."

("4 apprentissages" = géométrie, nombres, astronomie, musique = les mathématiqueS)

Pythagore (-569, -475) :
"Tout est harmonie, tout est *rapport*, tout est fraction."

("4 apprentissages" = géométrie, nombres, astronomie, musique = les mathématiqueS)

Scandale : la diagonale du carré n'est pas un rapport (pas une "fraction") !

Théorème : $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve (Euclide ≈ -300, "reductio ad adsurbum") : On suppose $\sqrt{2} = p/q$ (irréductible)

$$\sqrt{2} = p/q \quad \Rightarrow 2 = p^2/q^2 \quad \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2p')^2 \quad \Rightarrow q^2 = 2p'^2 \quad \Rightarrow q \text{ est aussi pair}$$

⇒ impossible car p/q était irréductible, donc la supposition était fausse ! CQFD.

Pythagore (-569, -475) :
"Tout est harmonie, tout est *rapport*, tout est fraction."

("4 apprentissages" = géométrie, nombres, astronomie, musique = les mathématiqueS)

Scandale : la diagonale du carré n'est pas un rapport (pas une "fraction") !

Théorème : $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Preuve (Euclide ≈ -300, "reductio ad adsurbum") : On suppose $\sqrt{2} = p/q$ (irréductible)

$$\sqrt{2} = p/q \qquad \Rightarrow 2 = p^2/q^2 \qquad \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2p')^2 \qquad \Rightarrow q^2 = 2p'^2 \qquad \Rightarrow q \text{ est aussi pair}$$

⇒ impossible car p/q était irréductible, donc la supposition était fausse ! CQFD.

Hippase de Métaponte : tué (ou noyé ?) pour avoir divulgué ce secret !

Trouver tous les entiers qui vérifient $a^2+b^2=c^2$. $(3^2+4^2=5^2$, $6^2+8^2=10^2$,

Trouver tous les entiers qui vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. $(3^2 + 4^2 = 5^2,\ 6^2 + 8^2 = 10^2,$
$5^2 + 12^2 = 13^2, \ldots)$
Réponse : $a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad c = p^2 + q^2$

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient $a^3 = b^3 + c^3$.

Trouver tous les entiers qui vérifient $a^2+b^2=c^2$. $(3^2+4^2=5^2, 6^2+8^2=10^2, 5^2+12^2=13^2, \ldots)$
Réponse : $a=p^2-q^2, \quad b=2pq, \quad c=p^2+q^2$

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient $a^3=b^3+c^3$.
Réponse : il n'y en a pas ! ! !

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient $a^n=b^n+c^n$.

De Babylone à la conjecture de Fermat

Trouver tous les entiers qui vérifient $a^2+b^2=c^2$. $(3^2+4^2=5^2$, $6^2+8^2=10^2$, $5^2+12^2=13^2, \ldots)$
Réponse : $a=p^2-q^2, \quad b=2pq, \quad c=p^2+q^2$

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient $a^3=b^3+c^3$.
Réponse : il n'y en a pas ! ! !

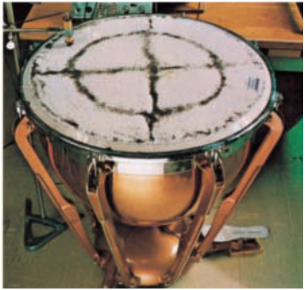
Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient $a^n=b^n+c^n$.
Réponse : (conjecture de Fermat : il n'y en a pas ! ! !)

"Graal" des mathématiciens, finalement prouvé par Wiles en 1994.
Aucune application directe, mais a obligé à créer de nouvelles mathématiques, elles, fondamentales (théorie des anneaux, courbes elliptiques) qui ont une application pour les codes secrets !

Le mystérieux monsieur Leblanc

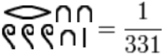


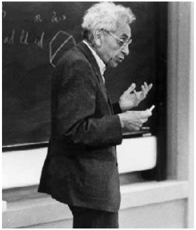
Lettre de Gauss (1777-1855) à monsieur Leblanc
Travaux de Sophie Germain (1776-1831) : "peut-on entendre la forme d'un tambour ?"



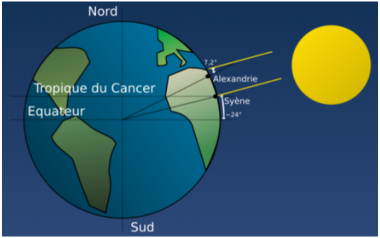
Scribe Ahmès (≈ -1540) et son papyrus "Rhind" : multiplication, division, arpentage.

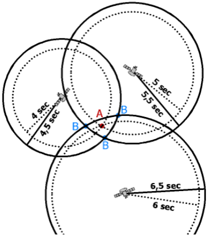




Conjecture des fractions égyptiennes :
on peut toujours trouver 3 entiers a, b, c tels que
$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Paul Erdős (1913-1996), 1500 articles !
(réseau sociaux : distance d'Erdős).

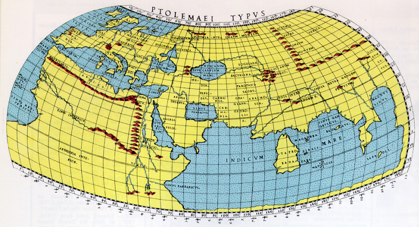


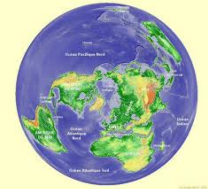


Ératosthène (-276, -194) : conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, précepteur du pharaon. Il se laissa mourir de faim, parce que, devenu aveugle, il ne pouvait plus admirer les étoiles.

- crible d'Érathostène pour les nombres premiers (2,3,5,7,11,13,17,19, . . ., $2^{82589933} - 1$, . . .).
- problème déliaque (peste à Délos : doubler la taille de l'autel)
- circonférence de la Terre : 787,5 km x 50 = 39 375 km
  (valeur très proche de la réalité : 1,7% d'écart !)

Cartographie





Cartes de géographie (Ptolémée, Mercator)

distances en avion : 9 381 km, 10 300 km, 11 900 km

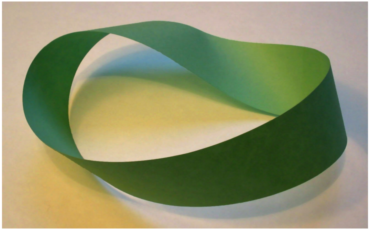
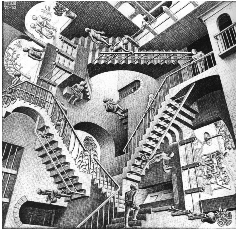
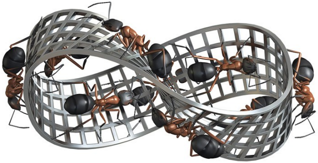
géométrie "non-euclidienne" (deux droites parallèles se croisent !)

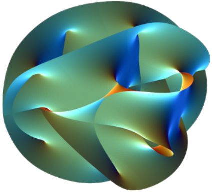
plus que $>$ 3 dimensions... (théorie des cordes), `http://images.math.cnrs.fr/`

Peut-on avoir un objet avec une seule face ?

La forme de l'univers : la topologie

Peut-on avoir un objet avec une seule face ?



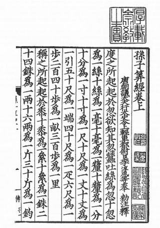
Oui ! Le ruban de Möbius (1790-1868)
$\rightsquigarrow$ dessins de Maurits Cornelis Escher (1898-1972)

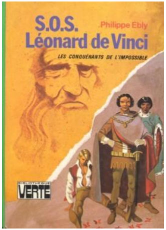
La géométrie de l'univers : plus de 4 dimensions ? variétés de Calabi-Yau ?

Quand le pape fait des maths...

Le pape Grégoire XIII change le calendrier !

- début de l'année au premier janvier (son jour d'anniversaire !) [octobre, novembre, décembre]
- Le 9 décembre 1582 est suivi par le 20 décembre 1582.
- bissextile : $n \bmod 4$, sauf $n \bmod 100$ sauf $n \bmod 400$ $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425$ jours
- La Révolution d'Octobre a eu lieu en novembre !
  (car réforme adoptée tardivement en Russie, en 1918)


孫子算經卷上
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋
度之所起起於忽欲知其忽蠶吐絲爲忽十忽
爲一絲十絲爲一毫十毫爲一氂十氂爲一分
十分爲一寸十寸爲一尺十尺爲一丈十丈爲
一引五十尺爲一端四十尺爲一疋六尺爲一
步二百四十步爲一畝三百步爲一里
稱之所起起於黍十黍爲一絫十絫爲一銖二
十四銖爲一兩十六兩爲一斤三十斤爲一鈞



Sun Zi (Chine, vers l'an 300) : "théorèmes des restes chinois"

Combien l'armée comporte-t-elle de soldats si,
rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats,
rangés par 5 colonnes, il reste trois soldats et,
rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ?

$$\begin{cases} n \mod 3 = 2 \\ n \mod 5 = 3 \\ n \mod 7 = 2 \end{cases}$$

réponse : $n = 23$ modulo 105

Le paradoxe du nénufar

Chaque jour le volume d'un nénufar double sur l'étang, il occupe la moitié de l'étang en 10 jours.
Au bout de combien de jours occupe-t-il tout l'étang ?

Réponse : ...


Chaque jour le volume d'un nénufar double sur l'étang, il occupe la moitié de l'étang en 10 jours.
Au bout de combien de jours occupe-t-il tout l'étang ?

Réponse : ... 11 jours.

On a mis 10 000 ans à épuiser la moitié des ressources de notre planète.
Chaque année, notre besoin double.
Il nous reste des ressources pour combien d'années ?

Réponse :


Chaque jour le volume d'un nénufar double sur l'étang, il occupe la moitié de l'étang en 10 jours.
Au bout de combien de jours occupe-t-il tout l'étang ?

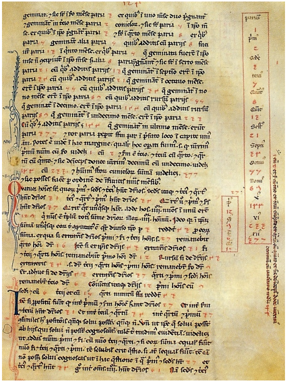
Réponse : ... 11 jours.

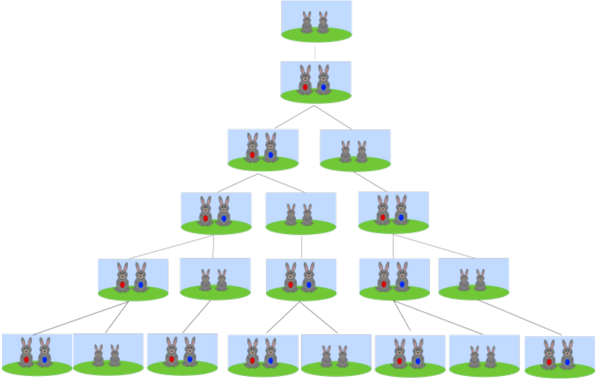
On a mis 10 000 ans à épuiser la moitié des ressources de notre planète.
Chaque année, notre besoin double.
Il nous reste des ressources pour combien d'années ?

Réponse : 1 seule année !

On parle de croissance "exponentielle" (ça double à chaque fois), ça va très vite !

La suite de Fibonacci et le nombre d'or





Leonardo Fibonacci (1175-1250) dans son *Livre des abaques* (calculs) popularise les chiffres arabes < cifra < al sifr = vide = le zéro.

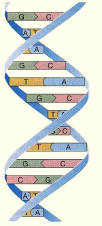
Problème : Les lapins deviennent adultes en un mois, et ont alors chaque mois un couple de bébé. Combien de couples de lapins au bout de 2 ans ?

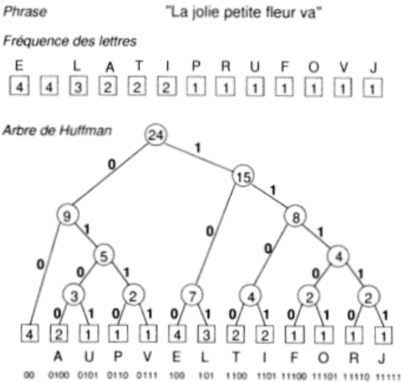
f_n = le nombre de couples après n mois ; $f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, \dots$.

récurrence : $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, lien avec le nombre d'or :

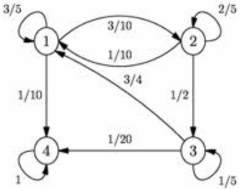
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} \qquad f_n = \frac{\phi^{n+1} + 1/\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} \approx 1,61^n$$

[Film de Cristóbal Vila]





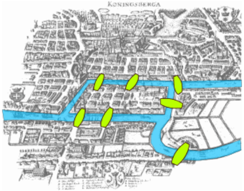
La compression des fichiers (.zip, .rar, .mp3, .pdf), le séquençage de l'ADN, le dépistage de maladie génétique, la recherche d'un mot dans un texte reposent sur des modèles proches.

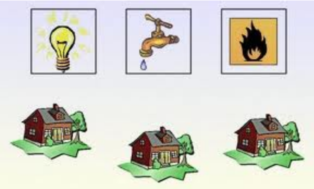


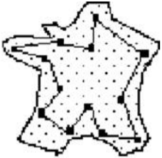
Les chaînes de Markov (Markov, 1906) permettent de modéliser de nombreuses dépendances, apparentes ou cachées.

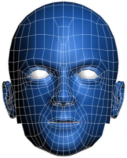
Les automates cellulaires sont une généralisation qui semblent pouvoir coder des colonies de bactéries. [vidéo]

La théorie des graphes








- problème des 7 ponts de Königsberg [Leonhard Euler (1707-1783)]
- théorème des 4 couleurs (1976) : toute carte peut être coloriée avec 4 couleurs
- problème du graphe sans liens qui se croisent (eau / gaz / électricité)
- problème du voyageur de commerce (plus court chemin : 1 million de dollars "P=NP ?")

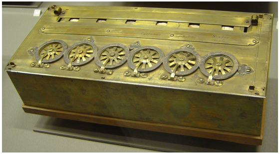
`http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/`

Applications : optimisation du trafic ferroviaire, phénomène petit monde (Milgram 1967), réseaux sociaux (facebook), téléphones portables, internet, google : ordre des liens, jeux vidéos (images de synthèse)

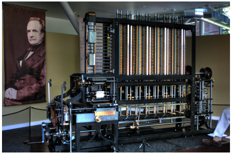
Les ancêtres des ordinateurs : il y a deux siècles

engrenage en bronze de la machine d'Anticythère, construite par Archimède (-287 à -212)
un incroyable planétarium (mentionné dans les écrits de Cicéron !).

Les ancêtres des ordinateurs

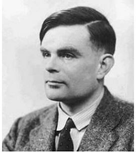


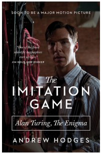


- la machine d'Anticythère (-212) : planétarium d'Archimède
- la Pascaline (1645) : Blaise Pascal (1623-1662) pour aider papa, puis crée la théorie des probabilités
- orgues de barbarie ($\approx$ 1690) : musique sur cartes perforées
- automates : canard qui fait caca de Jacques de Vaucanson (1709-1782)
- métier Jacquard (tissage 1801, révolte des canuts en 1831)
- machine de Babbage (1849)

Le premier programmeur du monde... était une femme !
Ada Lovelace (1815-1852, fille de Lord Byron) calcule les nombres de Bernoulli

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = b_n \pi^{2n}$$

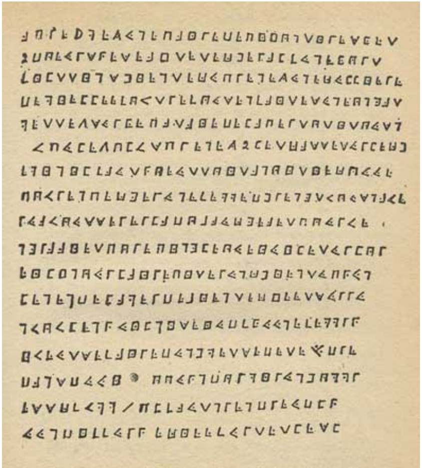




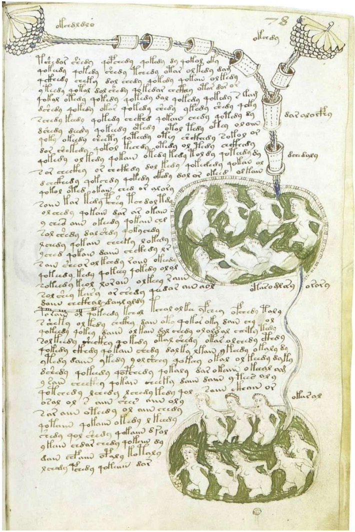
Alan Turing (1912-1954) :

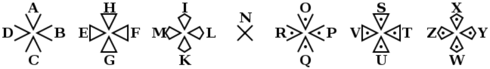
- 1936 : machines de Turing, indécidabilité de l'arrêt,
- guerre : casse le code secret des Nazis (Enigma), premiers ordinateurs
- 1949 : construction d'un des premiers ordinateurs, preuve de correction de programmes
- 1950 : test de Turing pour définir l'intelligence artificielle
- 1952 : programme de jeu d'échecs
- 1952 : morphogénèse
- 1954 : suicide (suite à son procès pour homosexualité) en mangeant une pomme empoisonnée au cyanure

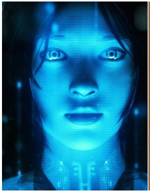


« Cryptogramme du Forban » trouvé à l'île Mahé. C'est un message chiffré, lancé dans la foule par le pirate La Buse montant au supplice, qui révélerait l'emplacement de ses trésors (ph. Bibl. Nat.).

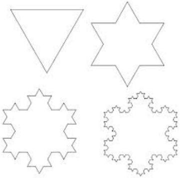


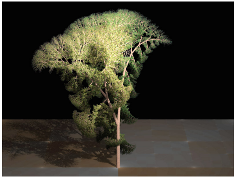
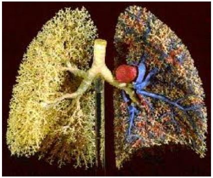
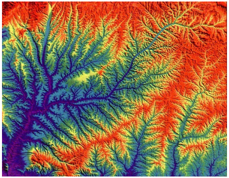


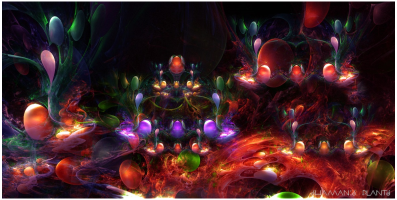
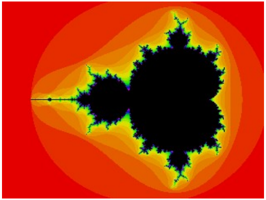


Méthodes d'apprentissage (par "essai et erreur") pour :
jeu de go, échecs, Starcraft, poker, filtrer les spams, reconnaissance faciale, marketing, . . .

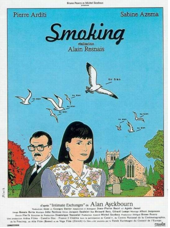


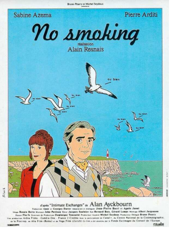


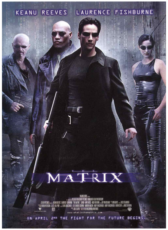




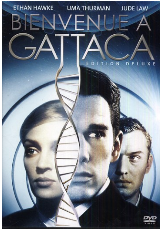




fractales = pas lisse + propriétés d'auto-similarité [voir exemples google Earth]
Applications : Mandelbrot $y_{n+1} = y_n^2 + z$ donne la hauteur des arbres binaires $B = B^2 + z$ (Flajolet)



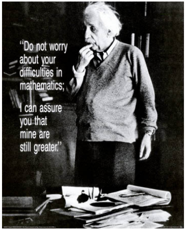






Diderot (1784) : Jacques le fataliste. « Si tout est écrit là-haut, où est notre choix ? »

Laplace (1814) : *« Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation des êtres qui la composent, si elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »*



Principe d'incertitude d'Heisenberg (1927) :
« Y'a des probas en physique des particules ! »

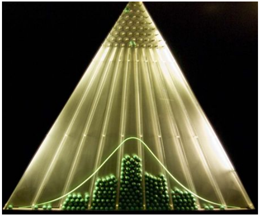
Albert Einstein : *« Dieu ne joue pas aux dés. »*
Niels Bohr : *« Einstein, cessez de dire à Dieu ce qu'il doit faire ! »*


aléatoires = alea = les dés en latin.

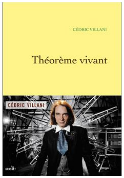
Pourquoi on ne peut pas prédire la météo dans 15 jours, alors qu'on peut prévoir le climat dans un siècle ?

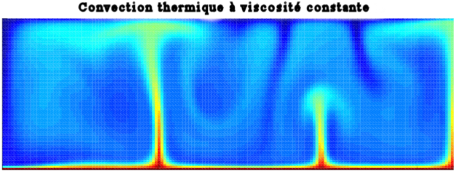
aléatoires = alea = les dés en latin.

Pourquoi on ne peut pas prédire la météo dans 15 jours,
alors qu'on peut prévoir le climat dans un siècle ?
La somme de beaucoup de hasard devient "régulière" et a donc des caractéristiques prévisibles !

 [film]

Équations différentielles : fondamentales en physique



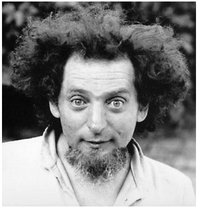


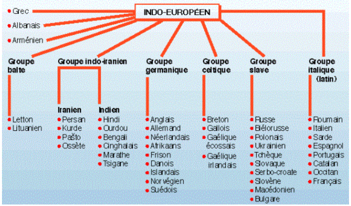
De Newton à Pierre-Louis Lions et son étudiant en thèse Cédric Villani (médailles Fields 1994 & 2010) : équations avec des dérivées de fonctions à plusieurs variables (fondamentales en physique, mouvement des fluides)

équations souvent "impossibles" à résoudre : comportement à "long terme" ?,
simulations numériques (méthode Monte-Carlo de Von Neumann pour la bombe atomique en 1945)

stabilité du système solaire (problème des 3 corps) [vidéo]
sensibilité aux conditions initiales, théorie du chaos, météo (effet papillon)

Eugene Wigner (1902-1995) : "La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles"

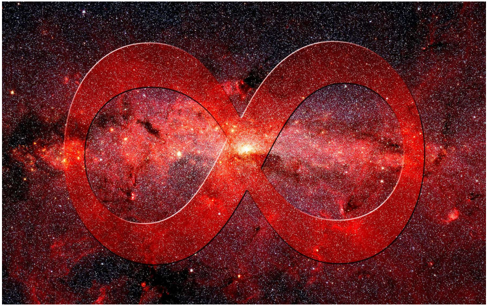



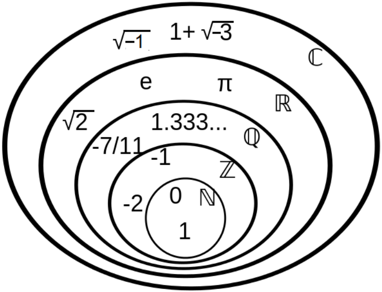


Structuralisme : Bourbaki en maths, Lévy-Strauss en ethnologie.
Aborigènes en Australie : "Tout homme peut épouser la fille du frère de sa mère" (permutations, théorie des groupes)

Oulipo (ouvroir de littérature potentielle) : on joue avec une contrainte pour produire un texte
"La vie mode d'emploi" de Georges Perec (1932-1982)
"La disparition" (roman sans "e")

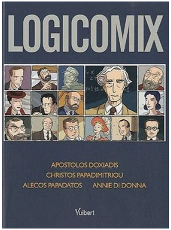
Noam Chomsky (1928-) et Marcel-Paul Schützenberger (1920-1996)
théorie des langages humain : $P \longrightarrow$ Sujet Verbe Complément
langage informatique : $P \longrightarrow$ begin if A then B else C end

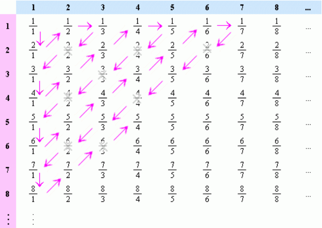


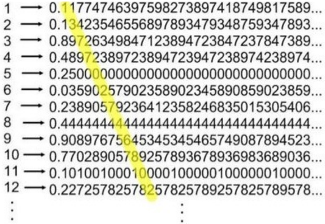


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Il existe plusieurs types d'infinis !







On dit que deux ensembles infinis ont la même taille si on peut "marier" tous leurs éléments.

- Donc... il y a "autant" de nombre pairs que d'entiers ! ($\#\mathbb{N} = \#2\mathbb{N}$)
- Donc... il y a "autant" de fractions que d'entiers ! ($\#\mathbb{N} = \#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{Q}$)
- Il y a plus de réels que d'entiers ! ($\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$)
- il y a autant de point dans sur un segment que dans un carré. ($\#\mathbb{R} = \#\mathbb{R}^2$)
  Cantor, 1877 : "Je le vois, mais je ne le crois pas".
- On peut prouver des propriétés étonnantes $\#\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$ et $(2^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}} = (2^{\mathbb{R}})$.
- On ne peut pas prouver si $\#\mathbb{N} < \#E < \#\mathbb{R}$. "L'hypothèse du continu est indécidable." Les règles des maths ne permettent pas de dire si aleph 1 est aussi grand que l'ensemble des nombres réels.

Questions, discussions. . .