Popopo - posets, polynônes, polytopes

Kolja Knauer
LIS, Aix-Marseille Université

École jeunes chercheuses en informatique mathématique
(06/02/2019)

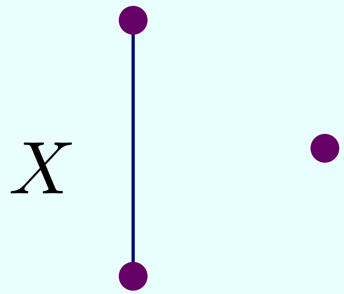
Popopo - posets, polynônes, polytopes

Kolja Knauer
LIS, Aix-Marseille Université

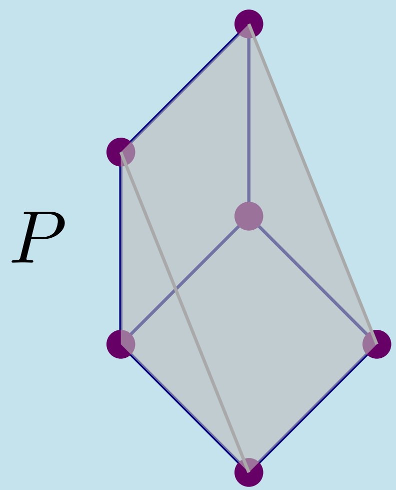
École jeunes chercheuses en informatique mathématique
(06/02/2019)

Popopo - posets, polynômes, polytopes

Kolja Knauer
LIS, Aix-Marseille Université



$$\Omega_X(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$$



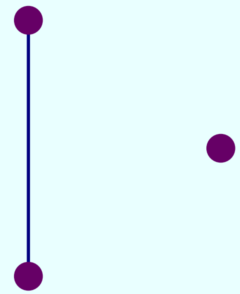
$$L_P(t) = b_n t^n + \ldots + b_1 t + b_0$$

École jeunes chercheuses en informatique mathématique
(06/02/2019)

Popopo - posets, polynômes, polytopes

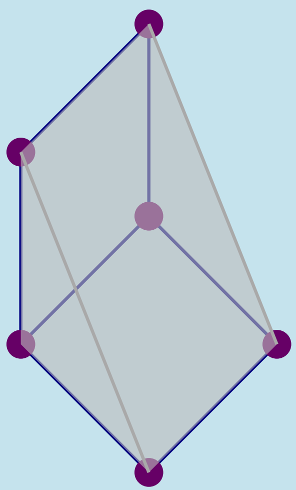
Kolja Knauer
LIS, Aix-Marseille Université

X



$$\Omega_X(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$$

P



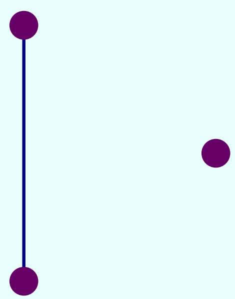
$$L_P(t) = b_n t^n + \ldots + b_1 t + b_0$$

École jeunes chercheuses en informatique mathématique
(06/02/2019)

Popopo - posets, polynômes, polytopes

Kolja Knauer
LIS, Aix-Marseille Université

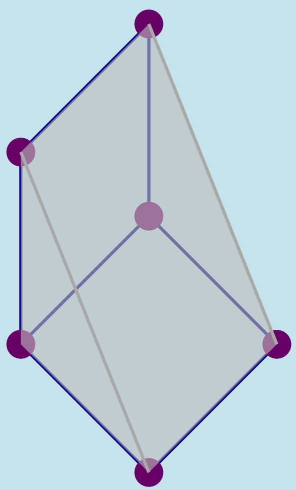
X



$$\Omega_X(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$$

$$\Vert$$

P

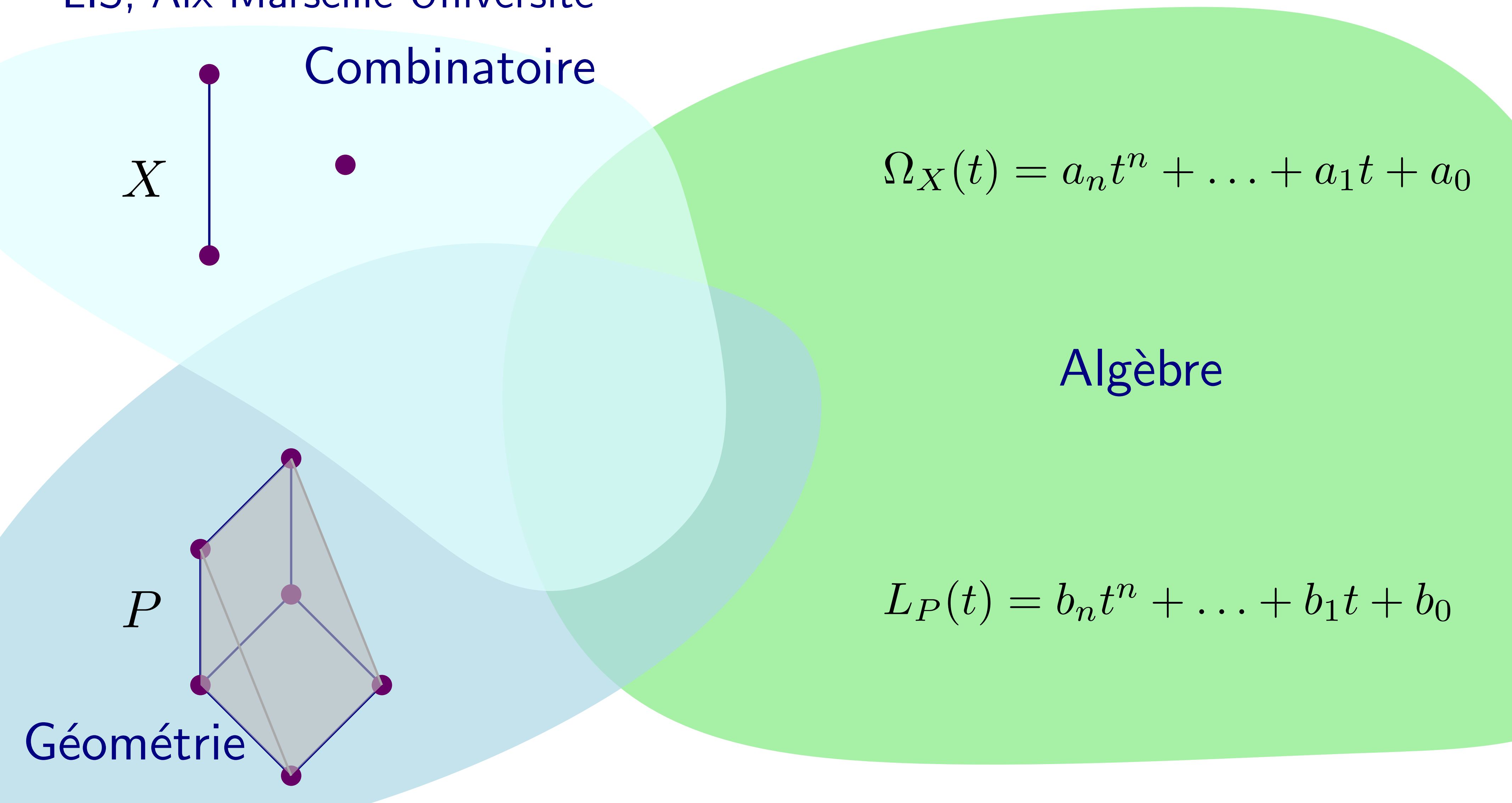


$$L_P(t) = b_n t^n + \ldots + b_1 t + b_0$$

École jeunes chercheuses en informatique mathématique
(06/02/2019)

Popopo - posets, polynômes, polytopes

Kolja Knauer
LIS, Aix-Marseille Université



École jeunes chercheuses en informatique mathématique
(06/02/2019)

Posets

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

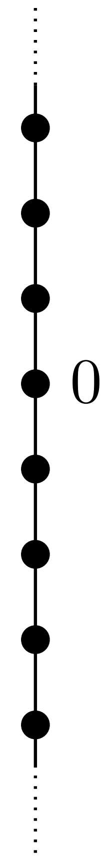
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)



exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^2, \leq)$, $(\mathbb{Z}^2, \leq)$, $(\mathbb{Q}^2, \leq)$, $(\mathbb{R}^2, \leq)$
  où $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$

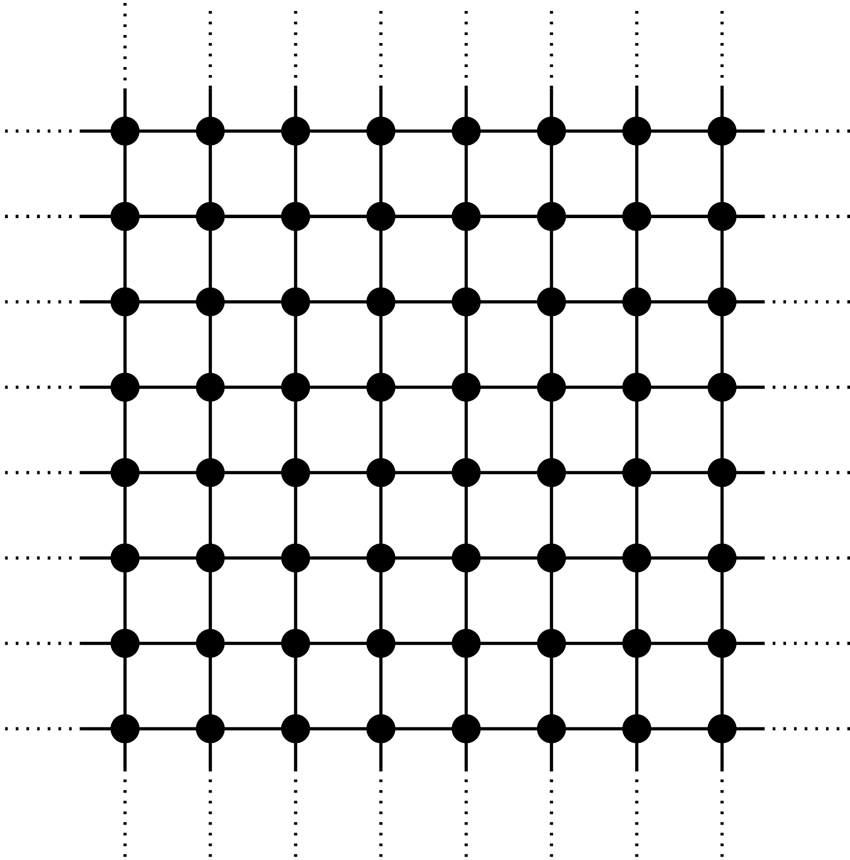
Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^2, \leq)$, $(\mathbb{Z}^2, \leq)$, $(\mathbb{Q}^2, \leq)$, $(\mathbb{R}^2, \leq)$
  où $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$



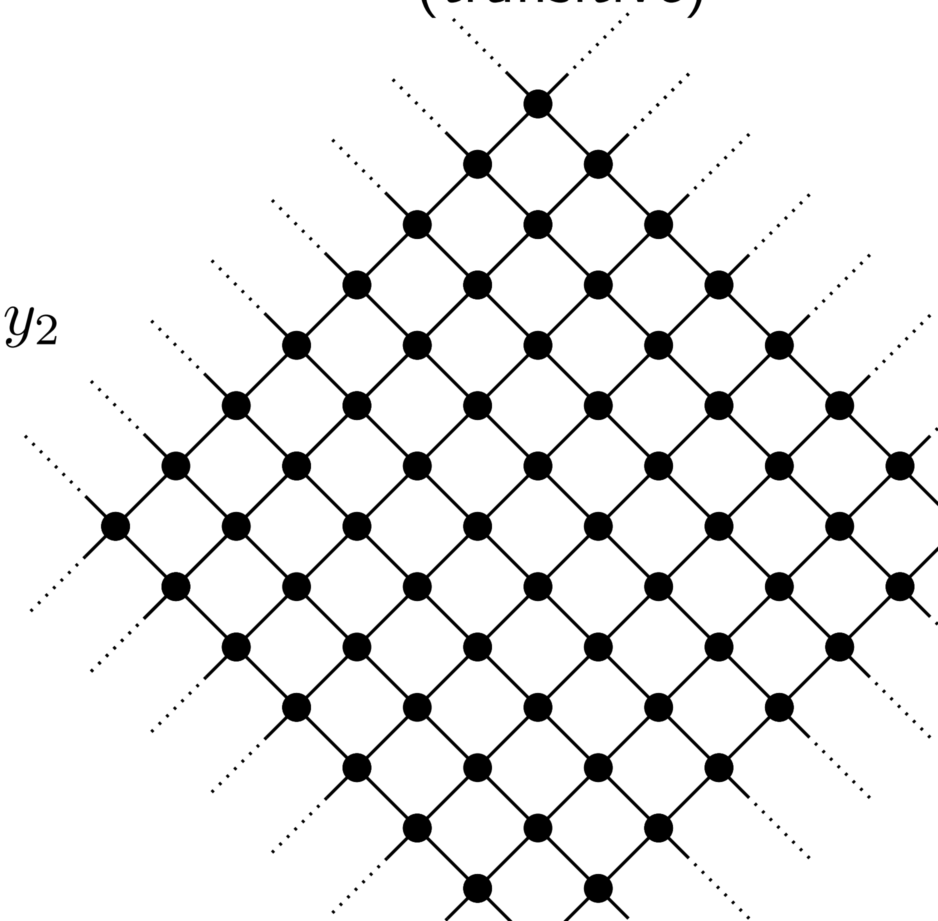
Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^2, \leq)$, $(\mathbb{Z}^2, \leq)$, $(\mathbb{Q}^2, \leq)$, $(\mathbb{R}^2, \leq)$
  où $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$



Posets

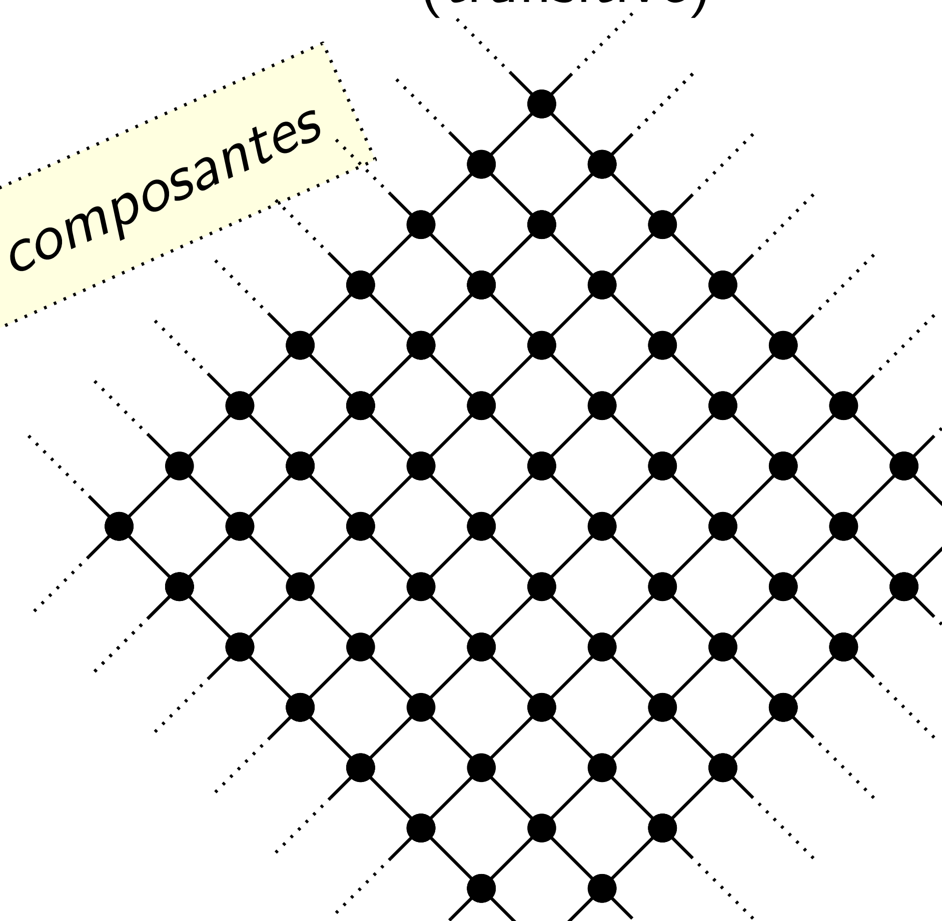
un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes



Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

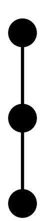
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$



la chaîne C_3 de longeur 3

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

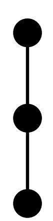
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

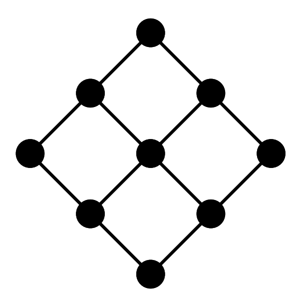
ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$



la chaîne C_3 de longeur 3



Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

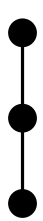
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

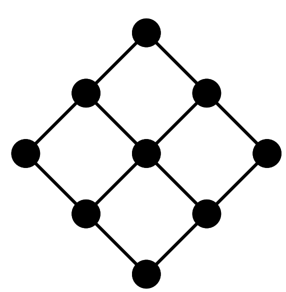
ordre par composantes

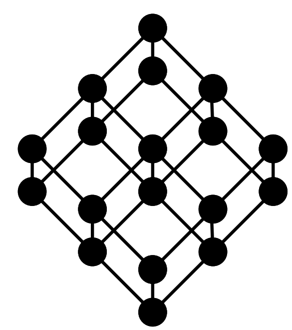
ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$



la chaîne C_3 de longeur 3





Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- $(\{S \mid S \subseteq \{1,2,3\}\}, \subseteq) = (\mathcal{P}_3, \subseteq)$

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

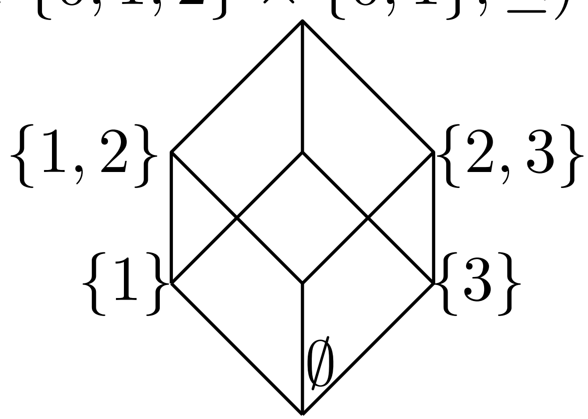
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- $(\{S \mid S \subseteq \{1,2,3\}\}, \subseteq) = (\mathcal{P}_3, \subseteq)$



Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

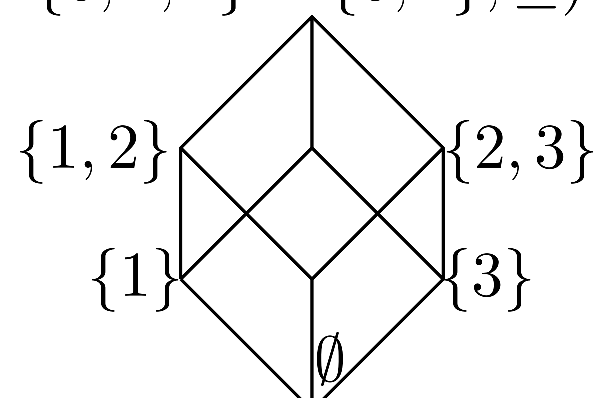
- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- $(\{S \mid S \subseteq \{1,2,3\}\}, \subseteq) = (\mathcal{P}_3, \subseteq)$

$(\{0,1\}^3, \leq) \cong$



Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

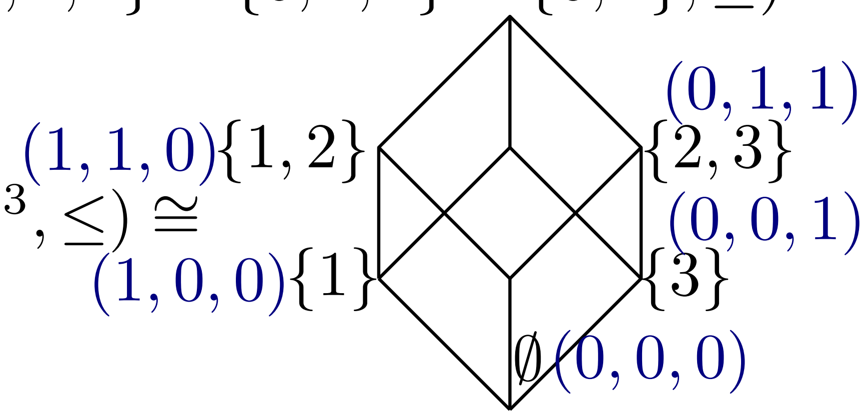
- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- $(\{S \mid S \subseteq \{1,2,3\}\}, \subseteq) = (\mathcal{P}_3, \subseteq)$

$(\{0,1\}^3, \leq) \cong$



Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset et si $\chi(S) = (x_1, \ldots, x_n)$ tq $x_i = 1$ si $i \in S$ et 0 sinon, donc $(M, \subseteq) \cong (\{\chi(S) \mid S \in M\}, \leq)$

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

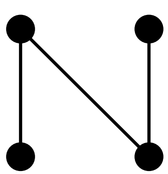
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*



le N

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

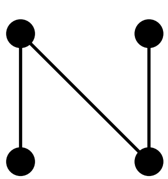
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*



le N

la chaîne

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

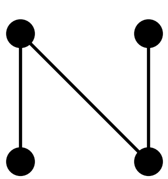
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*



le N

la chaîne

l'anti-chaîne

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

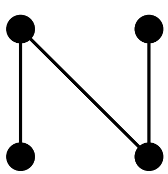
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

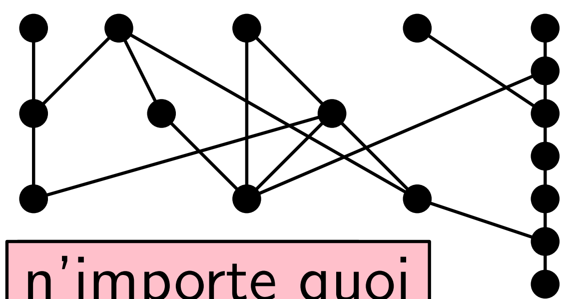
- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*



le N

la chaîne

l'anti-chaîne



n'importe quoi

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

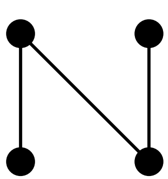
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

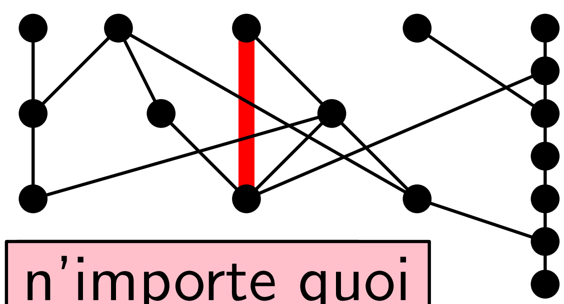
- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*



le N

la chaîne

l'anti-chaîne



n'importe quoi

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

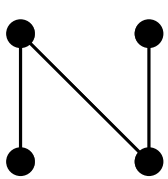
exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

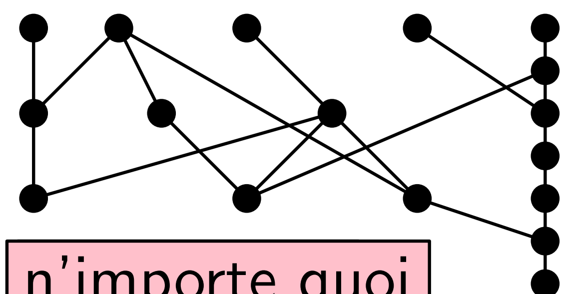
ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*


le N


la chaîne


l'anti-chaîne


n'importe quoi

Posets

un poset/**P***artially* **O***rdered* **SET**/ensemble partiellement ordonné est une *couple* $P = (X, \leq)$, d'un ensemble X est une relation binaire telle que :

1. $x \leq x$ (réfléxive)
2. $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$ (anti-symmétrique)
3. $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$ (transitive)

exemples :

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{N}^d, \leq)$, $(\mathbb{Z}^d, \leq)$, $(\mathbb{Q}^d, \leq)$, $(\mathbb{R}^d, \leq)$
  où $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$
  si $x_1 \leq y_1, \ldots, x_d \leq y_d$

ordre par composantes

ordres finis

- $(\{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq)$, $(\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}, \leq)$
- si $M \subseteq \mathcal{P}(n)$ alors $(M, \subseteq)$ poset
- en partant du *diagramme de Hasse*

un exemple de la vie

Ma liste de choses à faire

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

Polynôme d'ordre

Polynôme d'Ehrhart

Dimension d'un poset

Polytope d'ordre

Extensions linéaires

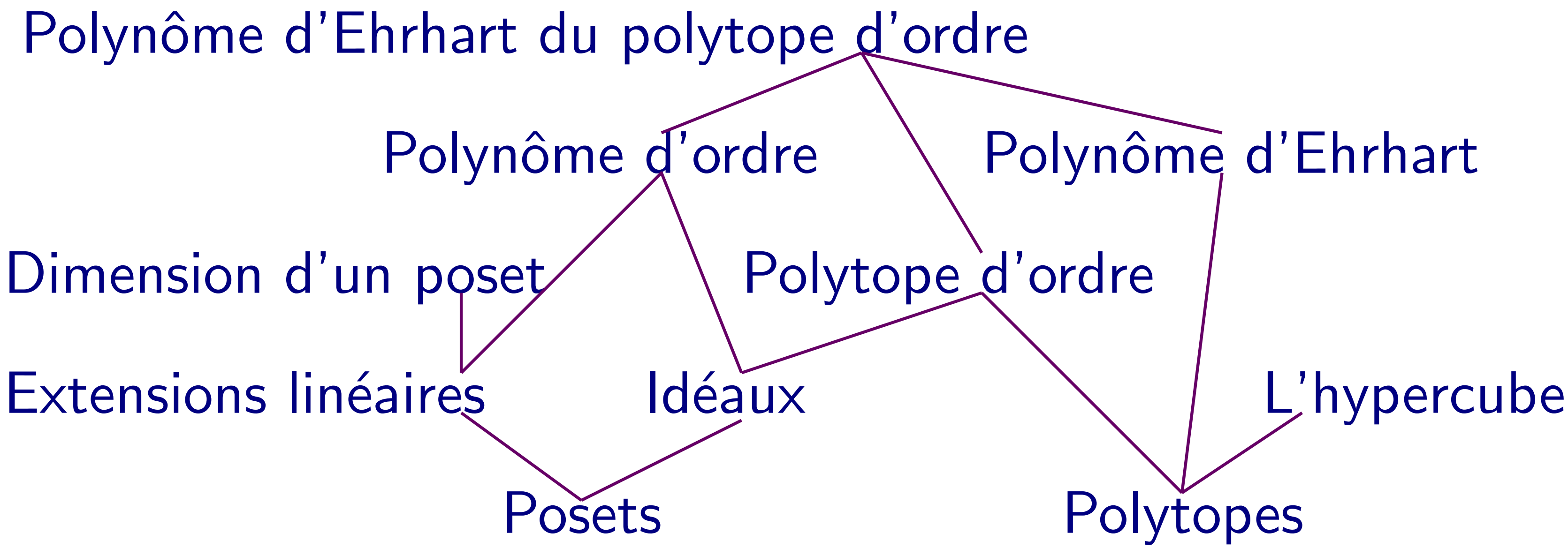
Idéaux

L'hypercube

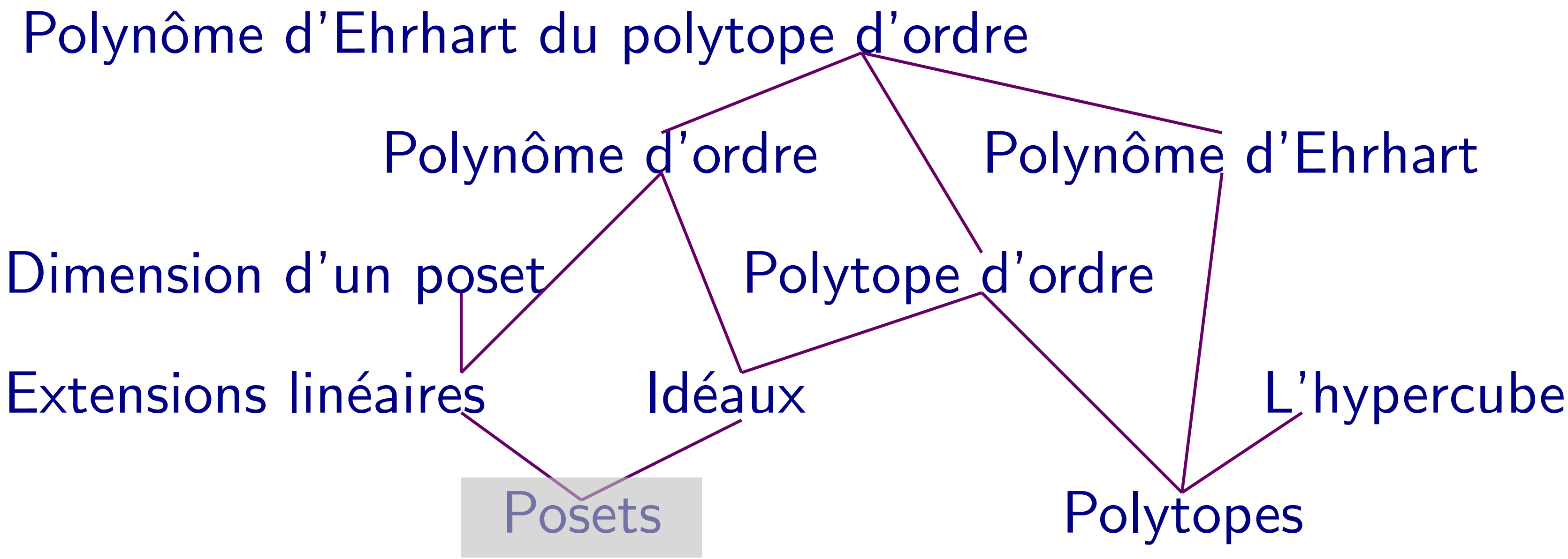
Posets

Polytopes

Ma liste de choses à faire

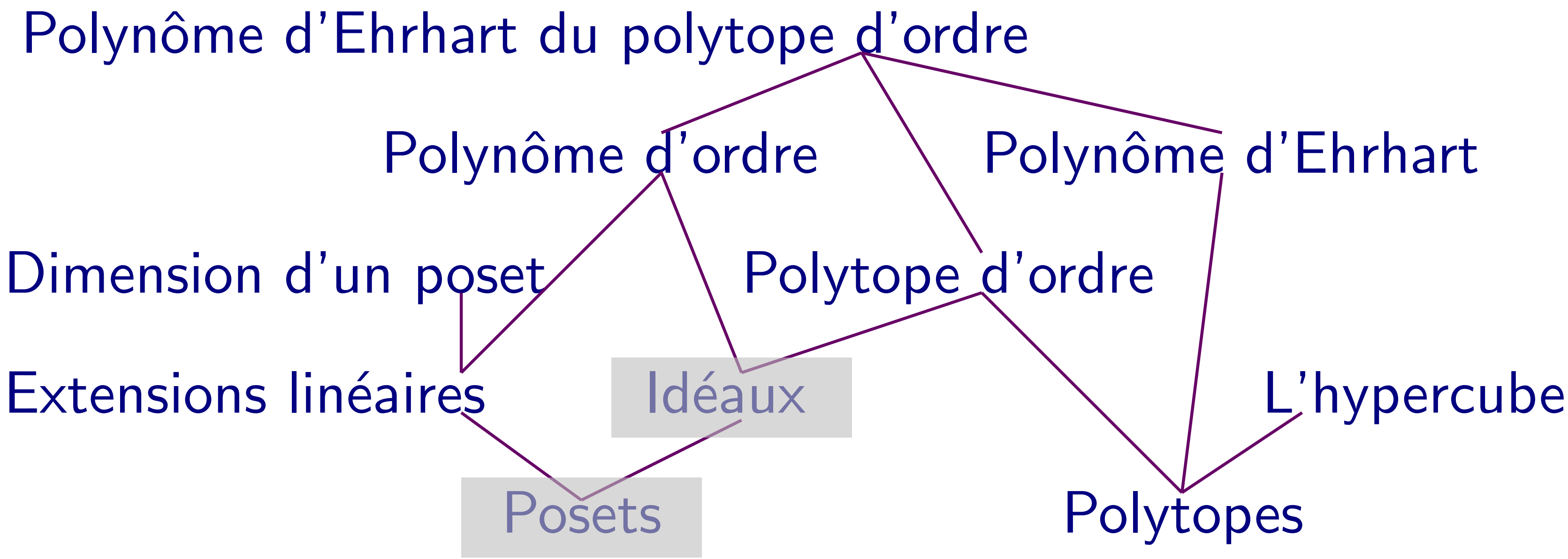


Ma liste de choses à faire



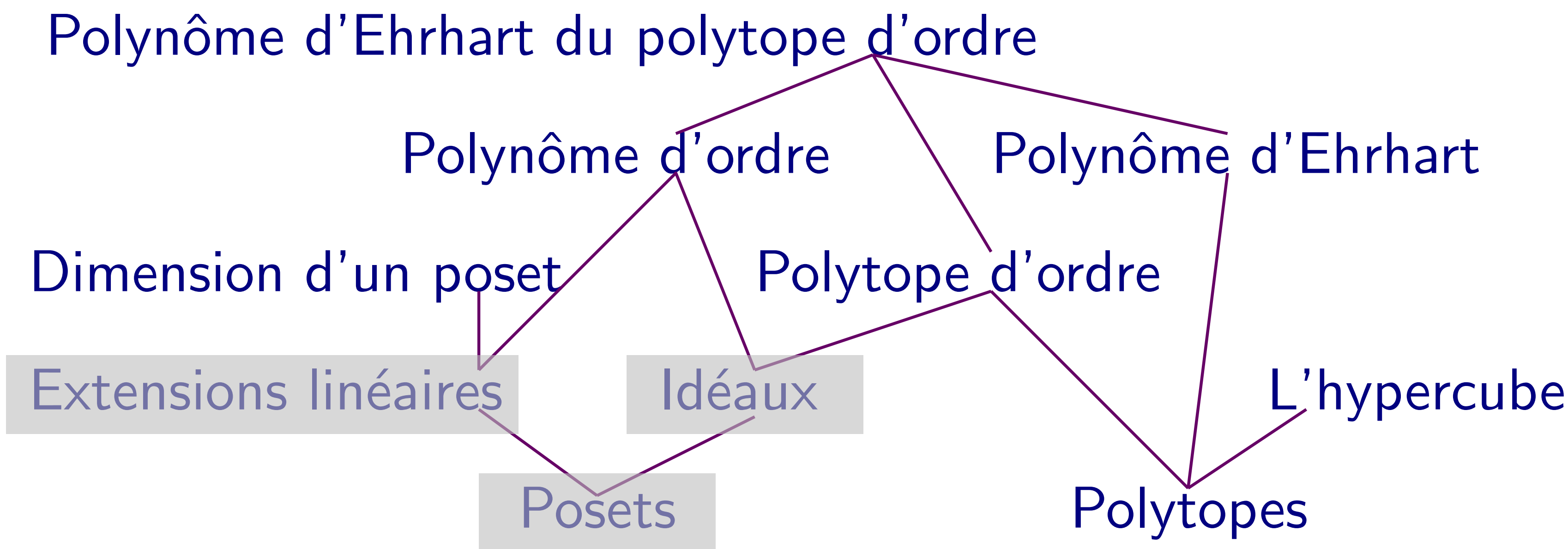
Posets

Ma liste de choses à faire



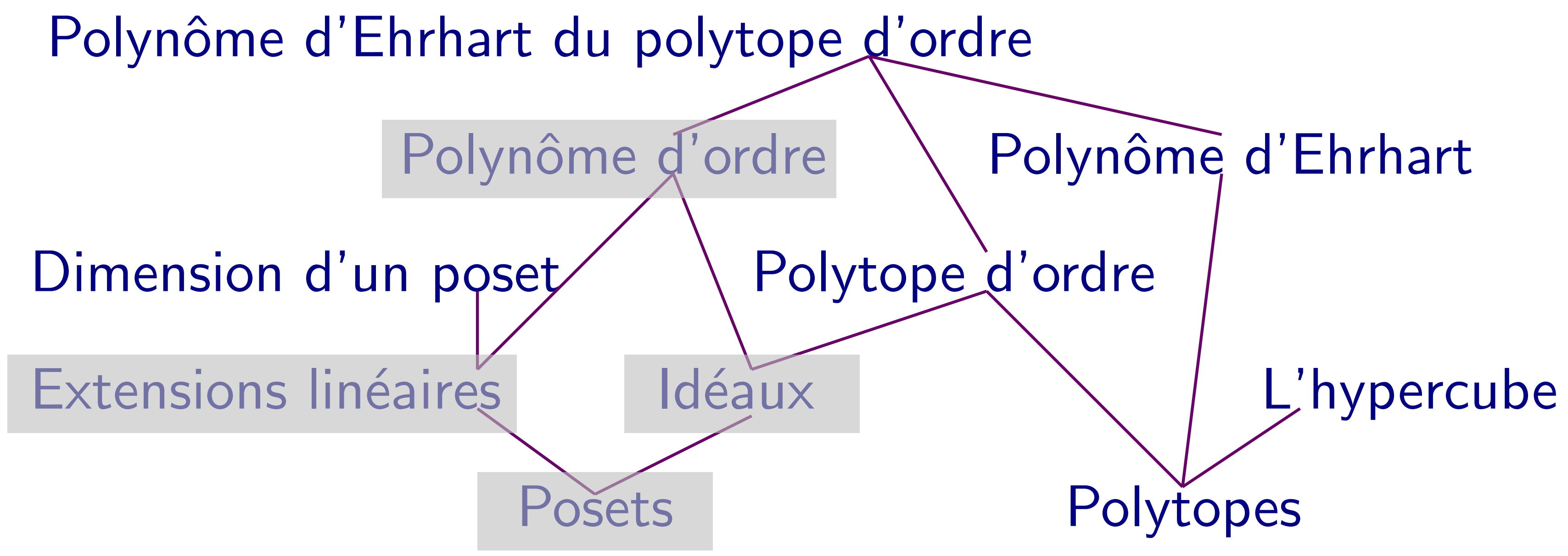
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



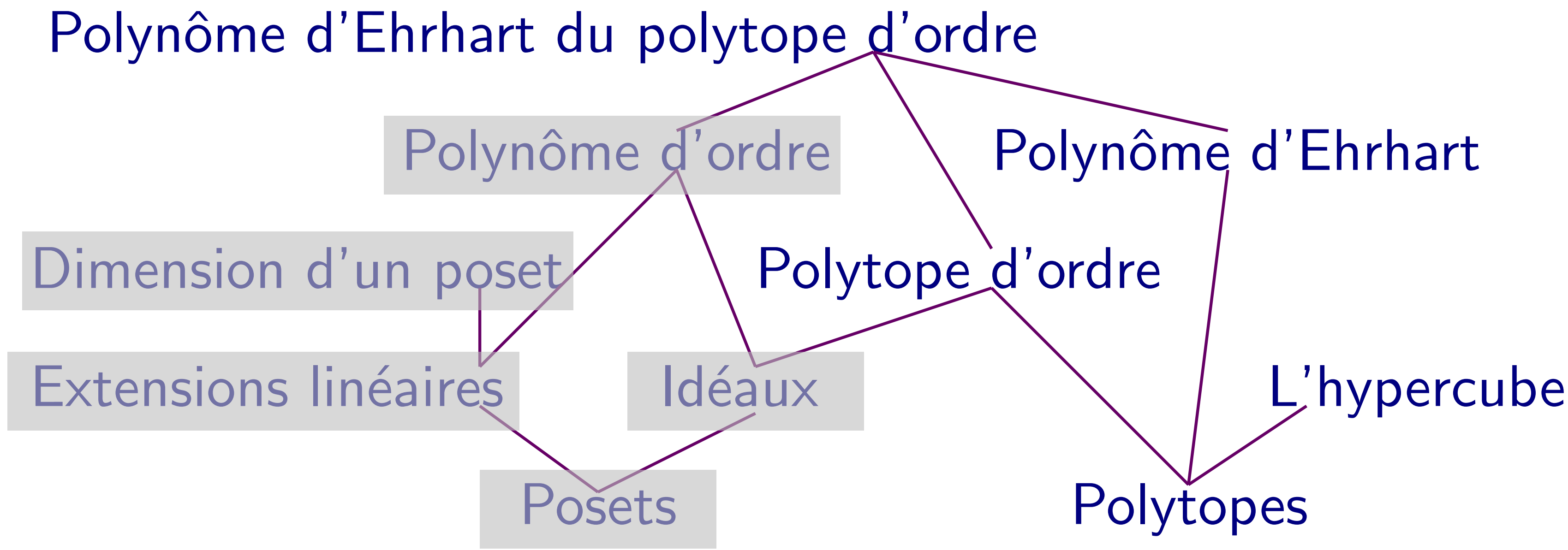
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



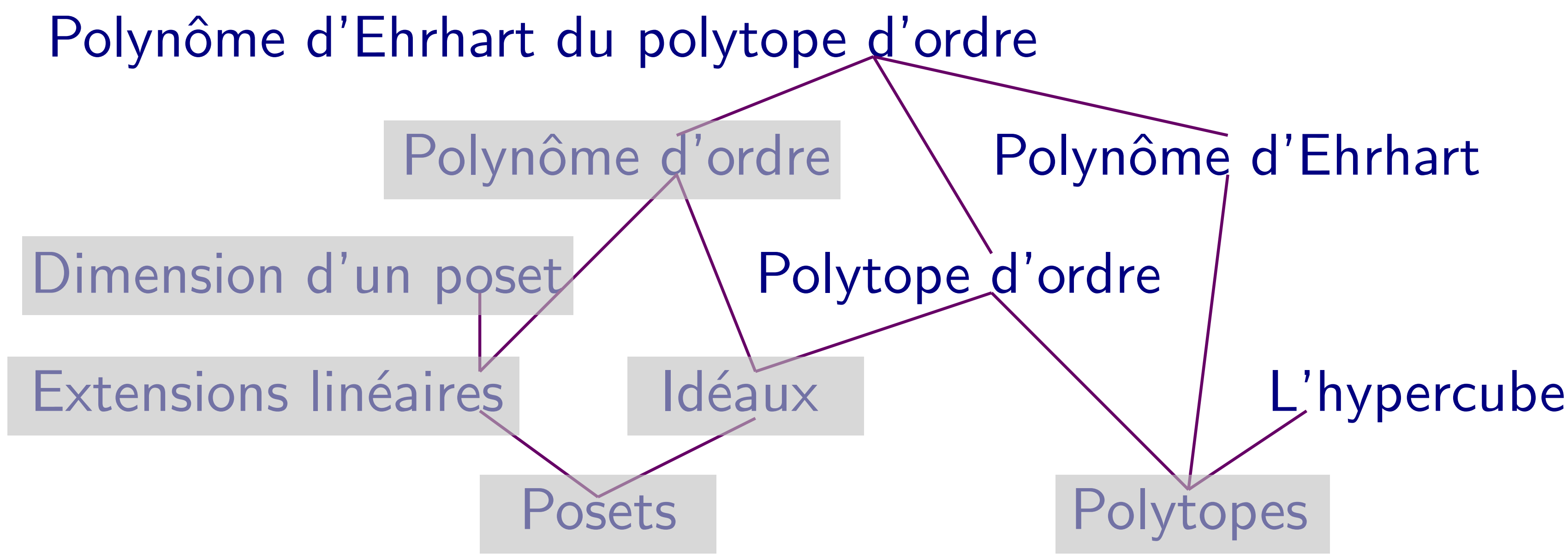
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



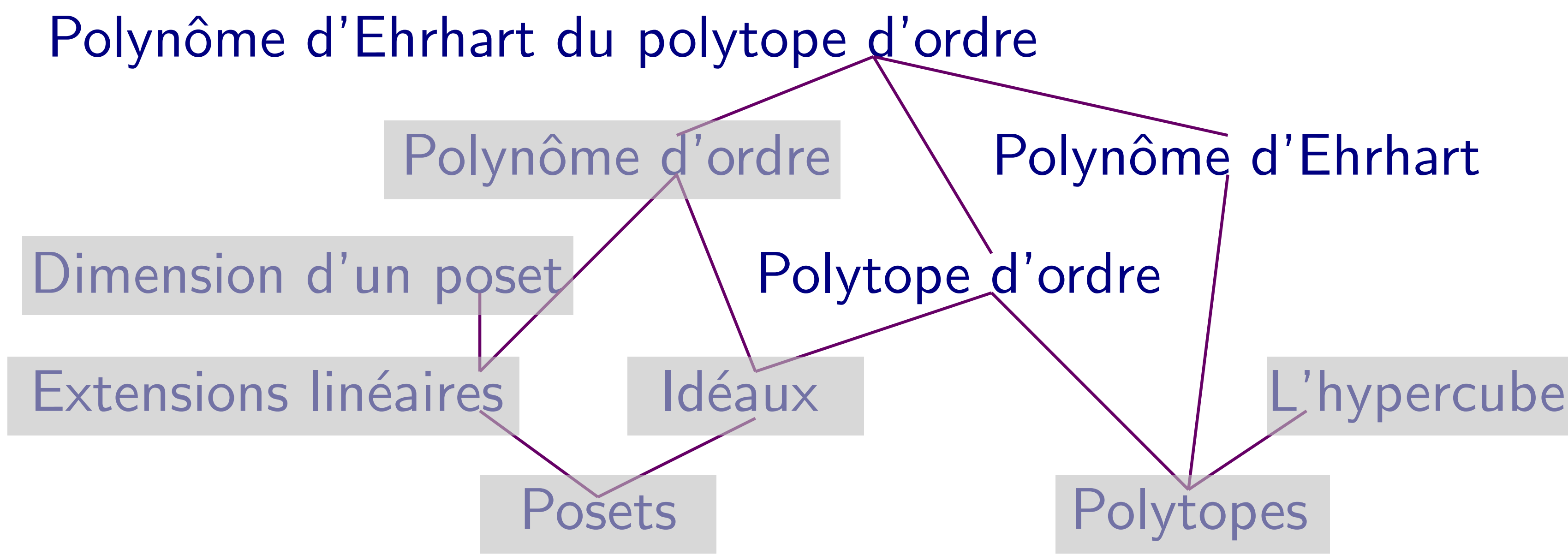
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



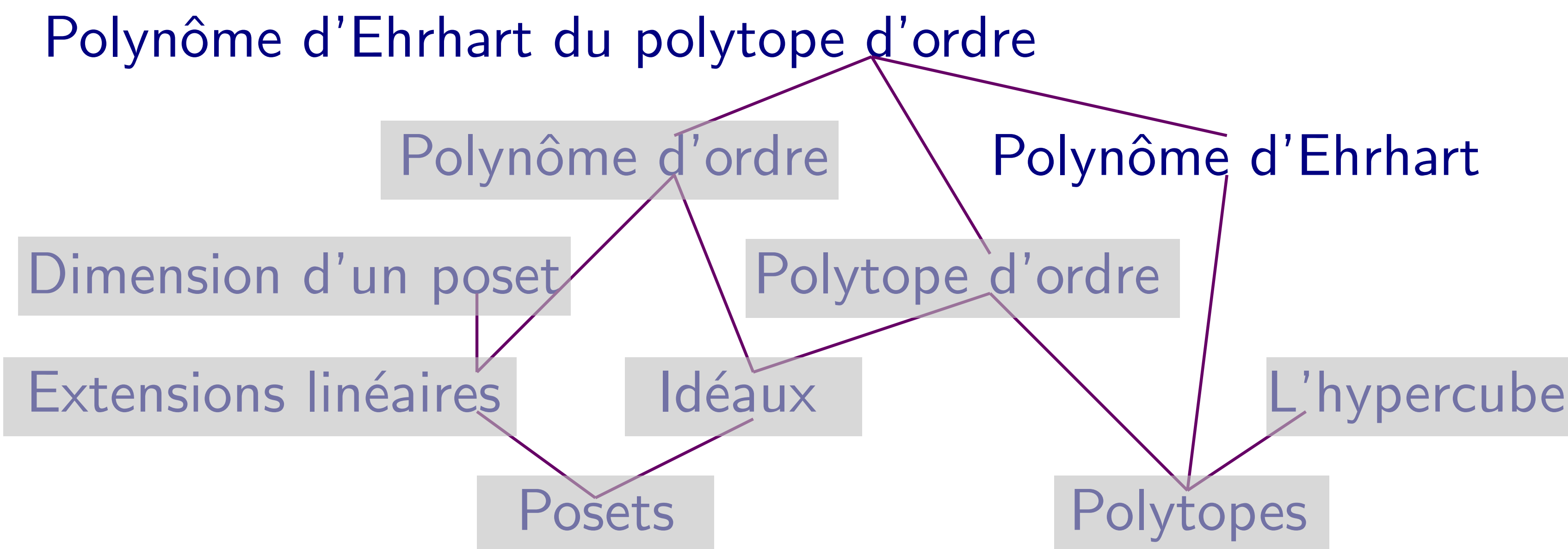
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



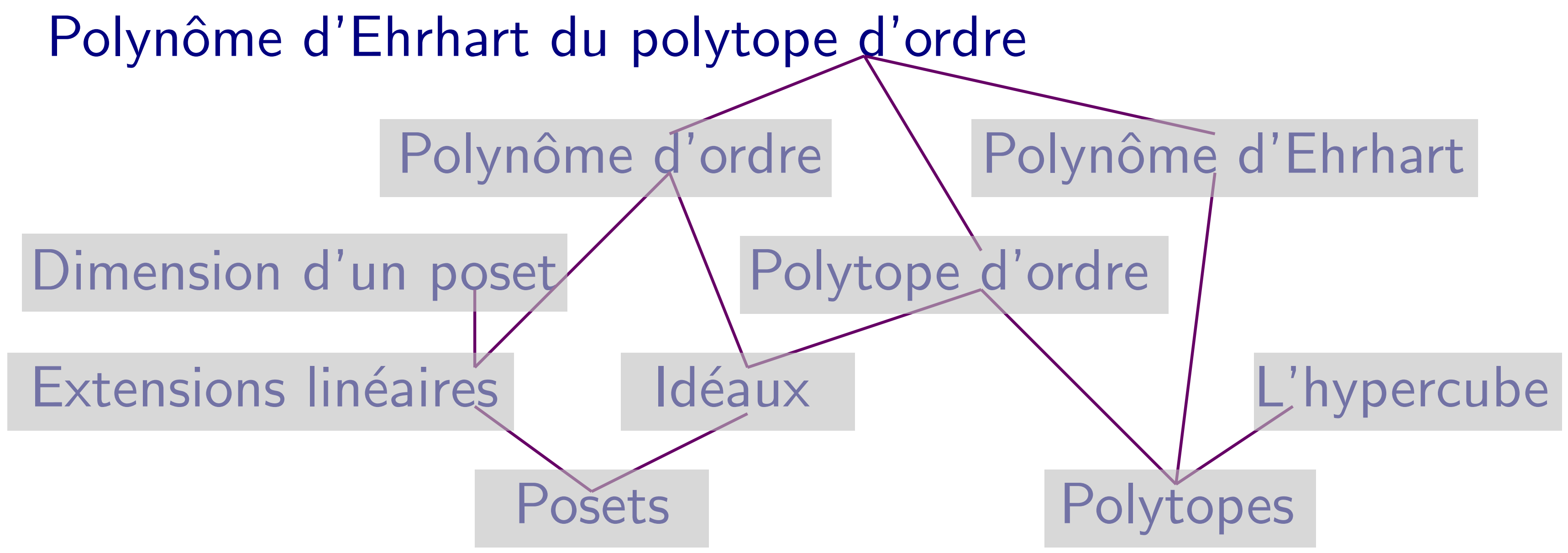
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



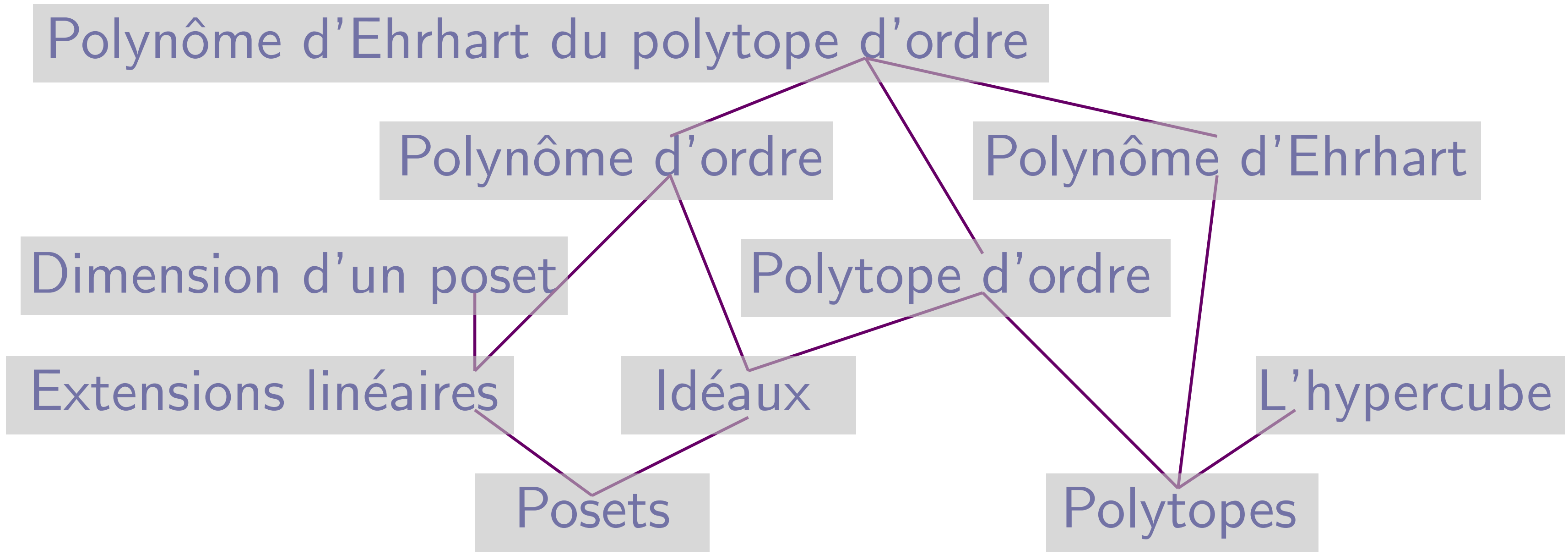
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



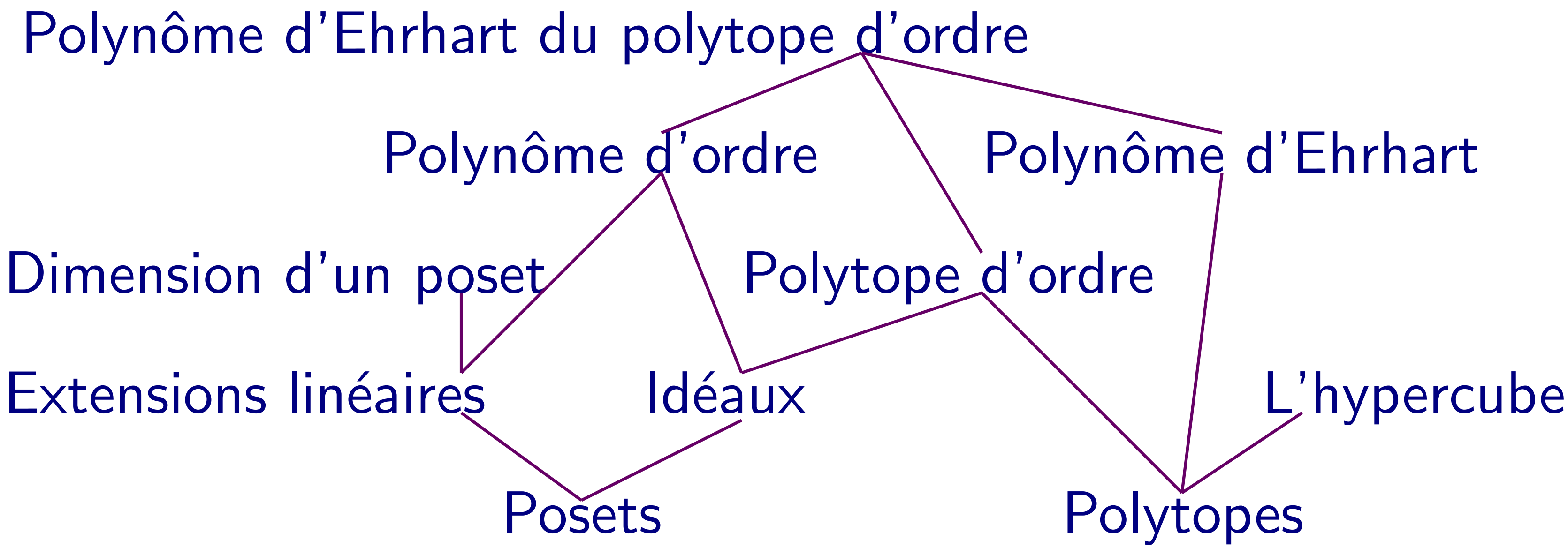
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Ma liste de choses à faire



Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

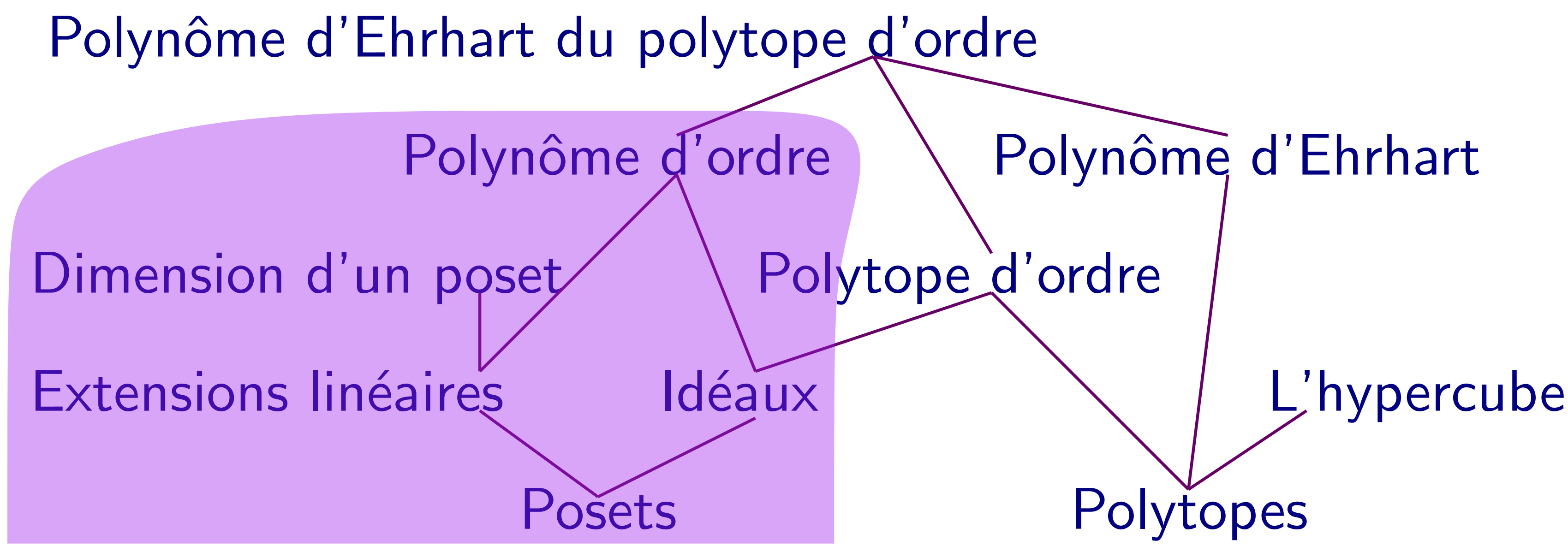
Ma liste de choses à faire



Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Extension linéaire

Ma liste de choses à faire

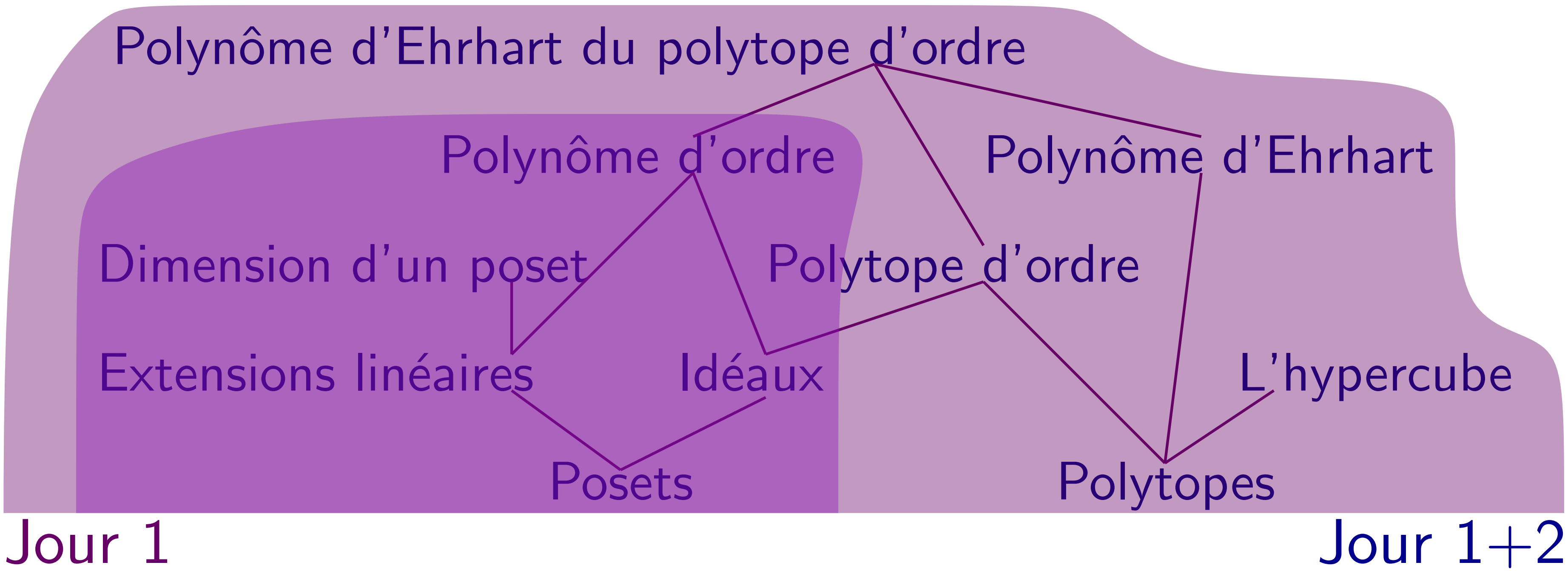


Jour 1

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Extension linéaire

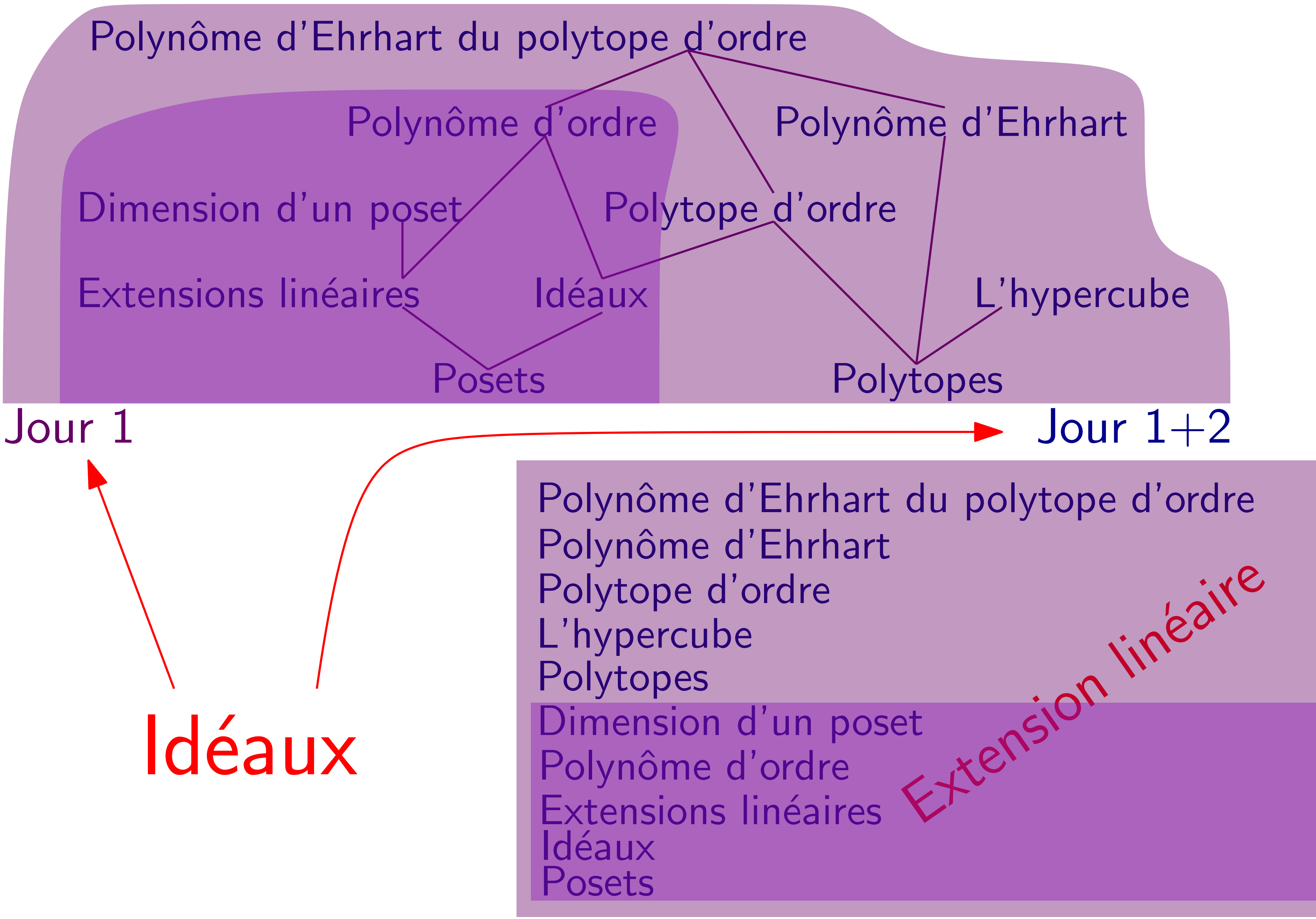
Ma liste de choses à faire



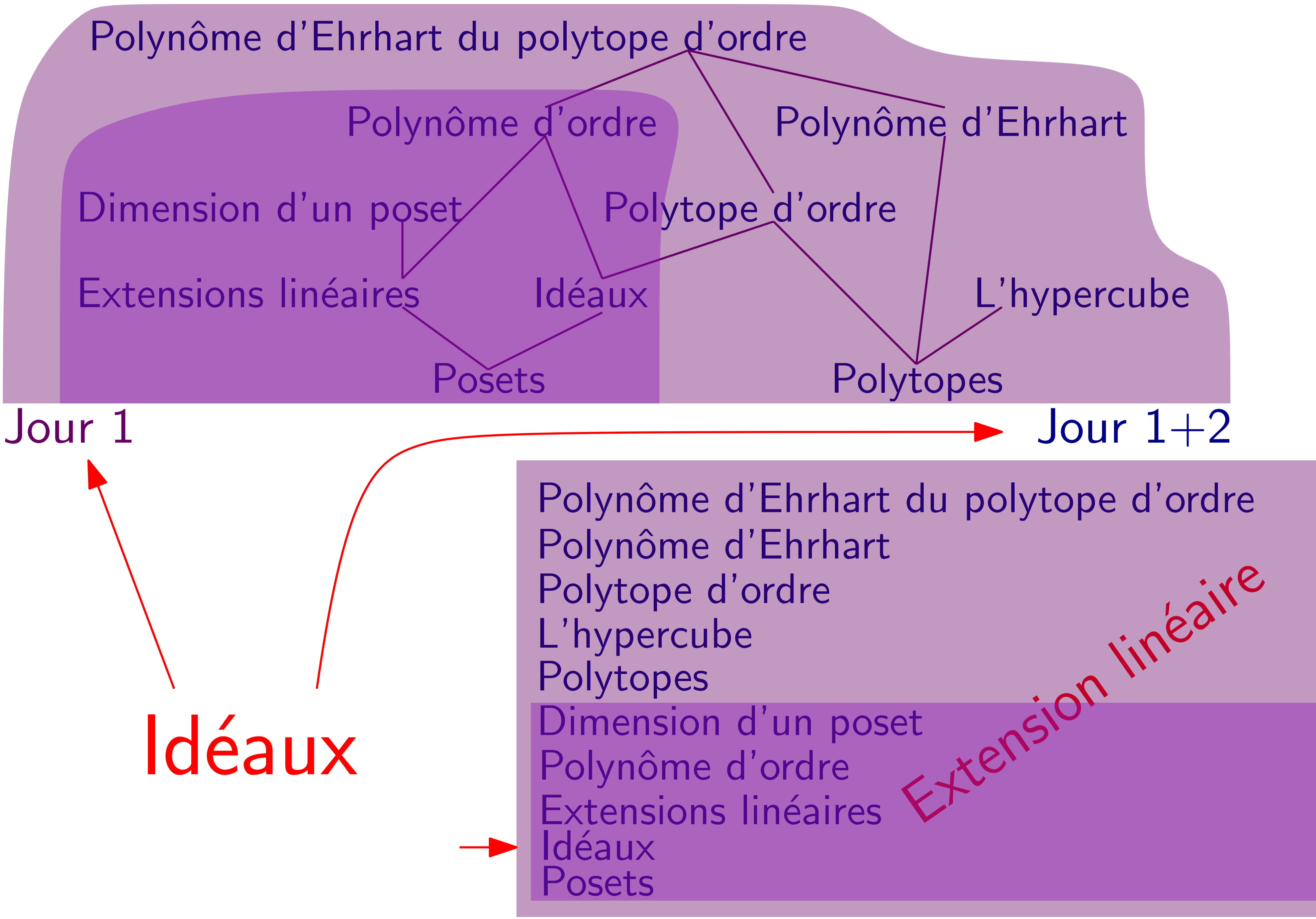
Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Extension linéaire

Ma liste de choses à faire



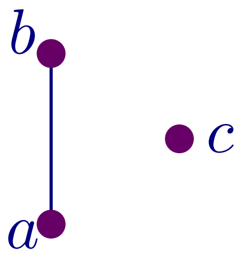
Ma liste de choses à faire



Idéaux

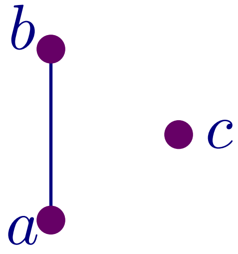
Idéaux

poset $P = (X, \leq)$



Idéaux

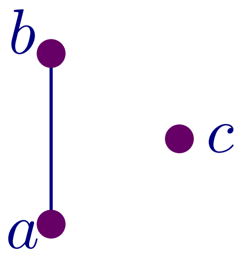
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

Idéaux

poset $P = (X, \leq)$

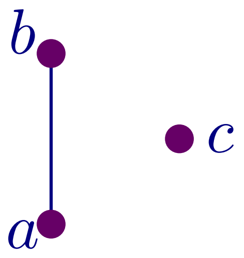


$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux
ordonné par inclusion

Idéaux

poset $P = (X, \leq)$



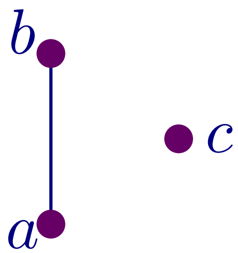
$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux
ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$

Idéaux

poset $P = (X, \leq)$

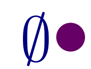


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

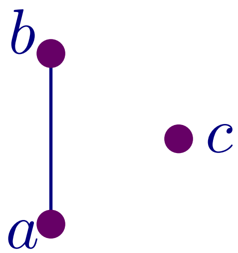
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$



Idéaux

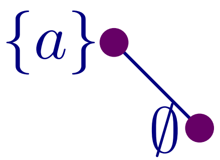
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

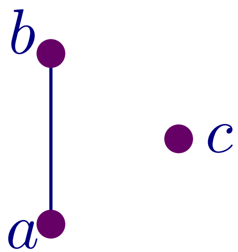
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux
ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$



Idéaux

poset $P = (X, \leq)$

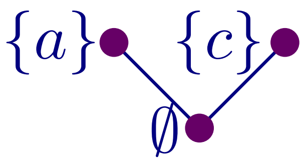


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

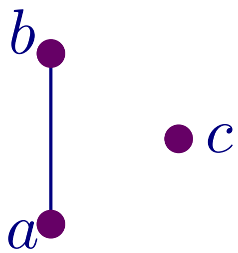
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$



Idéaux

poset $P = (X, \leq)$

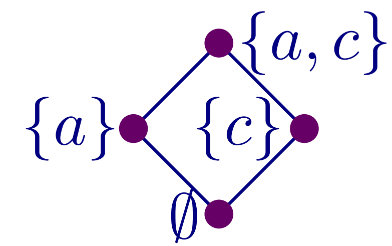


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

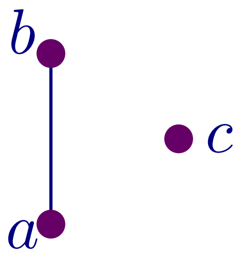
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$



Idéaux

poset $P = (X, \leq)$

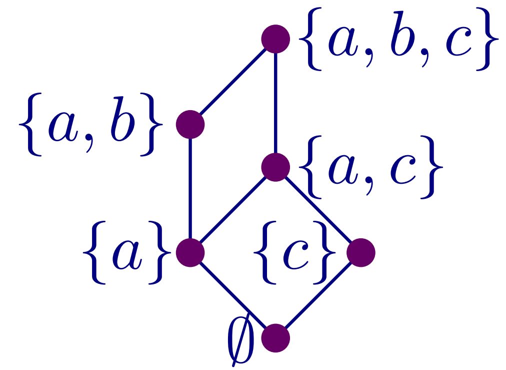


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

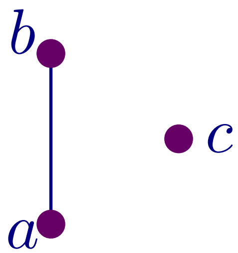
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$



Idéaux

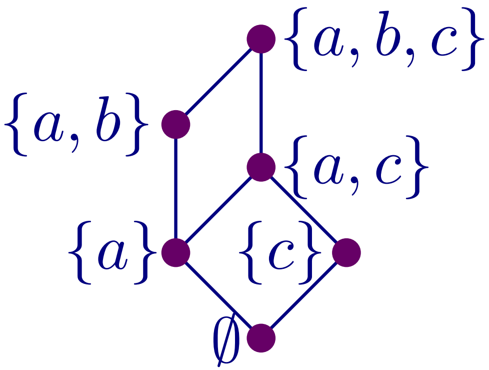
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

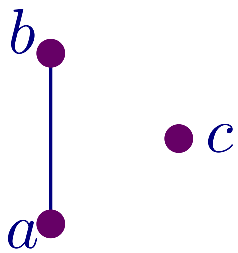
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*



Idéaux

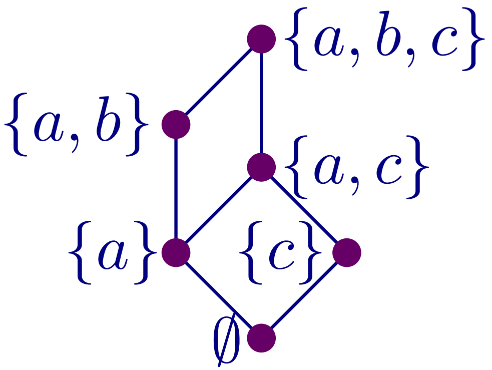
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

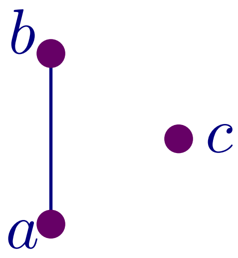
$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*



$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Idéaux

poset $P = (X, \leq)$

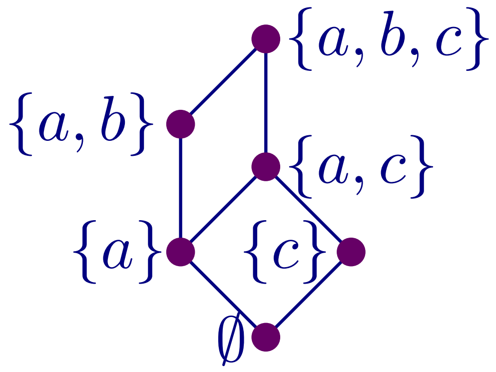


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*

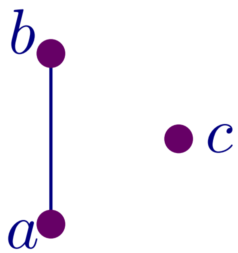


$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs

Idéaux

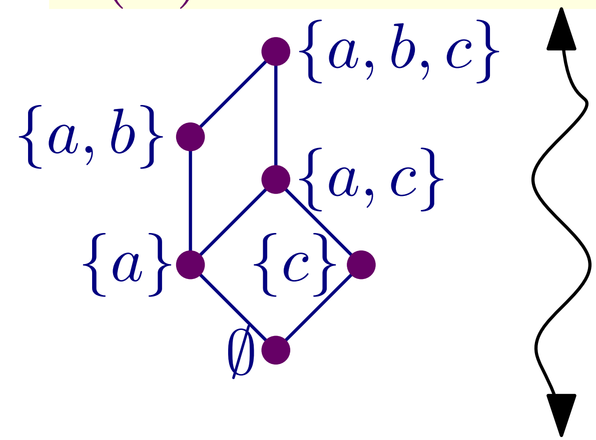
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*



$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

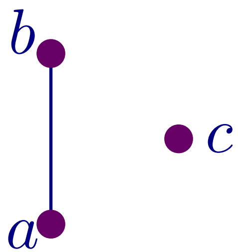
Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs

Garrett Birkhoff, (1911-1996), mathématicien américain.

Son père est le mathématicien George David Birkhoff. Après avoir étudié à l'université Harvard jusqu'en 1932, Garret poursuivit sa formation à Cambridge. Membre de la Société des amis de Harvard, il passa le reste de sa carrière à y enseigner.

Idéaux

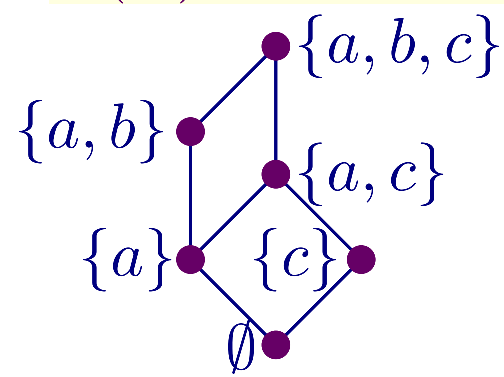
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*

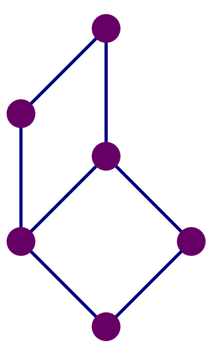


$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs

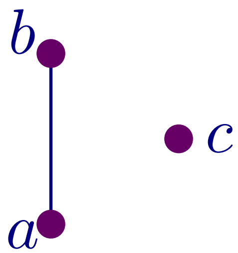
la fonction inverse $\mathcal{J}(\cdot)$

L



Idéaux

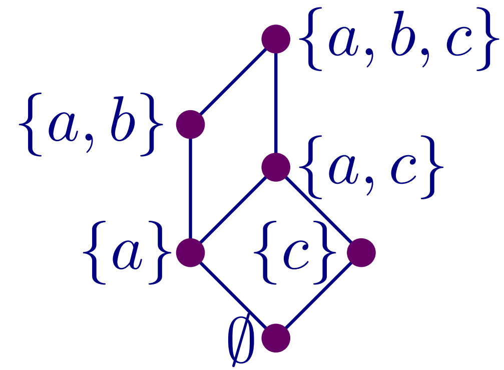
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*

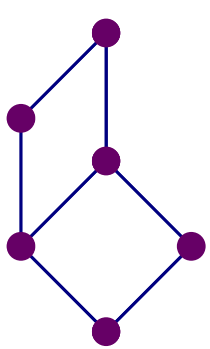


$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs

la fonction inverse $\mathcal{J}(\cdot)$

L

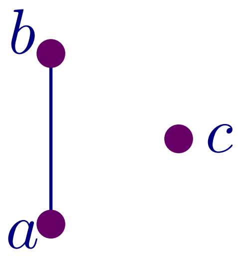


$j \in L$ est *join-irréductible* si
j au dessus d'exactement un élément dans le diagramme

$\mathcal{J}(L)$ le sous-poset des join-irréductibles

Idéaux

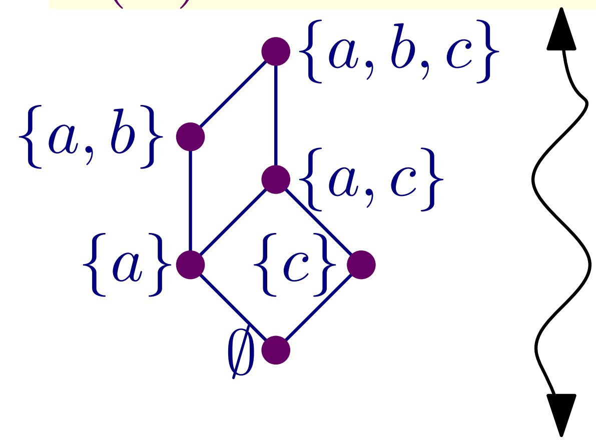
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*

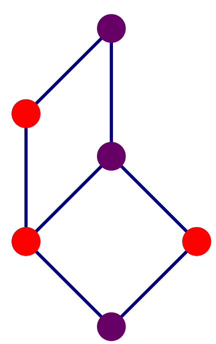


$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs

la fonction inverse $\mathcal{J}(\cdot)$

L

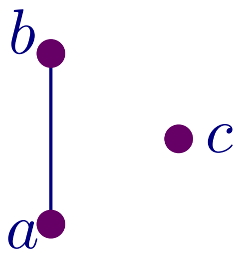


$j \in L$ est *join-irréductible* si
j au dessus d'exactement un élément dans le diagramme

$\mathcal{J}(L)$ le sous-poset des join-irréductibles

Idéaux

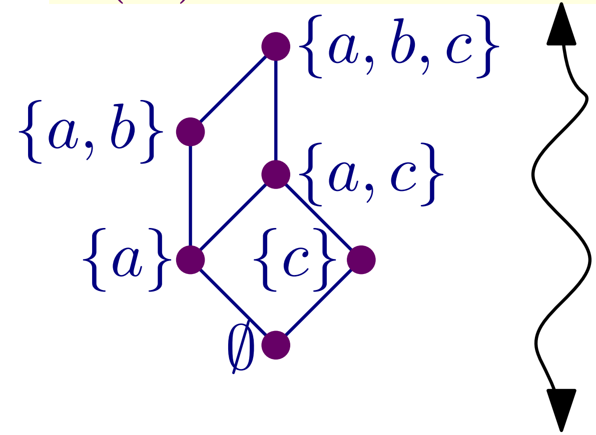
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*

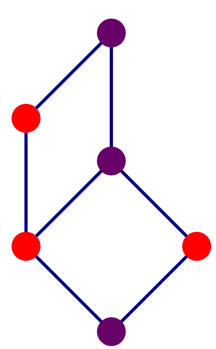


$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs

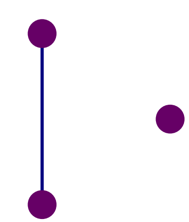
la fonction inverse $\mathcal{J}(\cdot)$

L



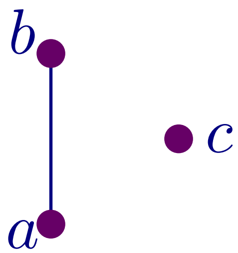
$j \in L$ est *join-irréductible* si
j au dessus d'exactement un élément dans le diagramme

$\mathcal{J}(L)$ le sous-poset des join-irréductibles



Idéaux

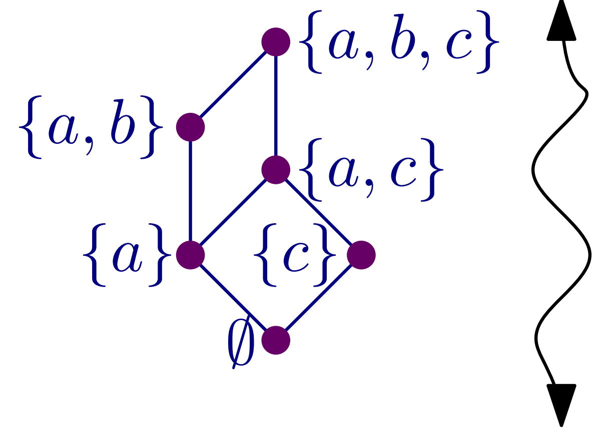
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

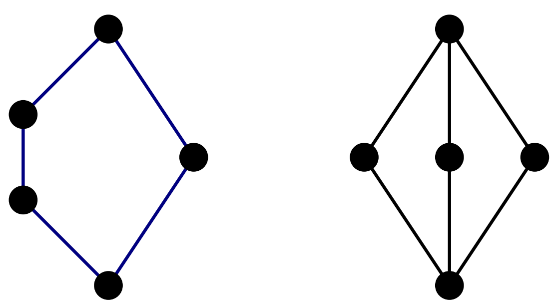
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux
ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*



$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

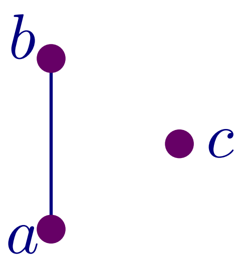
Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs



pas des treillis distributifs

Idéaux

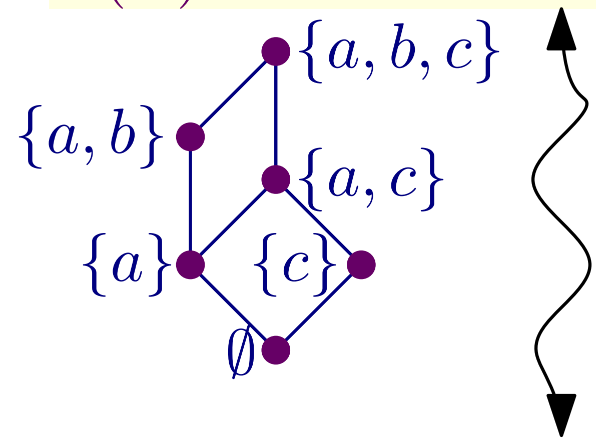
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

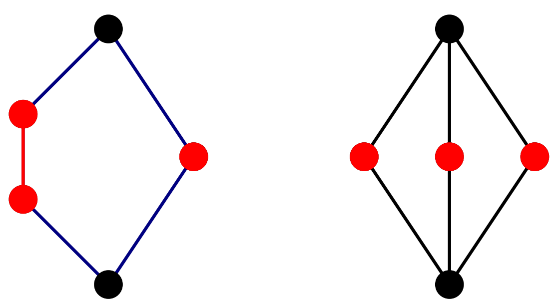
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*



$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

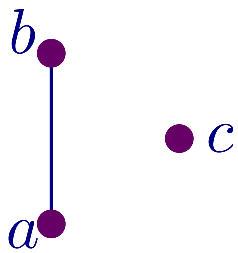
Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs



pas des treillis distributifs

Idéaux

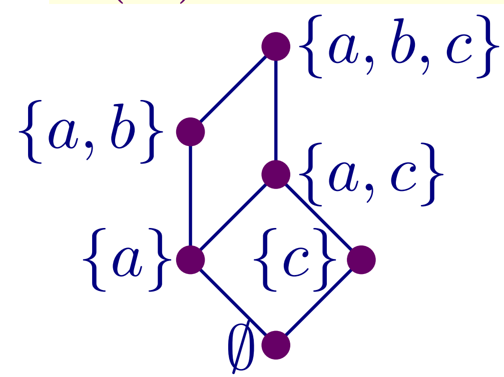
poset $P = (X, \leq)$



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

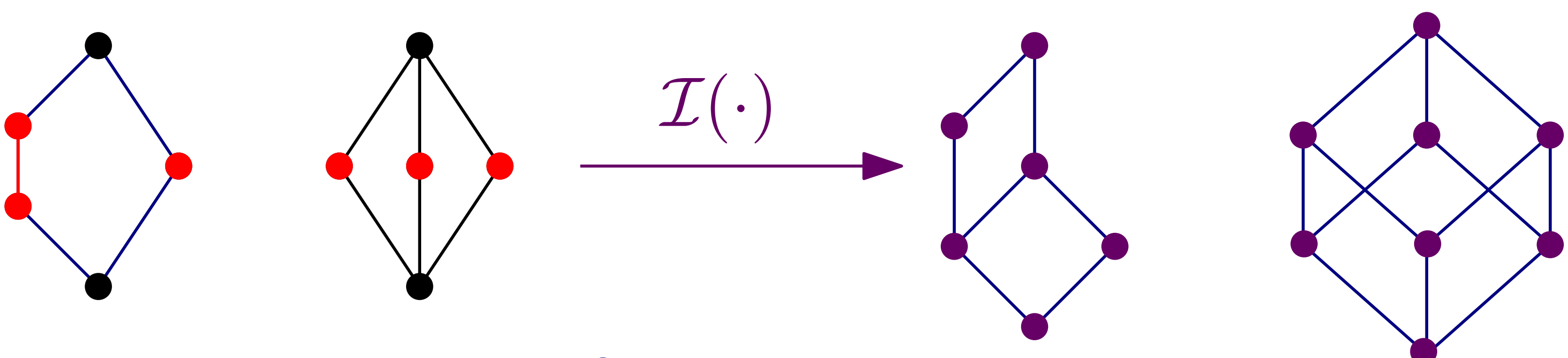
$\mathcal{I}(P)$ ensemble des idéaux ordonné par inclusion

$\mathcal{I}(P)$ *treilli distributif*



$(M, \subseteq)$ tel que $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ est clos par $\cup$ et $\cap$

Théorème (Birkhoff '37) :
$\mathcal{I}(\cdot)$ est une bijection entre les posets et les treillis distributifs



pas des treillis distributifs

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

Polynôme d'Ehrhart

Polytope d'ordre

L'hypercube

Polytopes

Dimension d'un poset

Polynôme d'ordre

Extensions linéaires

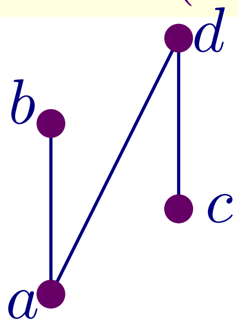
Idéaux

Posets

Extensions linéaires

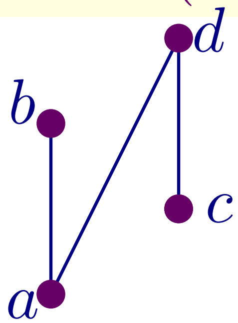
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



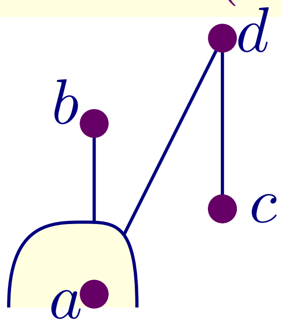
chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

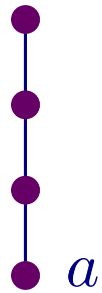
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$ chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

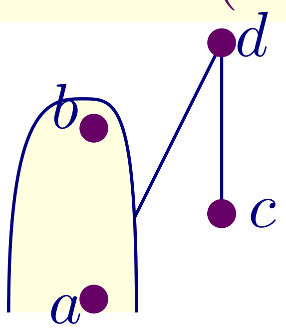


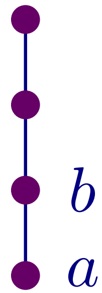


Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$ chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

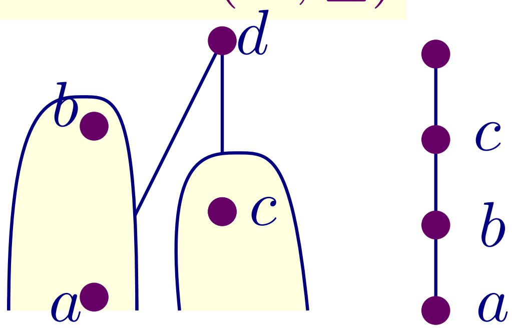




Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$ chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

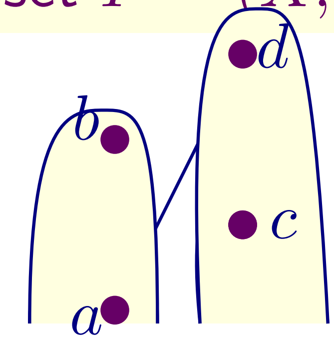
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

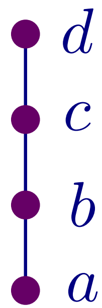


Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$ chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

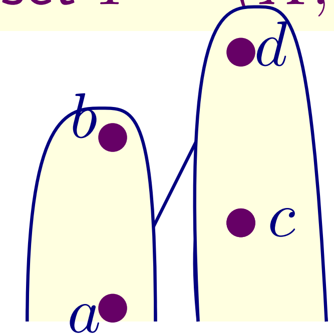
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$



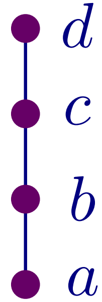


Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si



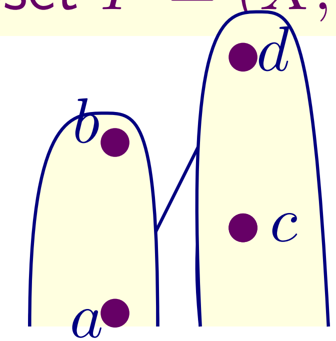
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

plusieures façons de voir :

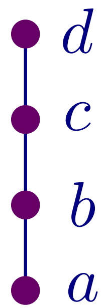
extraire itérativement des minimums

Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



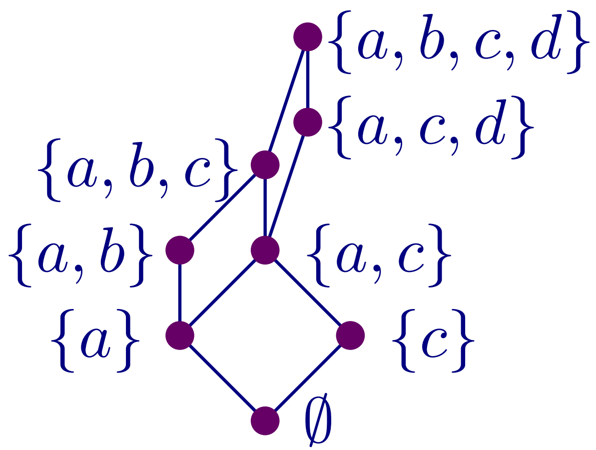
chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si



$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

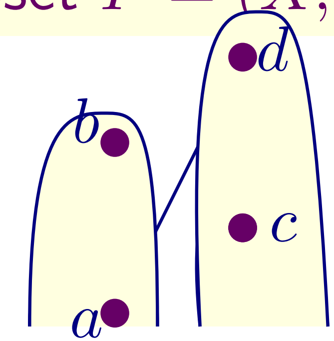
plusieures façons de voir :

- extraire itérativement des minimums
- chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

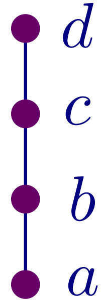


Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

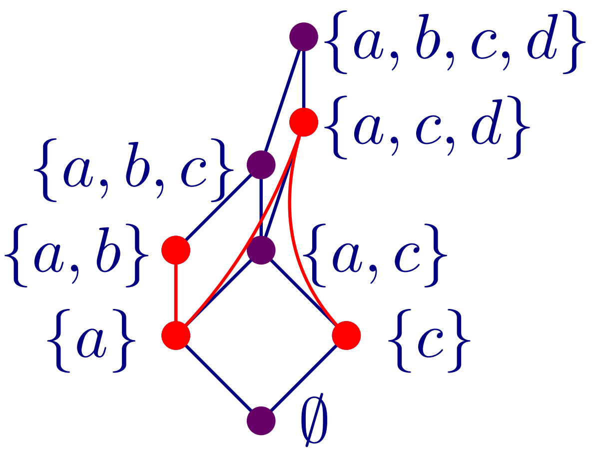


$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

plusieures façons de voir :

extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

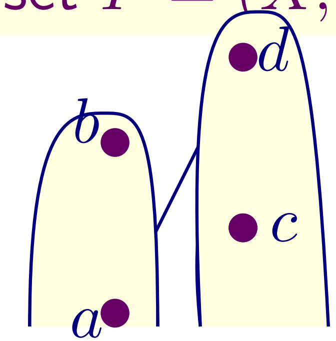


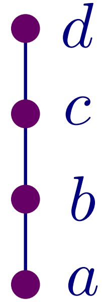
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$

chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

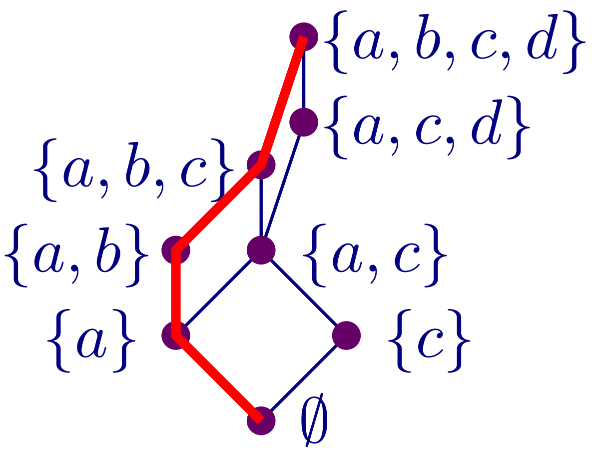




plusieures façons de voir :

extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

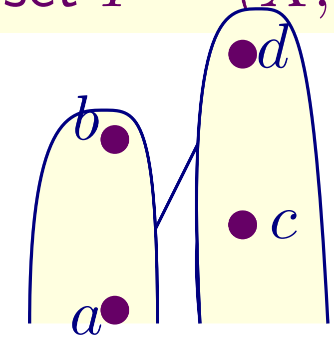


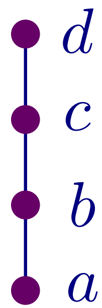
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$

chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

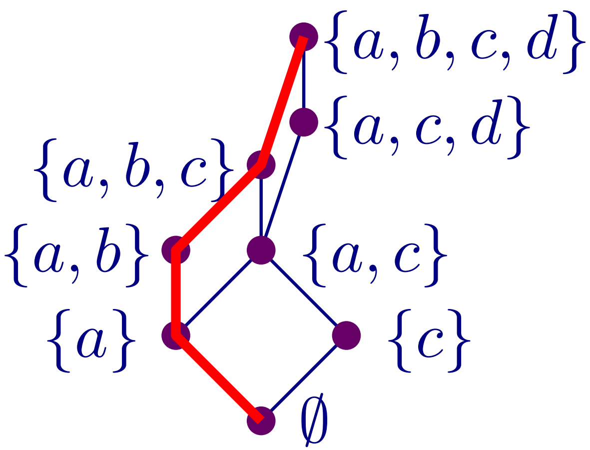




plusieures façons de voir :

extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$



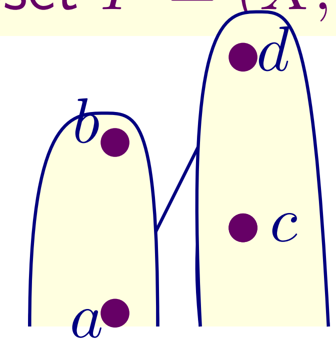
abcd •

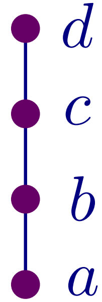
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$

chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

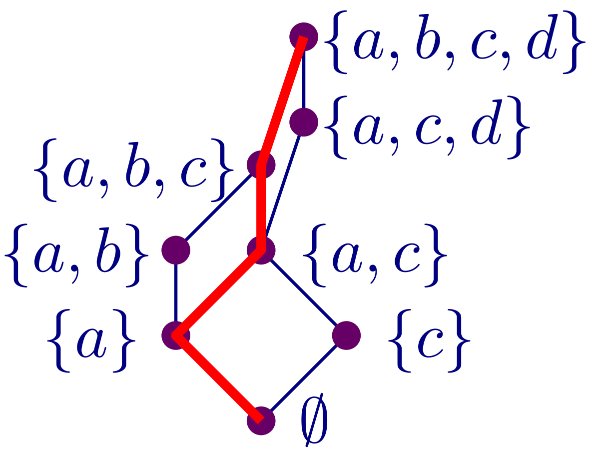
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

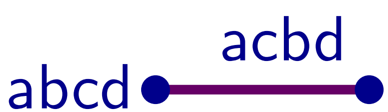




plusieures façons de voir :

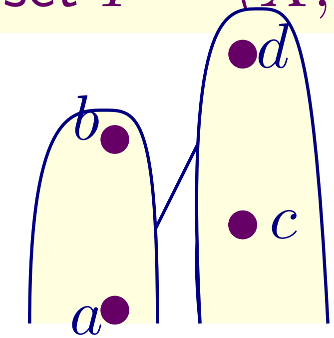
- extraire itérativement des minimums
- chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

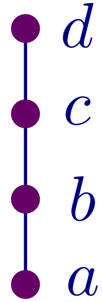




Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



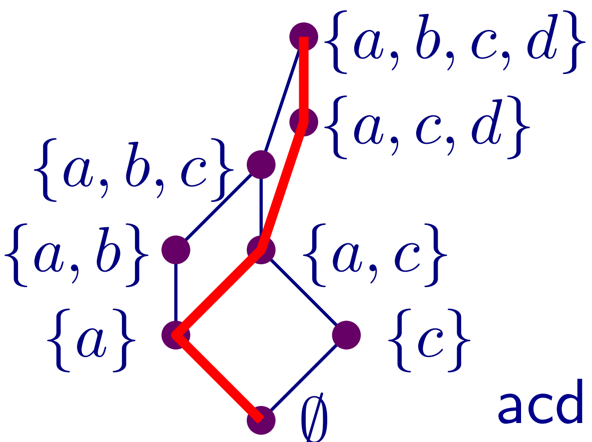


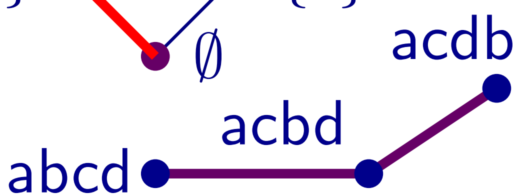
chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

plusieures façons de voir :

- extraire itérativement des minimums
- chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$



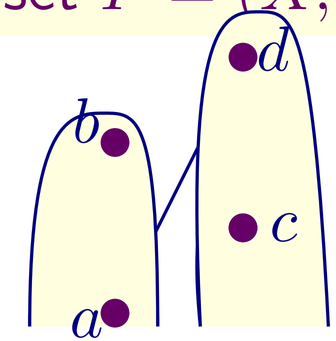


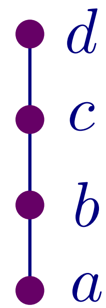
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$

chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

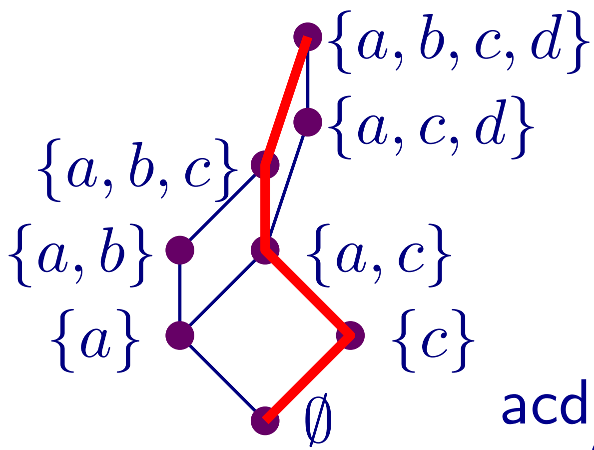
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

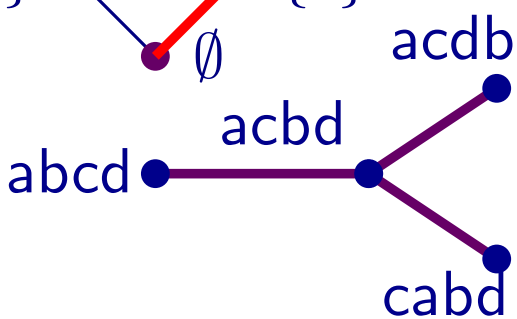




plusieures façons de voir :

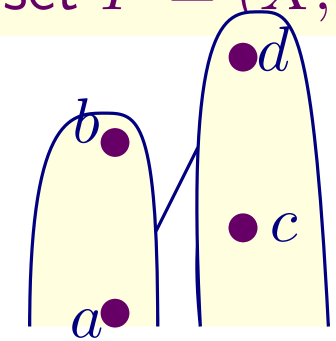
- extraire itérativement des minimums
- chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$





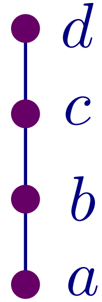
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



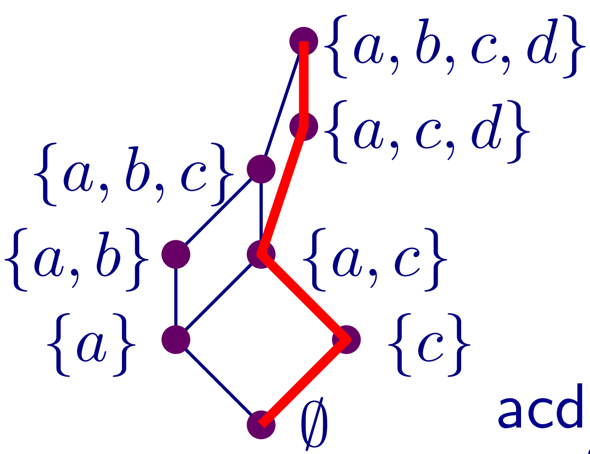
chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

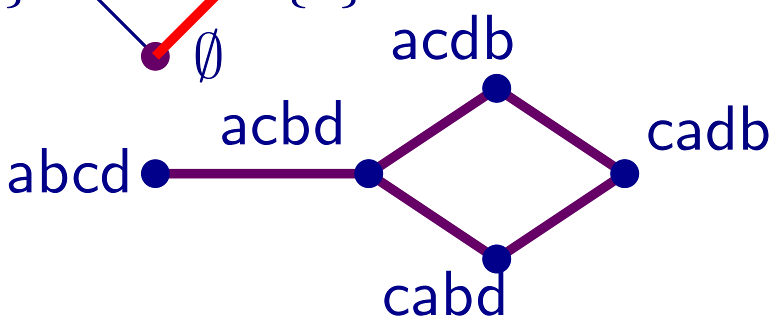
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$



plusieures façons de voir :

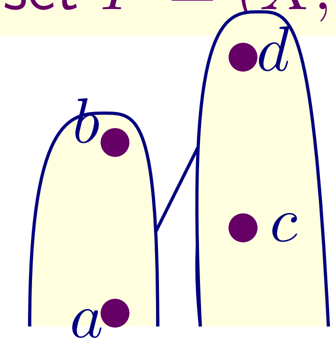
- extraire itérativement des minimums
- chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$



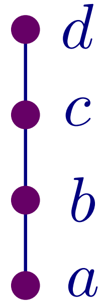


Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



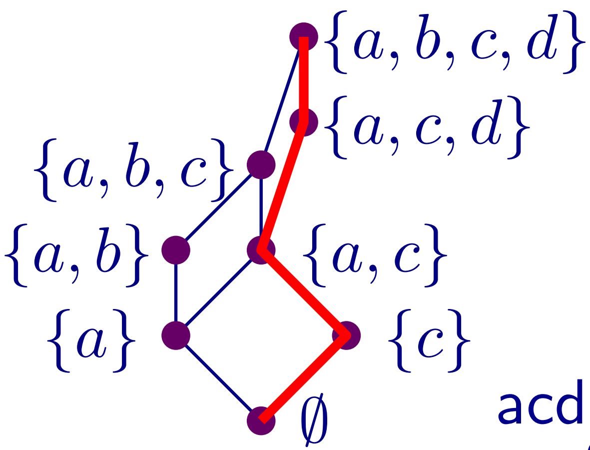
chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

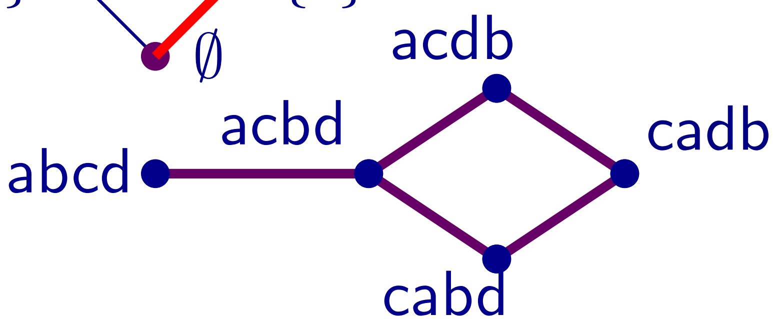


$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

plusieures façons de voir :

- extraire itérativement des minimums
- chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

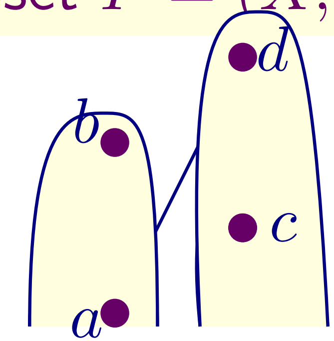


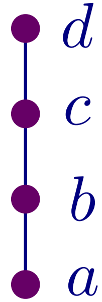


le N a 5 extensions linéaires

Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$





chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

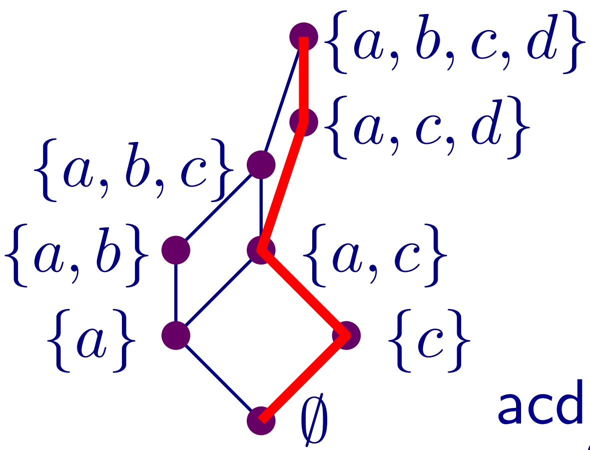
$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

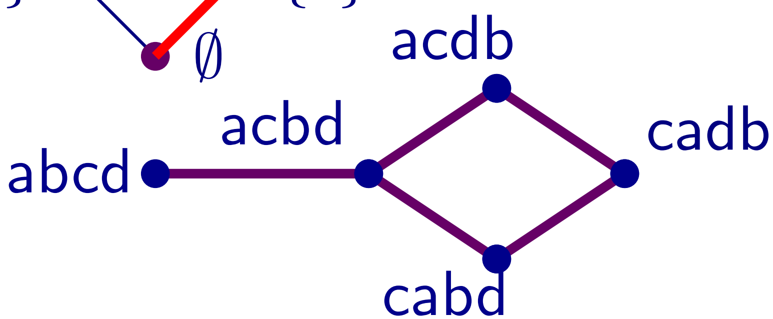
plusieures façons de voir :

extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

homorphismes surjectifs à $C_{|X|}$





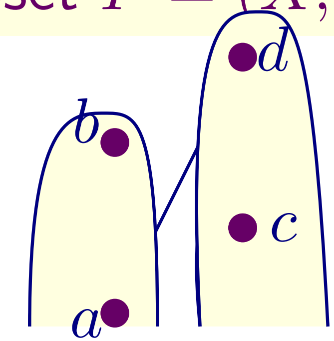
le N a 5 extensions linéaires

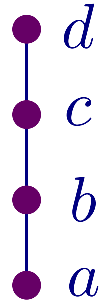
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$

chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$





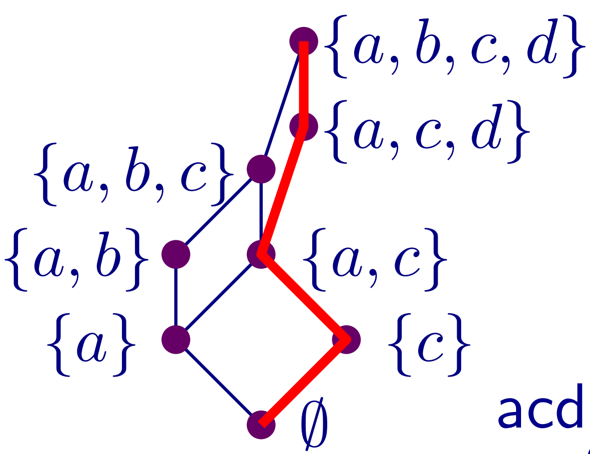
plusieures façons de voir :

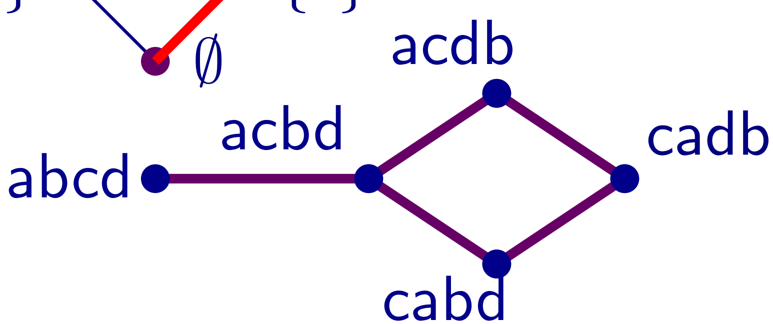
extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

homorphismes surjectifs à $C_{|X|}$

$\varphi : X \to \{0, \ldots, |X| - 1\}$ tel que
$x \leq y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$

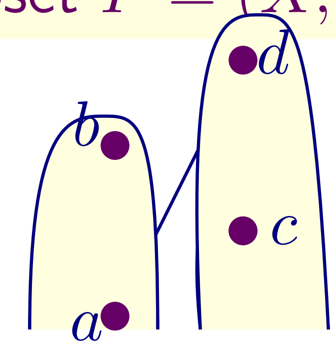




le N a 5 extensions linéaires

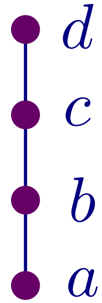
Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$



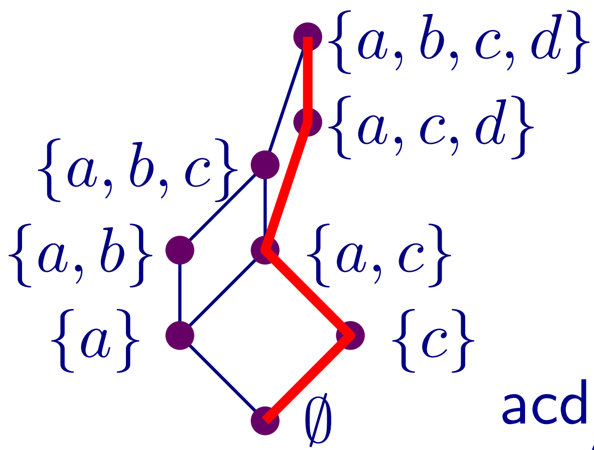
plusieures façons de voir :

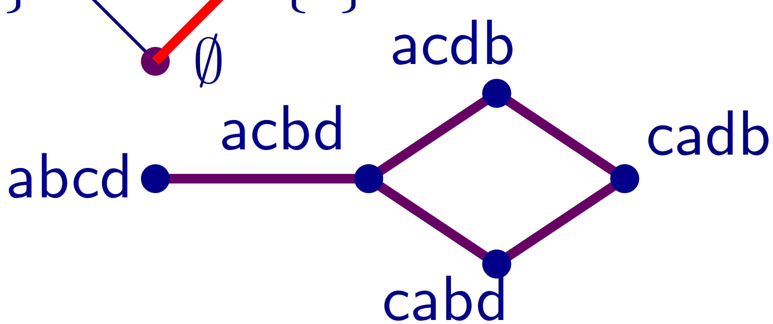
extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

homorphismes surjectifs à $C_{|X|}$

$\varphi : X \to \{0, \ldots, |X|-1\}$ tel que
$x \leq y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$



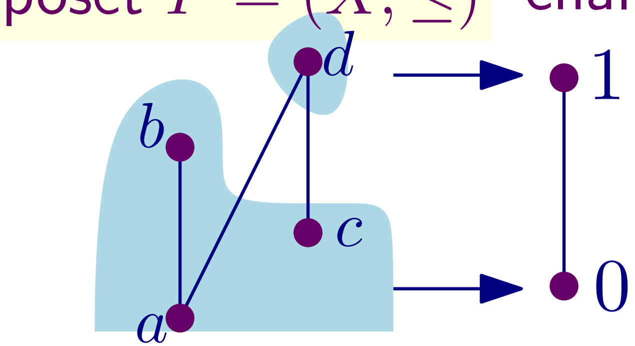


le N a 5 extensions linéaires

les idéales sont aussi des homomorphismes, mais de P à C_2, par exemple $\{a,b,c\} \cong [\varphi(x) = 0$ si $x \in \{a,b,c\}$ et 1 sinon$]$.

Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

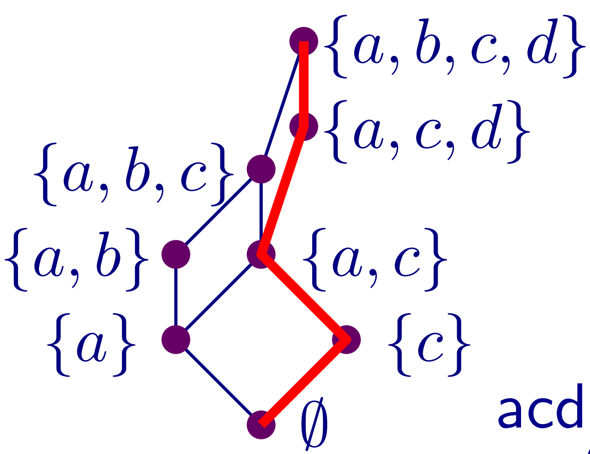
plusieures façons de voir :

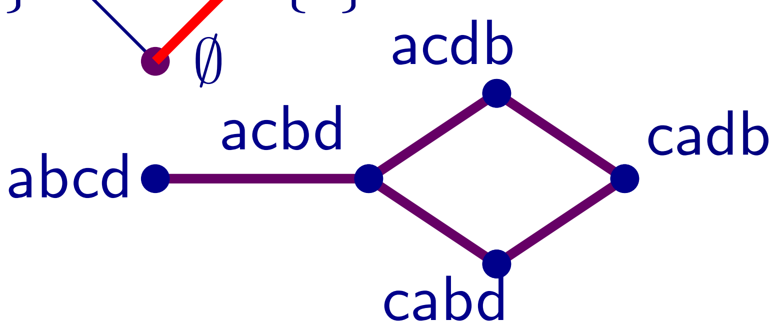
extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

homorphismes surjectifs à $C_{|X|}$

$\varphi : X \to \{0, \ldots, |X| - 1\}$ tel que
$x \leq y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$



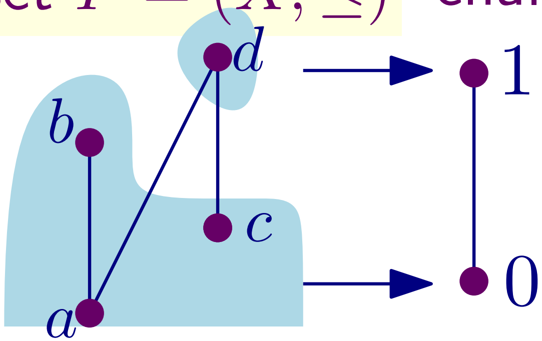


le N a 5 extensions linéaires

les idéales sont aussi des homomorphismes, mais de P à C_2, par exemple $\{a, b, c\} \cong [\varphi(x) = 0$ si $x \in \{a, b, c\}$ et 1 sinon$]$.

Extensions linéaires

poset $P = (X, \leq)$



chaîne $C = (X, \leq_E)$ est une *extension linéaire* de P si

$$x \leq y \implies x \leq_E y$$

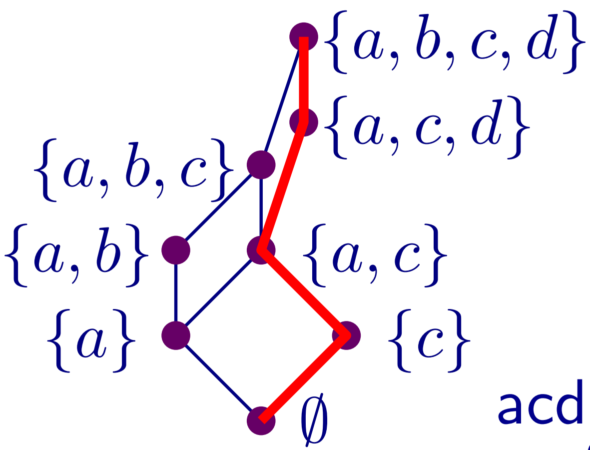
plusieures façons de voir :

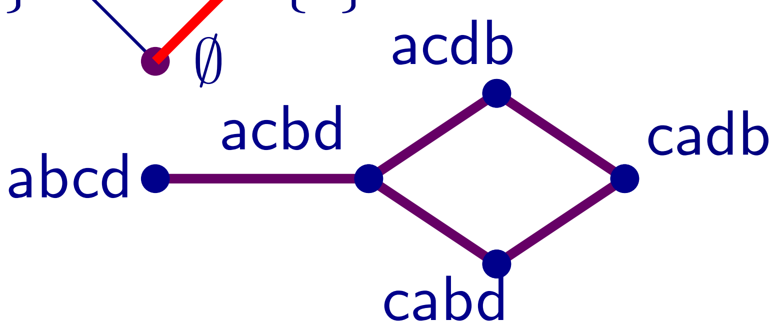
extraire itérativement des minimums

chaînes maximales dans $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$

homorphismes surjectifs à $C_{|X|}$

$\varphi : X \to \{0, \ldots, |X|-1\}$ tel que
$x \leq y \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$





le N a 5 extensions linéaires

les idéales sont aussi des homomorphismes, mais de P à C_2, par exemple $\{a,b,c\} \cong [\varphi(x) = 0$ si $x \in \{a,b,c\}$ et 1 sinon].

surjectif sauf $\emptyset$ et P

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Le polynôme d'ordre

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

Thm :

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

nombre de homomorphismes surjectifs de P à C_i

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

nombre de homomorphismes surjectifs de P à C_i
pour un k donné, pour chaque taille d'image i,
choisir comment le mettre dans C_k

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

nombre de homomorphismes surjectifs de P à C_i
pour un k donné, pour chaque taille d'image i,
choisir comment le mettre dans C_k

$$\varphi : P \xrightarrow{\text{surjectif}} C_i \xrightarrow[\text{injectif}]{} C_k$$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \sum_{i=1}^{|P|} \frac{\varepsilon_i}{i!}(k-i+1)\cdots k$

nombre de homomorphismes surjectifs de P à C_i

pour un k donné, pour chaque taille d'image i,

choisir comment le mettre dans C_k

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \sum_{i=1}^{|P|} \frac{\varepsilon_i}{i!}(k-i+1)\cdots k$$

nombre de homomorphismes surjectifs de P à C_i

pour un k donné, pour chaque taille d'image i,

choisir comment le mettre dans C_k

somme de polynômes est un polynôme

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

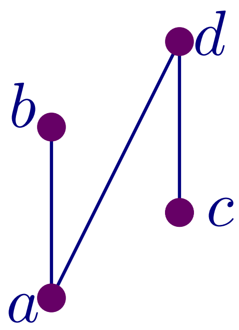
nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$



Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

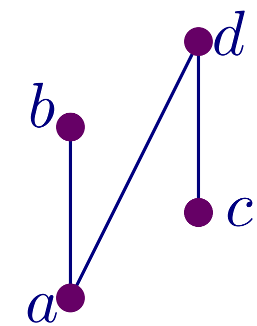
Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

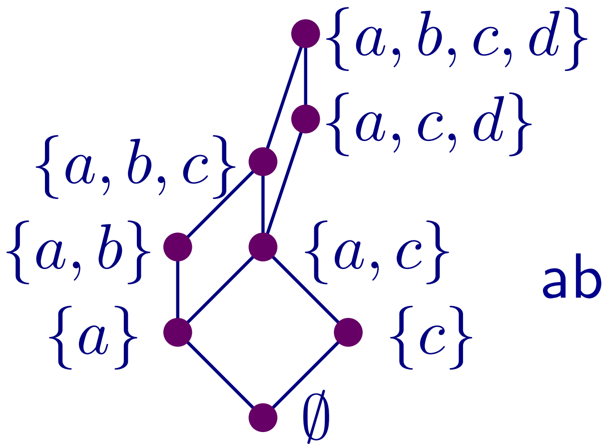
$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

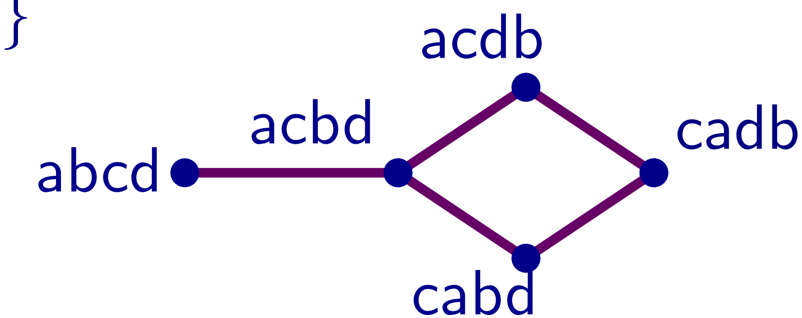
$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$



$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$





Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

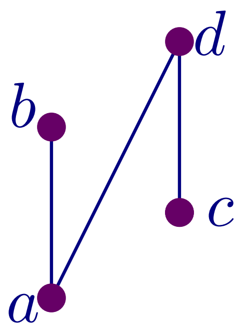
Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$



Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\dots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

nombre ext. linéaires

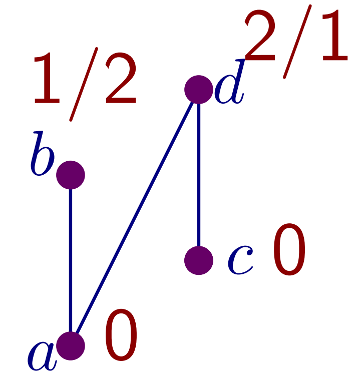
Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$



$\varepsilon_3 = 2+$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

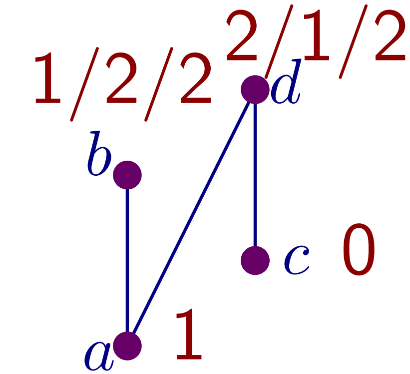
Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$



$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$

$\varepsilon_3 = 2{+}3{+}$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

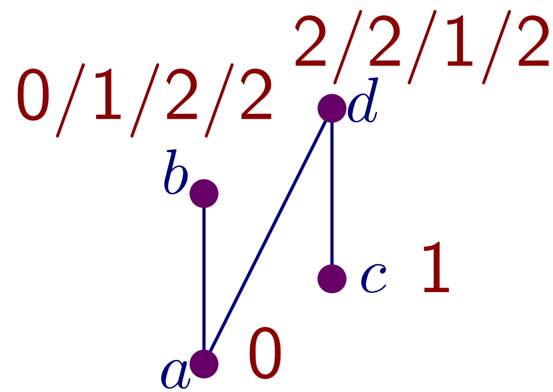
Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$



$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$

$\varepsilon_3 = 2{+}3{+}4{+}$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

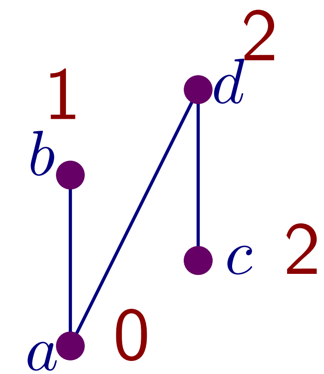
Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$



$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$

$\varepsilon_3 = 2+3+4+1 = 10$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

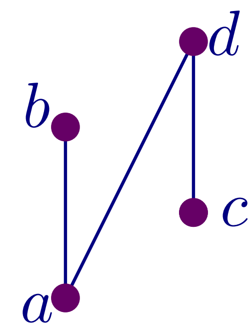
Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$



$$\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} = \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$

$$= 1k + 6\binom{k}{2} + 10\binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}$$

Le polynôme d'ordre

$$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi \text{ homomorphisme de } P \text{ à } (\{0,\dots,k-1\},\leq)\}|$$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

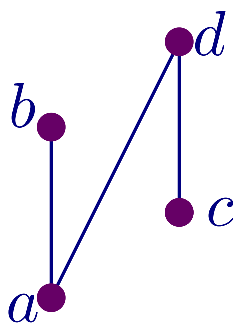
Thm :

nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$



$$\begin{aligned}\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} &= \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4} \\ &= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4} \\ &= 1k + 6\binom{k}{2} + 10\binom{k}{3} + 5\binom{k}{4} \\ &= \frac{5}{24}k^4 + \frac{5}{12}k^3 + \frac{7}{24}k^2 + \frac{1}{12}k\end{aligned}$$

Le polynôme d'ordre

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

seulement définit pour $k \in \mathbb{N}$

nombre d'élélements

Thm :

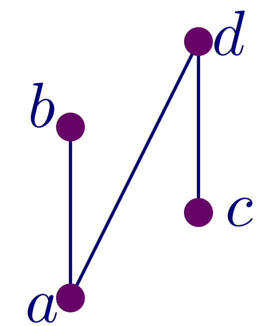
nombre ext. linéaires

Ω peut être étendu à un polynôme reel.

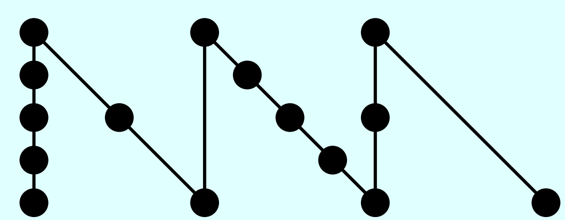
$\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ avec $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{\ell}{n!}$.

$$\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_i \binom{k}{i}$$

$$\begin{aligned}\Omega_N(k) = \sum_{i=1}^{|N|} \varepsilon_i \binom{k}{i} &= \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 \binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + \varepsilon_4 \binom{k}{4} \\ &= 1k + 6\binom{k}{2} + \varepsilon_3 \binom{k}{3} + 5\binom{k}{4} \\ &= 1k + 6\binom{k}{2} + 10\binom{k}{3} + 5\binom{k}{4} \\ &= \frac{5}{24}k^4 + \frac{5}{12}k^3 + \frac{7}{24}k^2 + \frac{1}{12}k\end{aligned}$$



Quest : Est-ce que les coefficients a_i de Ω sont positifs pour un poset zig-zag ?



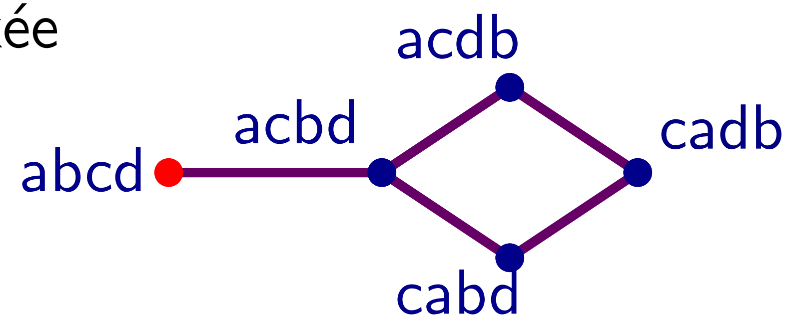
Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée

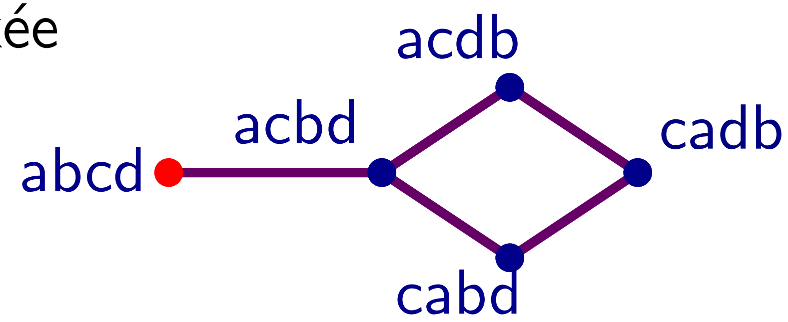


Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée

pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

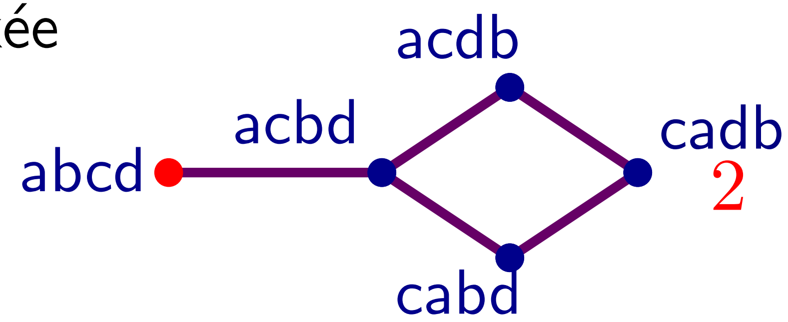


Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi \text{ homomorphisme de } P \text{ à } (\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée

pour chaque L compte le
nombre d'arêtes vers F

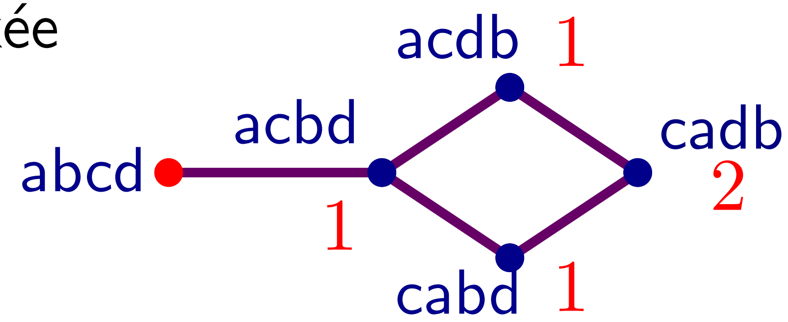


Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée

pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

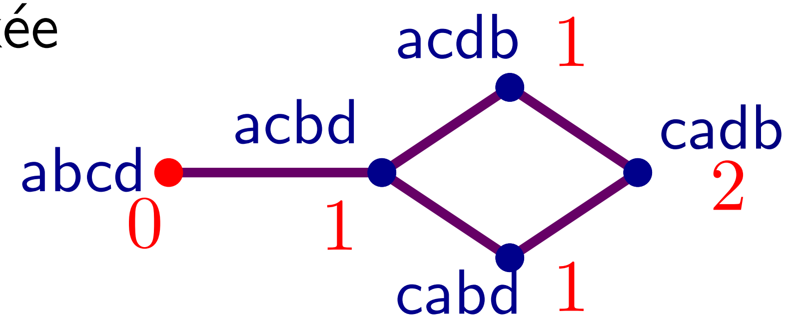


Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée

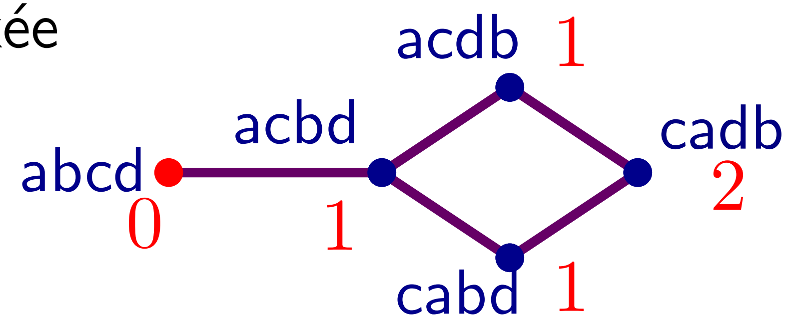
pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F



Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée



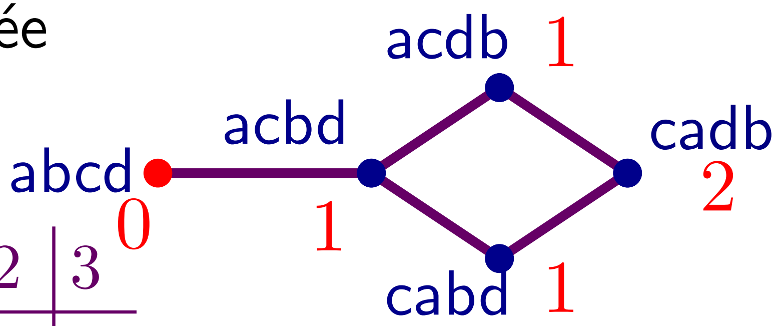
pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

$\omega_P(i)$ compte le nombre de L avec i arêtes vers F

Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée



pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

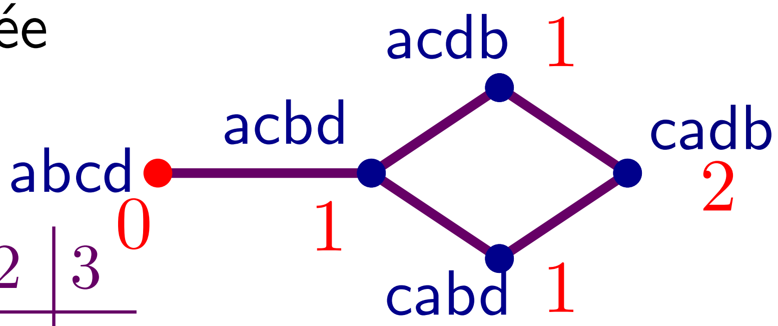
$\omega_P(i)$ compte le nombre de L avec i arêtes vers F

i	0	1	2	3
$\omega_P(i)$	1	3	1	0

Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \ldots, k-1\}, \leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée



pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

$\omega_P(i)$ compte le nombre de L avec i arêtes vers F

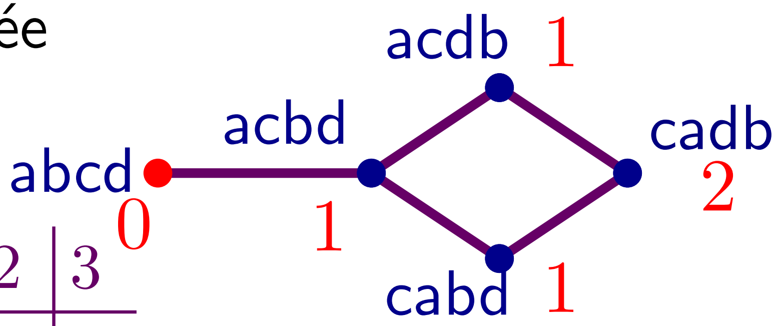
i	0	1	2	3
$\omega_P(i)$	1	3	1	0

Thm :
Soit P un poset à n éléments, alors $\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t-1+n-i}{n}$.

Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée



pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

$\omega_P(i)$ compte le nombre de L avec i arêtes vers F

i	0	1	2	3
$\omega_P(i)$	1	3	1	0

Thm :
Soit P un poset à n éléments, alors $\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i)\binom{t-1+n-i}{n}$.

$$\begin{aligned}\Omega_N(k) &= 1k + 6\binom{k}{2} + 10\binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}\\ &= \frac{5}{24}k^4 + \frac{5}{12}k^3 + \frac{7}{24}k^2 + \frac{1}{12}k\\ &= \binom{k+3}{4} + 3\binom{k+2}{4} + \binom{k+1}{4}.\end{aligned}$$

Le polynôme d'ordre II

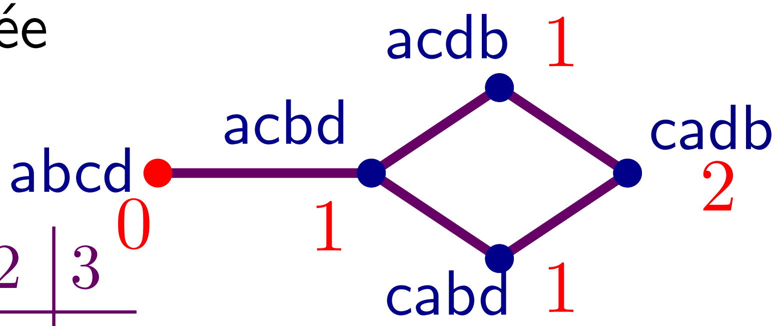
$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0,\ldots,k-1\},\leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée

pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

$\omega_P(i)$ compte le nombre de L avec i arêtes vers F

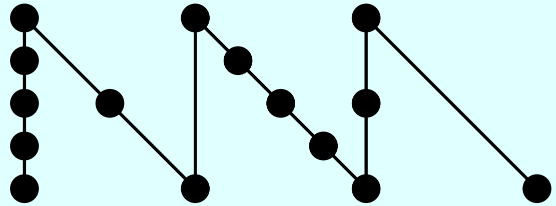
i	0	1	2	3
$\omega_P(i)$	1	3	1	0



Thm :
Soit P un poset à n éléments, alors $\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i)\binom{t-1+n-i}{n}$.

$$\begin{aligned}\Omega_N(k) &= 1k + 6\binom{k}{2} + 10\binom{k}{3} + 5\binom{k}{4}\\ &= \frac{5}{24}k^4 + \frac{5}{12}k^3 + \frac{7}{24}k^2 + \frac{1}{12}k\\ &= \binom{k+3}{4} + 3\binom{k+2}{4} + \binom{k+1}{4}.\end{aligned}$$

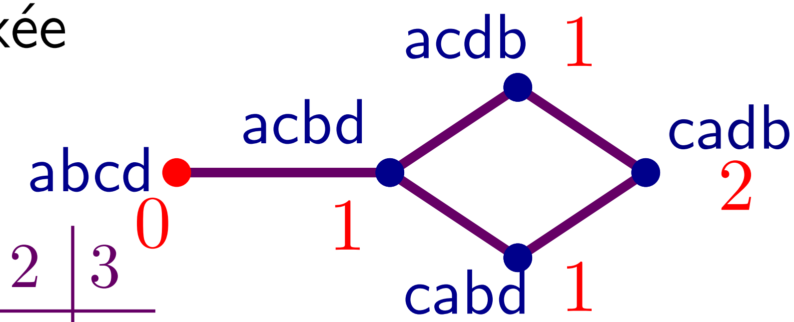
Quest :
Coefficients $\omega(i)$ de Ω pour un poset unimodales ?



Le polynôme d'ordre II

$\Omega_P(k) = |\{\varphi \mid \varphi$ homomorphisme de P à $(\{0, \dots, k-1\}, \leq)\}|$

graphe d'extensions linéaires avec une F fixée



pour chaque L compte le nombre d'arêtes vers F

$\omega_P(i)$ compte le nombre de L avec i arêtes vers F

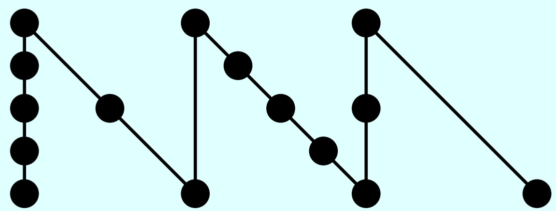
i	0	1	2	3
$\omega_P(i)$	1	3	1	0

Thm :
Soit P un poset à n éléments, alors $\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t-1+n-i}{n}$.

$$\begin{aligned}\Omega_N(k) &= 1k + 6\binom{k}{2} + 10\binom{k}{3} + 5\binom{k}{4} \\ &= \frac{5}{24}k^4 + \frac{5}{12}k^3 + \frac{7}{24}k^2 + \frac{1}{12}k \\ &= \binom{k+3}{4} + 3\binom{k+2}{4} + \binom{k+1}{4}.\end{aligned}$$

$\exists_i$ tq si $i' \leq i \leq i''$ alors $\omega(i') \leq \omega(i) \geq \omega(i'')$

Quest :
Coefficients $\omega(i)$ de Ω pour un poset unimodales ?



Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

Dimension d'un poset

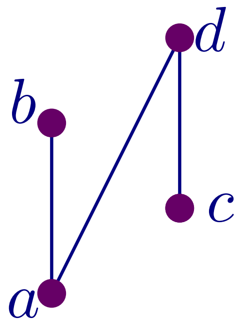
réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

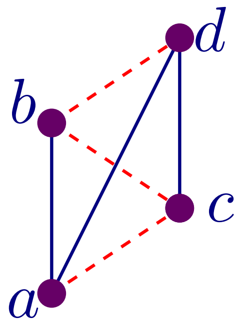
$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$



Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

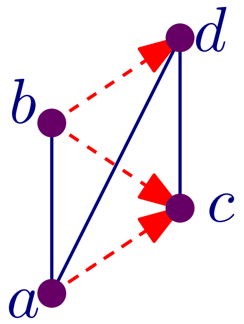
$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

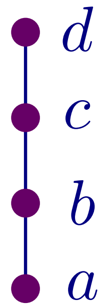


Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

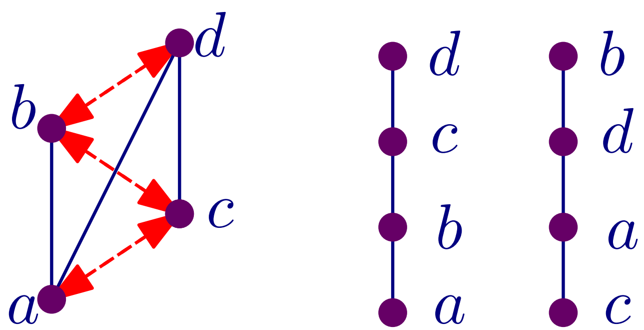




Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

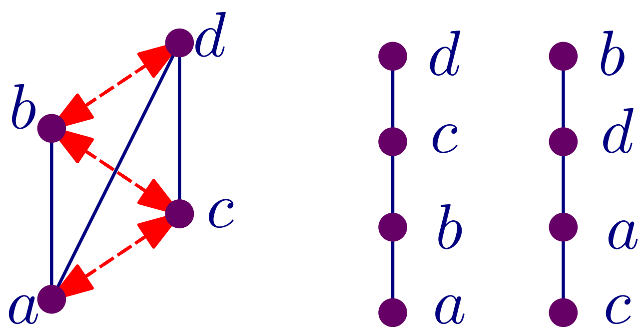
$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$



Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

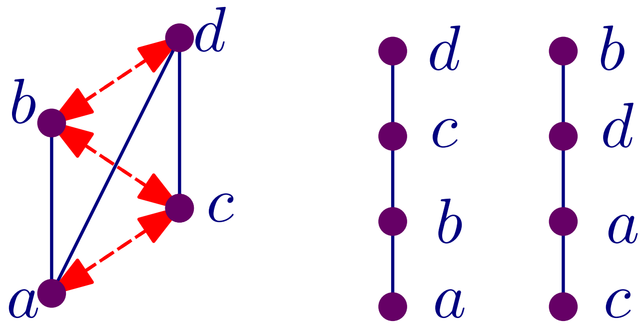


dimension de X taille minimale d'un réalisateur

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$



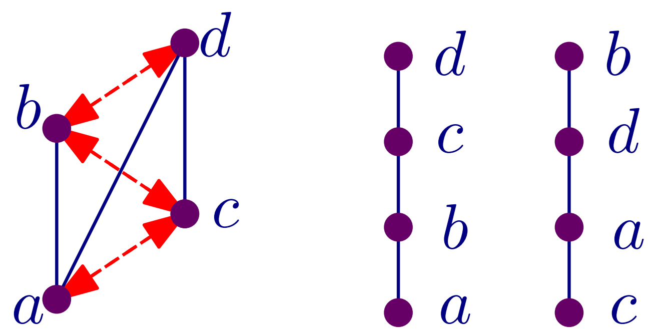
dimension de X taille minimale d'un réalisateur

dim(N)≤ 2

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$



dimension de X taille minimale d'un réalisateur

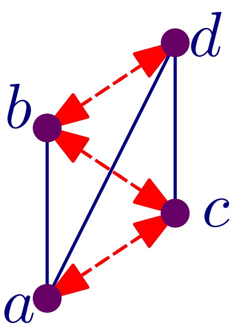
$1 <$ dim(N)≤ 2

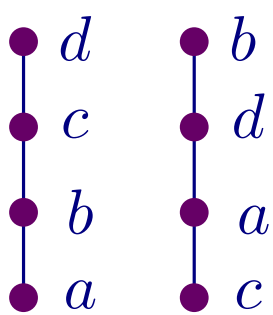
si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

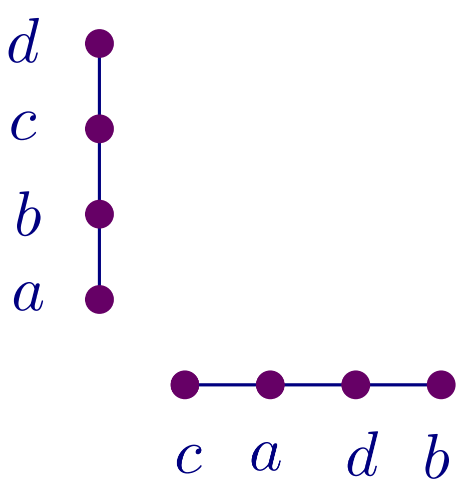




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

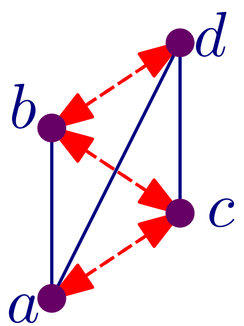
si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$

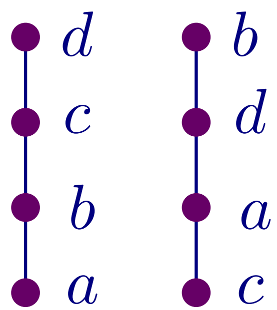


Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

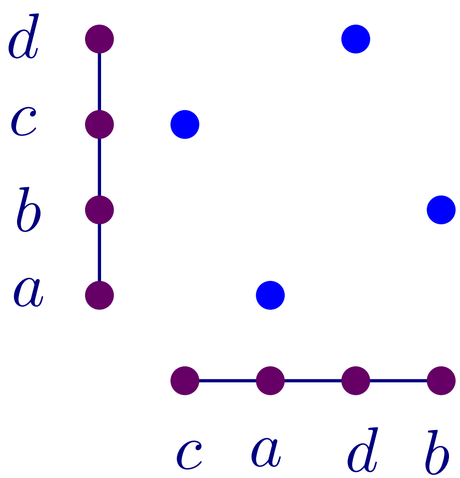




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

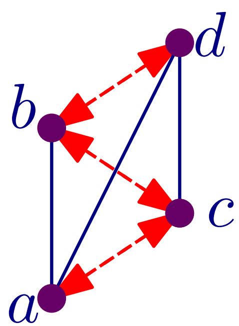
si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$

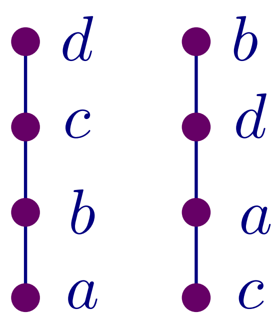


Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

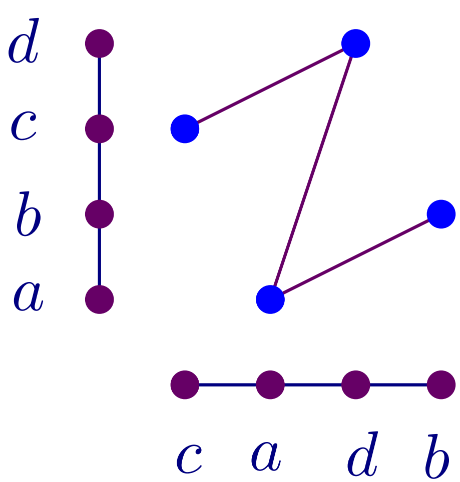




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



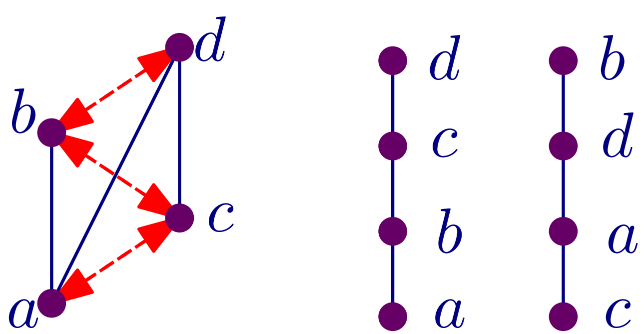
ordonner par composantes

Lemme : dim(X) =min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

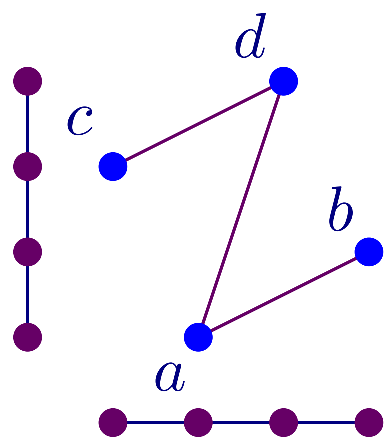
$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$



dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

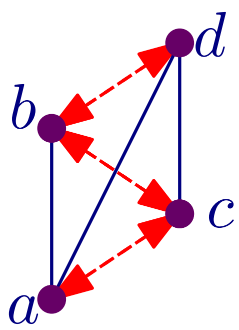
Lemme : dim(X) $=$min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

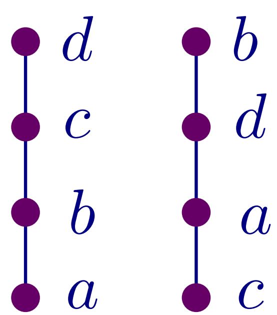
$X \subseteq \mathbb{N}^n \rightsquigarrow L_i := x \leq_{L_i} y$ si $x_i \leq y_i, \forall i \in [n]$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

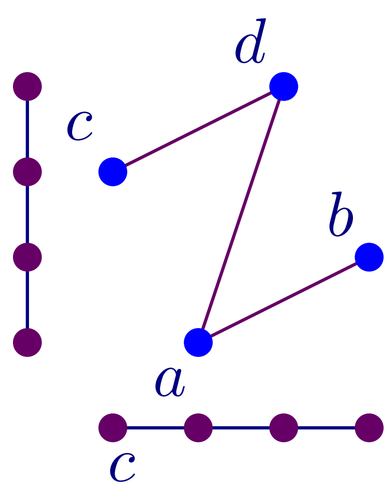




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$=1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

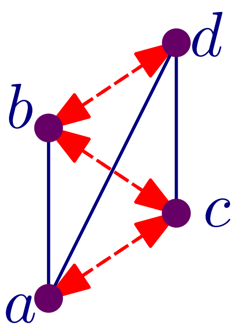
Lemme : dim(X) $=$min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

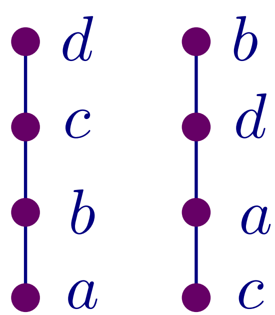
$X \subseteq \mathbb{N}^n \rightsquigarrow L_i := x \leq_{L_i} y$ si $x_i \leq y_i, \forall i \in [n]$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

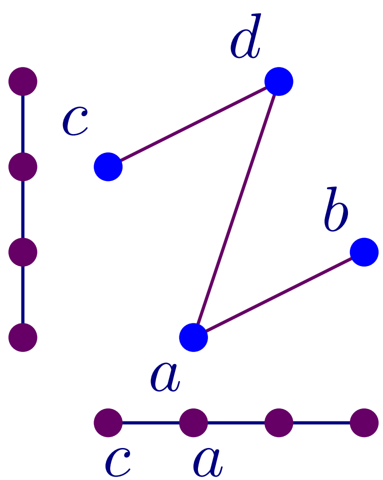




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

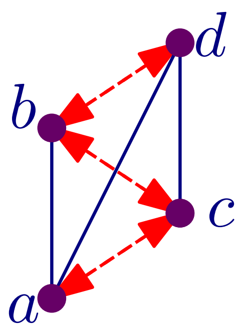
Lemme : dim(X) =min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

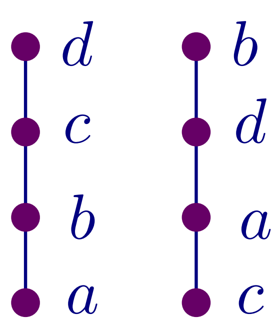
$X \subseteq \mathbb{N}^n \rightsquigarrow L_i := x \leq_{L_i} y$ si $x_i \leq y_i, \forall i \in [n]$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

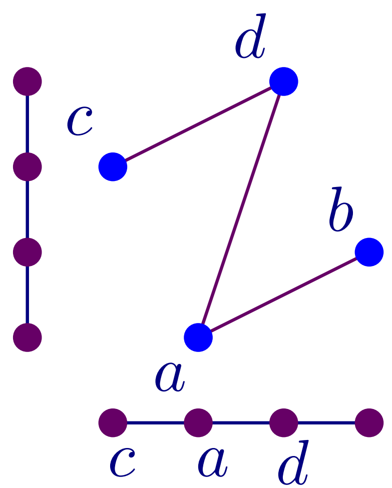




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

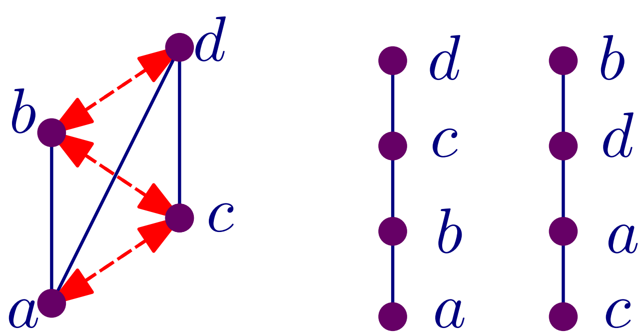
Lemme : dim(X) =min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

$X \subseteq \mathbb{N}^n \rightsquigarrow L_i := x \leq_{L_i} y$ si $x_i \leq y_i, \forall i \in [n]$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

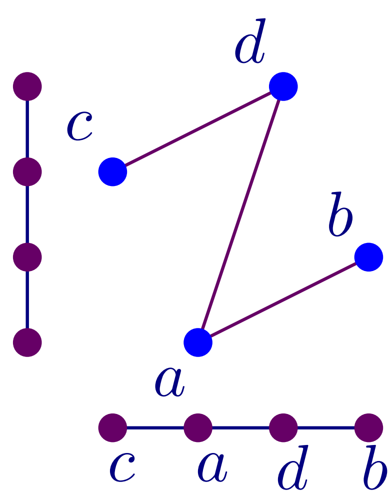
$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$



dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

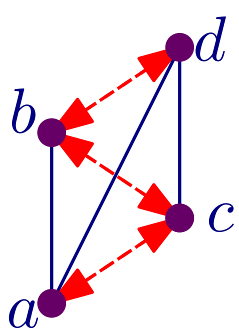
Lemme : dim(X) =min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

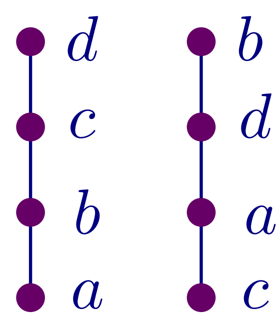
$X \subseteq \mathbb{N}^n \rightsquigarrow L_i := x \leq_{L_i} y$ si $x_i \leq y_i, \forall i \in [n]$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

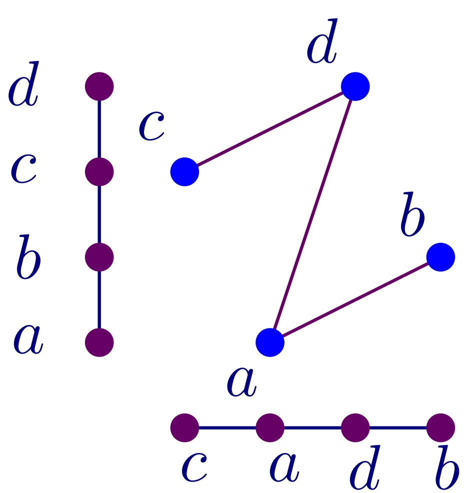




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

si dim$=1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

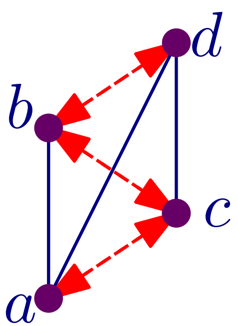
Lemme : dim(X) =min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

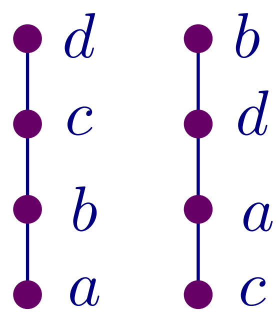
$X \subseteq \mathbb{N}^n \rightsquigarrow L_i := x \leq_{L_i} y$ si $x_i \leq y_i, \forall i \in [n]$

Dimension d'un poset

réalisateur de X est un ensemble $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ d'extensions linéaires de X tq $X = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$

$\forall x, y \in X$ incomparable $\exists L_i, L_j \in \mathcal{R}$ tq $x \leq_{L_i} y$ et $y \leq_{L_j} x$

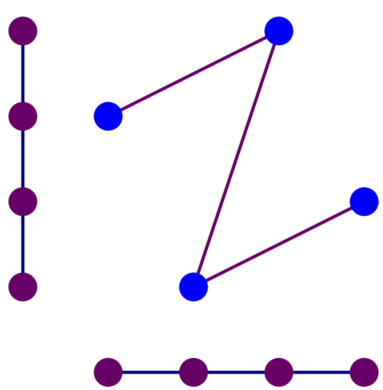




dimension de X taille minimale d'un réalisateur

$1 <$ dim(N)≤ 2

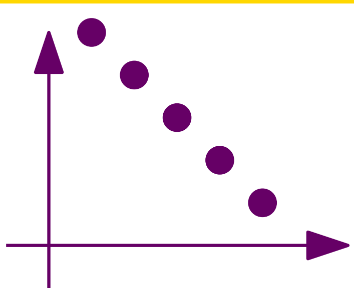
si dim$= 1$, tout $x, y \in X$ comparable, donc $X = C_n$



ordonner par composantes

Lemme : dim(X) $=$min n tq X est un sous-poset de $\mathbb{N}^n$

$\rightsquigarrow$ dim(antichaîne)$= 2$

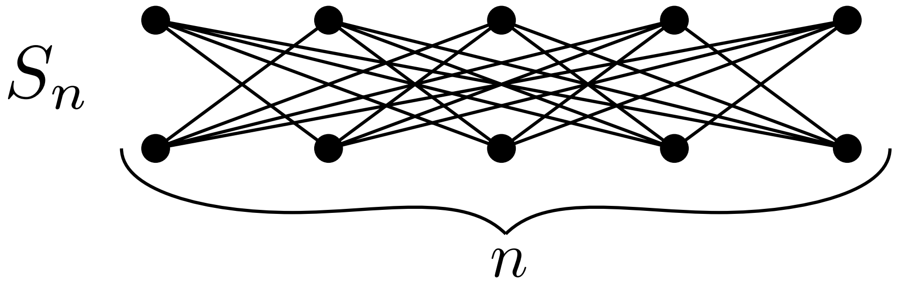


Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

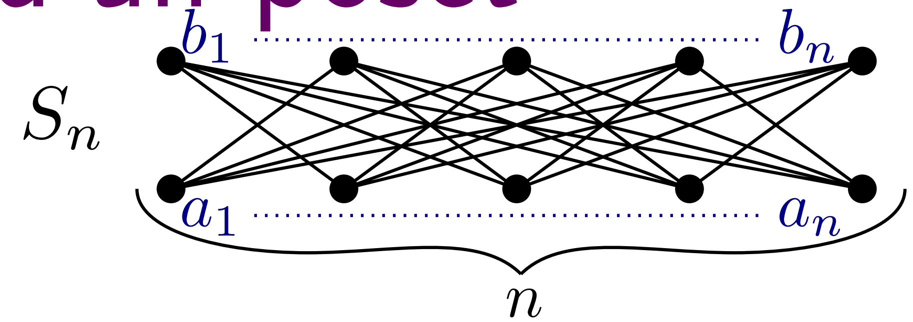
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.



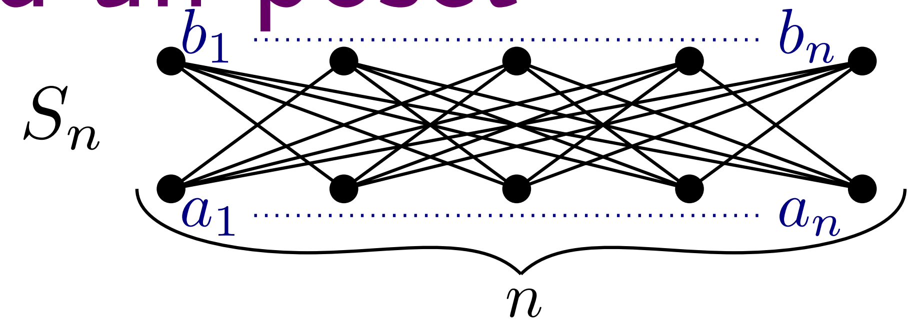
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

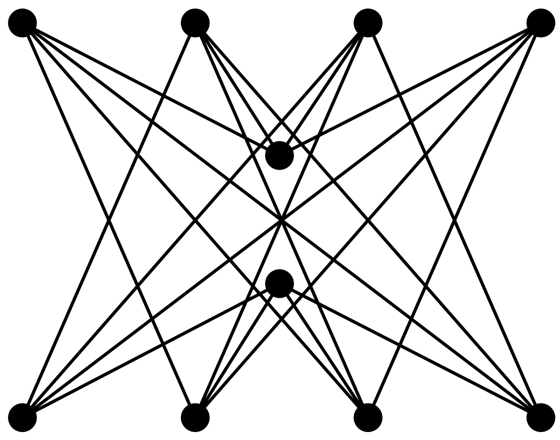


Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.



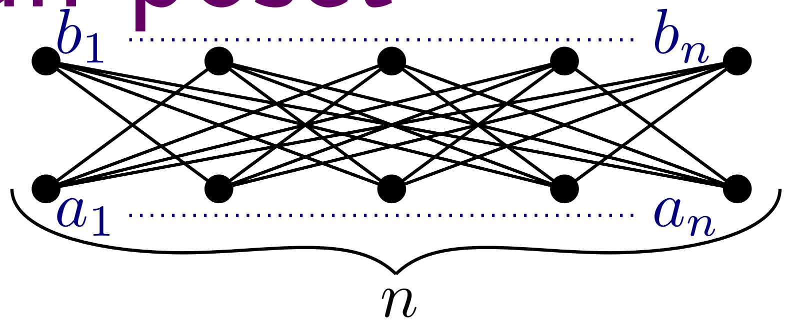
L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$



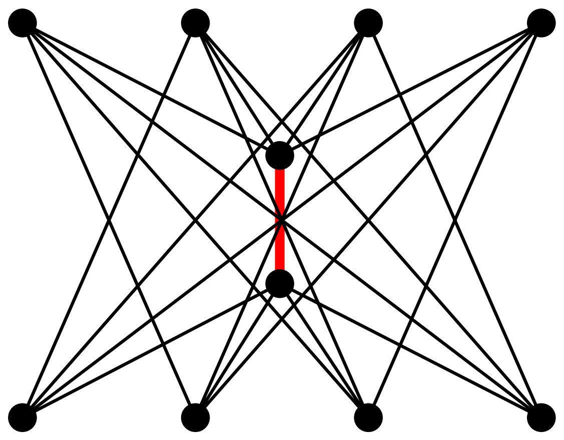
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

S_n

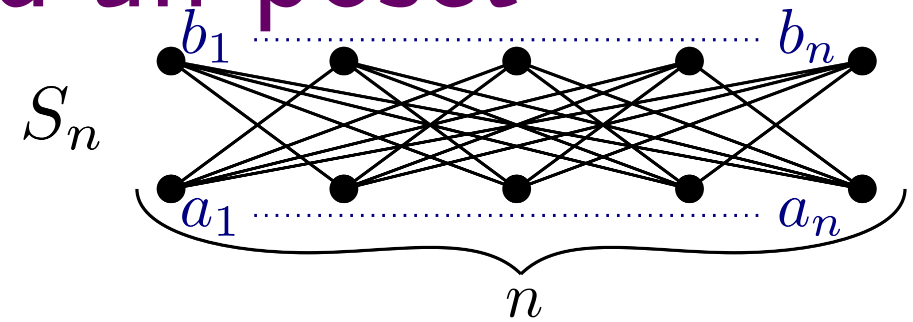


L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$

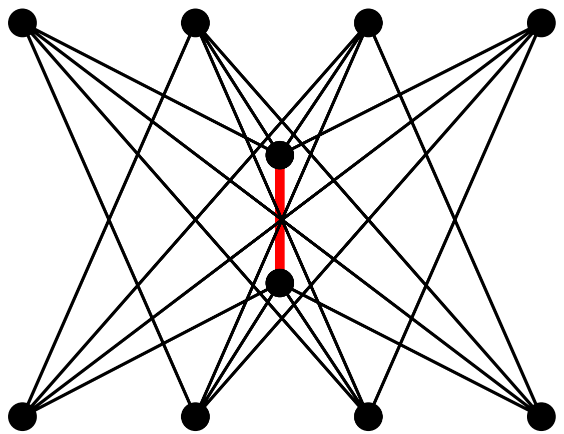


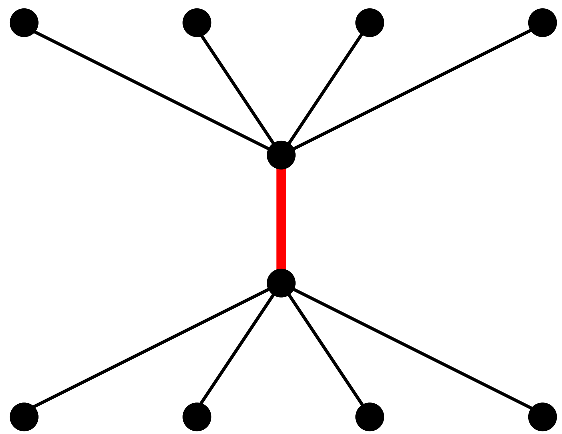
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.



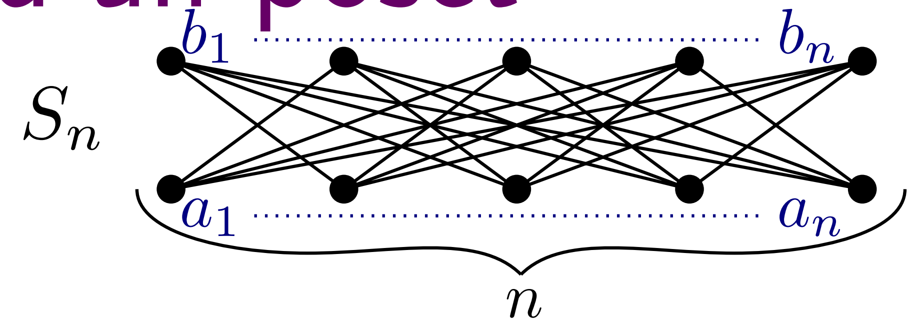
L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$



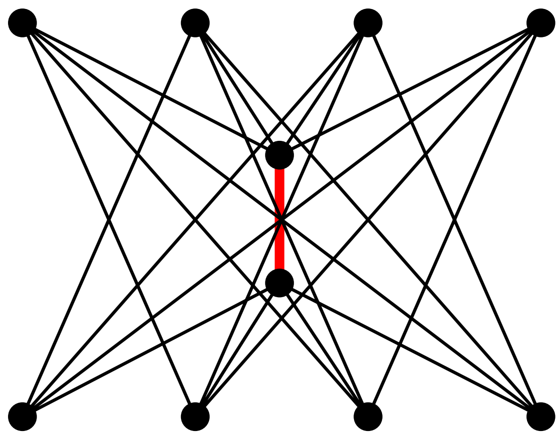


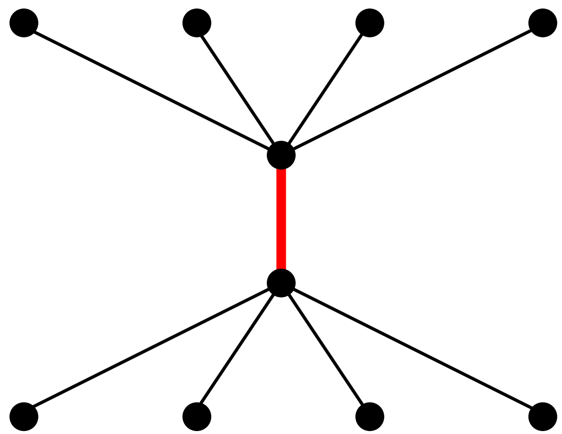
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq dim$(X) = n$.



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow$ $a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$

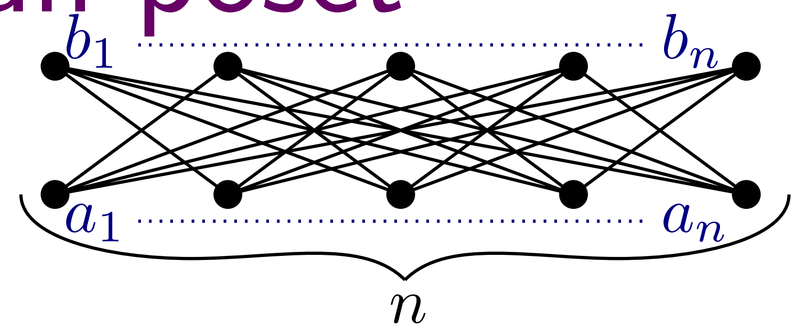




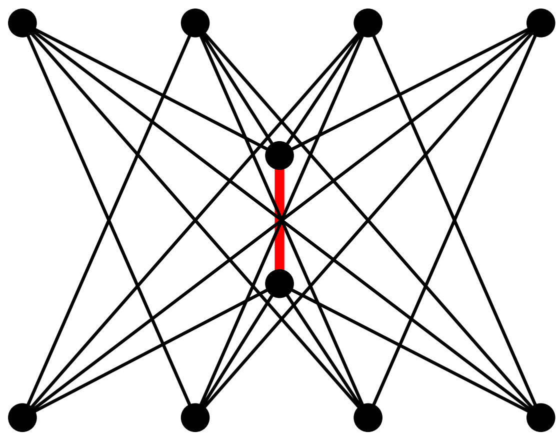
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

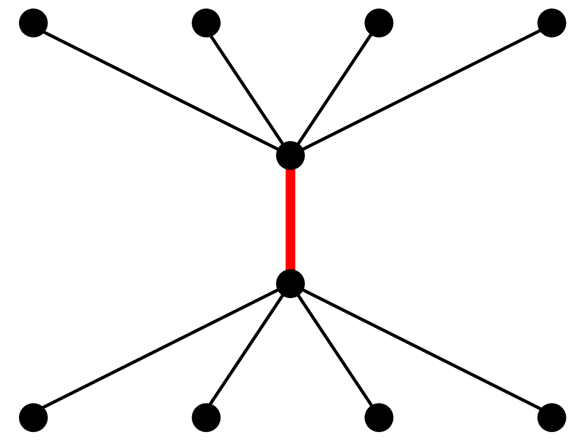
S_n



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



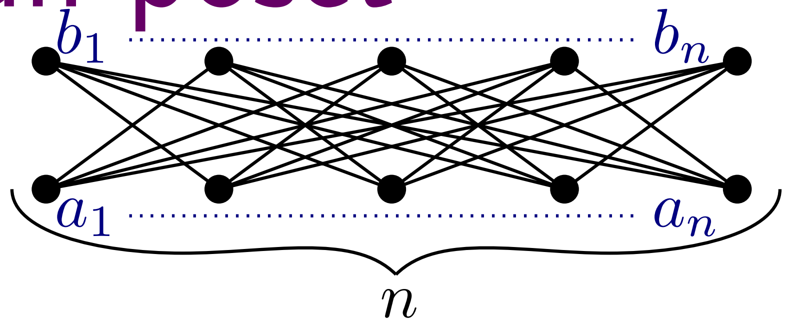
$\Longrightarrow \dim(S_n) \geq n$



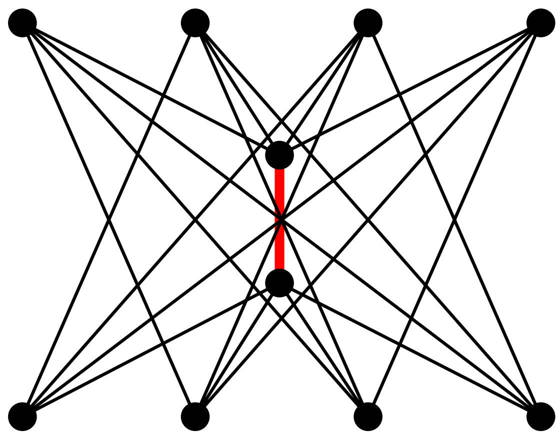
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

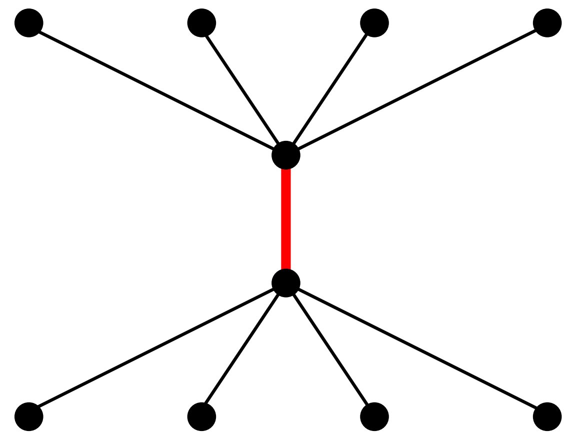
S_n



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



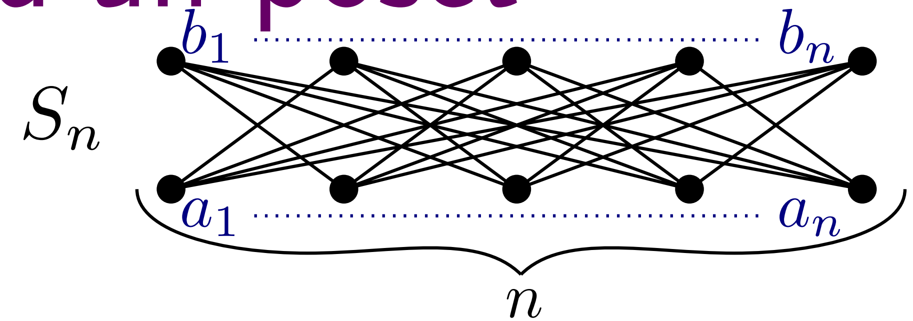
$\Longrightarrow \dim(S_n) \geq n$



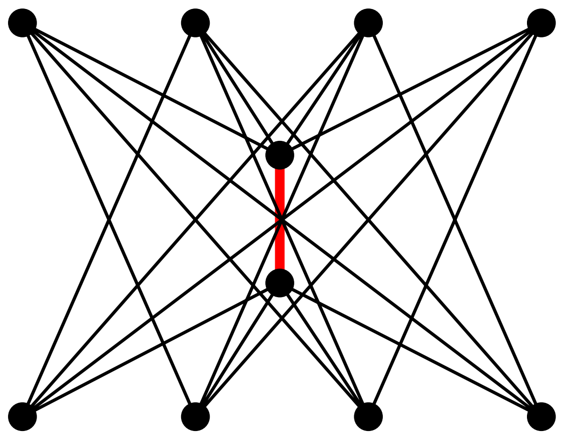
$$a_i \mapsto e_i = (0, \ldots 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$$

Dimension d'un poset

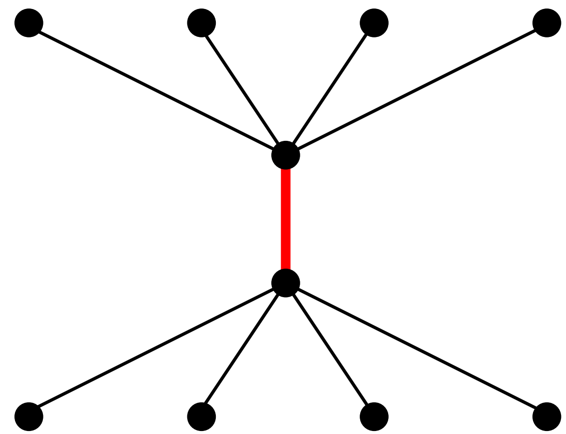
Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



$\implies \dim(S_n) \geq n$

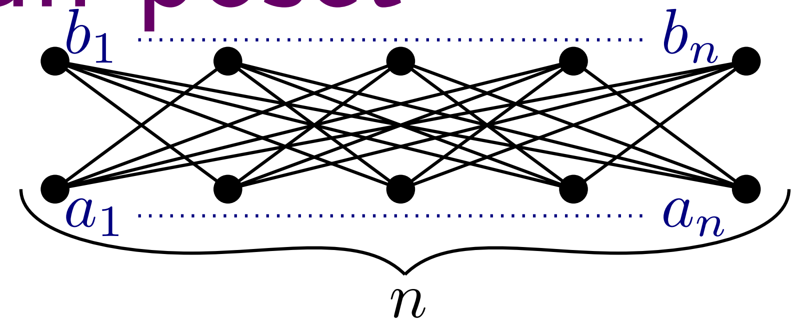


$$a_i \mapsto e_i = (0, \ldots 0, \overset{\color{red}{i}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$$
$$b_i \mapsto e_i' = (1, \ldots 1, \underset{\color{red}{i}}{0}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$$

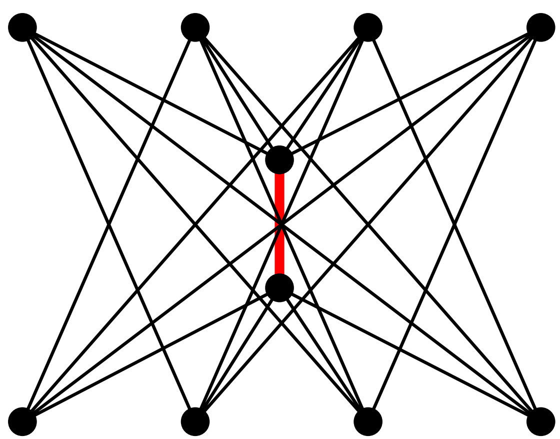
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

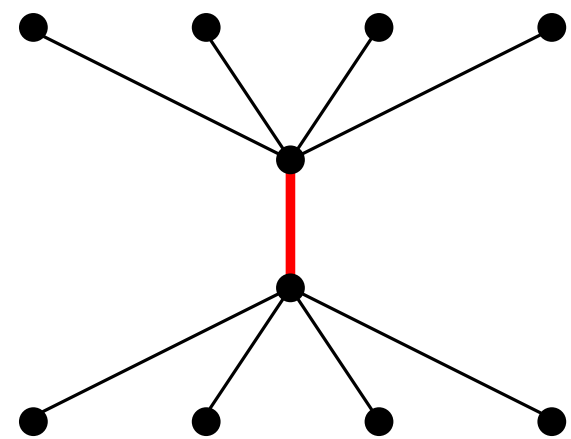
S_n



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



$\implies \dim(S_n) \geq n$



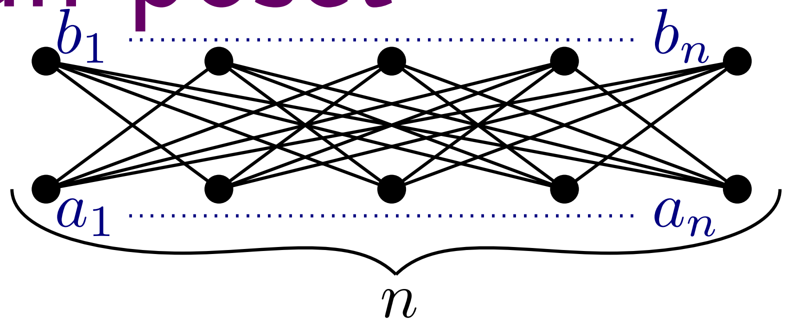
$$a_i \mapsto e_i = (0, \dots 0, \overset{\color{red}i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$$
$$b_i \mapsto e_i' = (1, \dots 1, \underset{\color{red}i}{0}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$$

tout les a_i incomparables

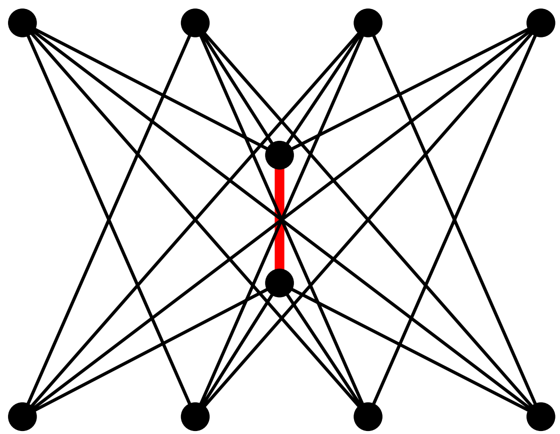
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

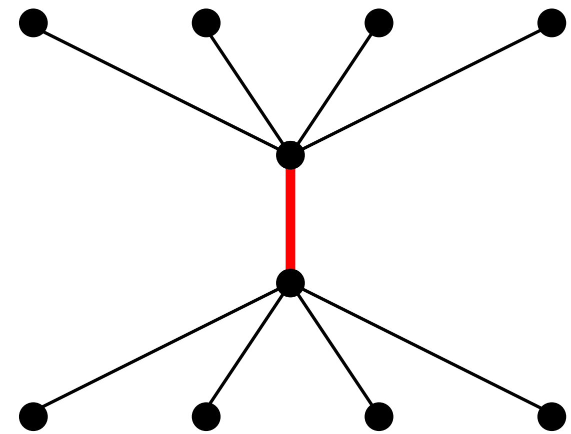
S_n



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



$\Longrightarrow \dim(S_n) \geq n$



$$a_i \mapsto e_i = (0, \ldots 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$$
$$b_i \mapsto e'_i = (1, \ldots 1, \underset{i}{0}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$$

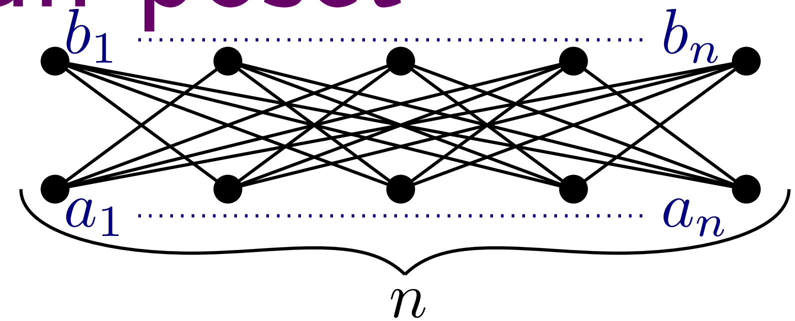
tout les a_i incomparables

tout les b_i incomparables

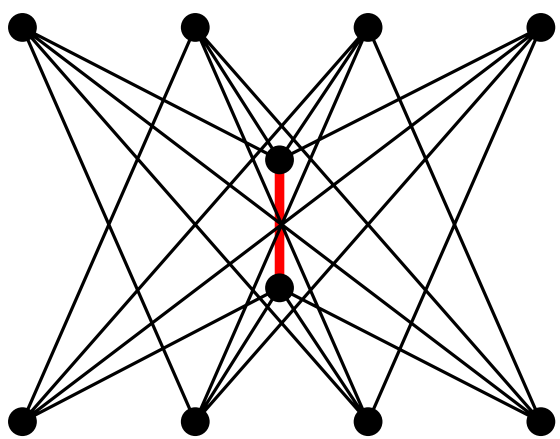
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

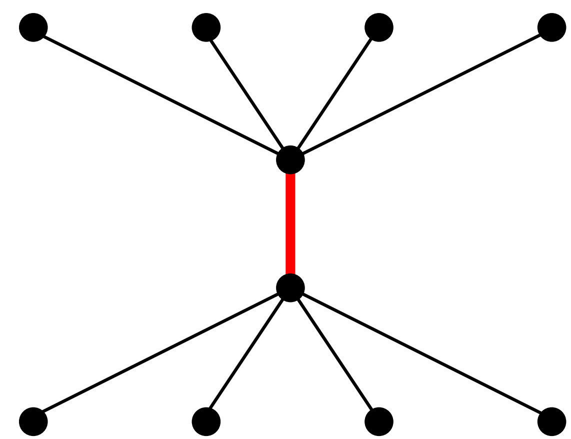
S_n



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow$ $a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



$\implies \dim(S_n) \geq n$



$$a_i \mapsto e_i = (0, \ldots 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$$
$$b_i \mapsto e_i' = (1, \ldots 1, \underset{i}{0}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$$

tout les a_i incomparables

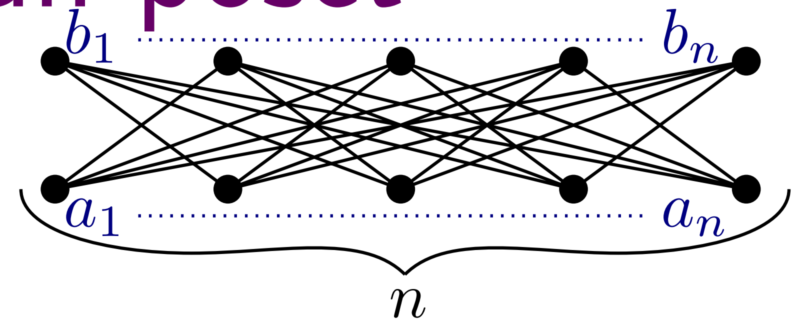
tout les b_i incomparables

$a_j \leq b_i$ ssi $i \neq j$

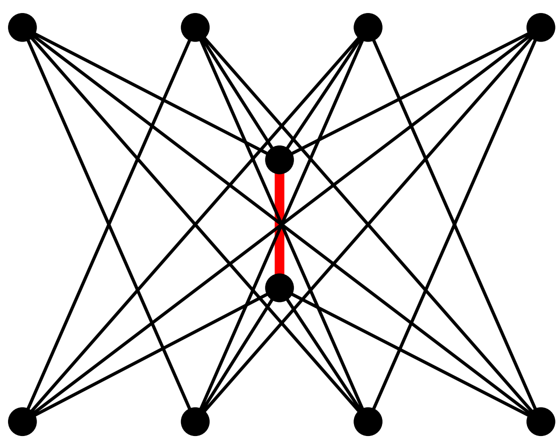
Dimension d'un poset

Lemme : $\forall n \exists X$ tq $\dim(X) = n$.

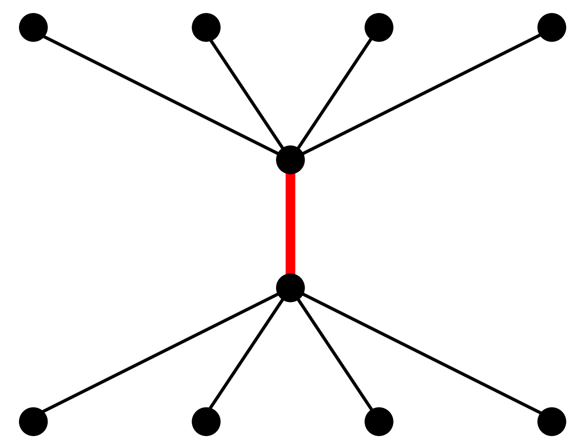
S_n



L_i extension linéaire tq $b_i \leq_{L_i} a_i$ $\rightsquigarrow a_j \leq_{L_i} b_j$ pour tout $j \neq i$



$\implies \dim(S_n) \geq n$



$$a_i \mapsto e_i = (0, \dots 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$$
$$b_i \mapsto e'_i = (1, \dots 1, \underset{i}{0}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$$

tout les a_i incomparables

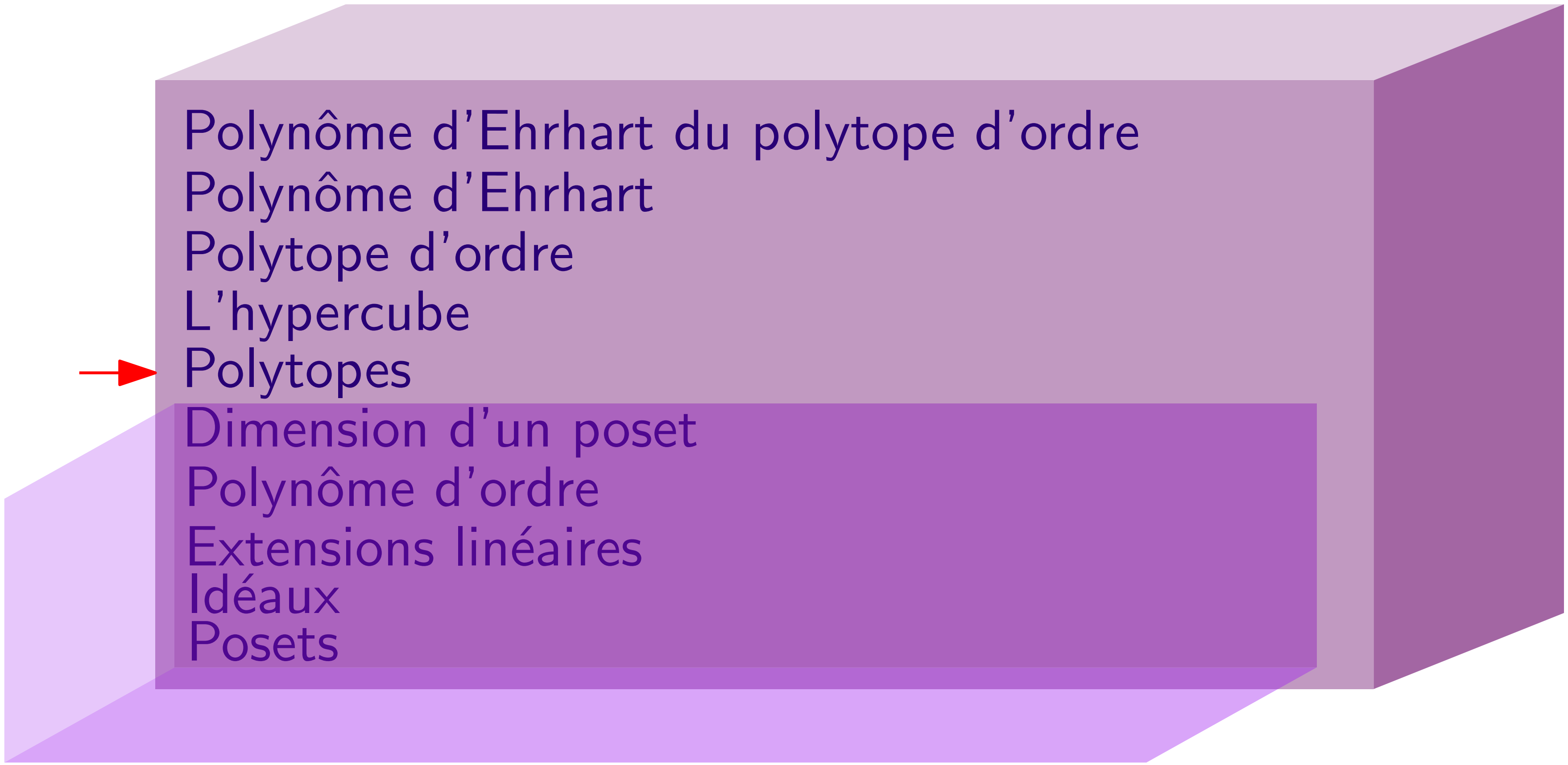
tout les b_i incomparables

$a_j \leq b_i$ ssi $i \neq j$

$$\implies \dim(S_n) \leq n$$

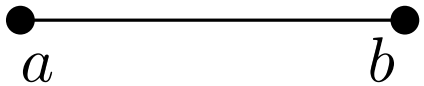
Polytôpes

Polytôpes


Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre
Polynôme d'Ehrhart
Polytope d'ordre
L'hypercube
Polytopes
Dimension d'un poset
Polynôme d'ordre
Extensions linéaires
Idéaux
Posets

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

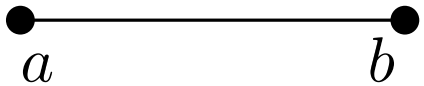


Polytôpes

en $\mathbb{R}$:  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

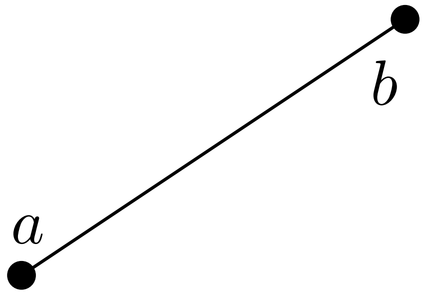


$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:

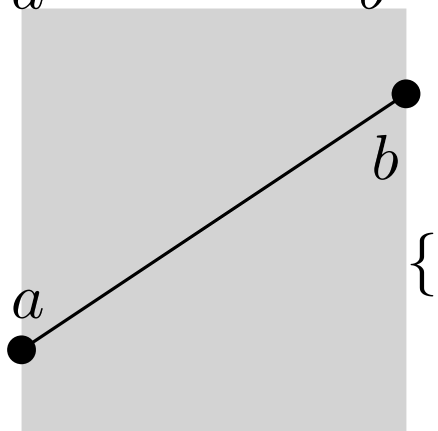


Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



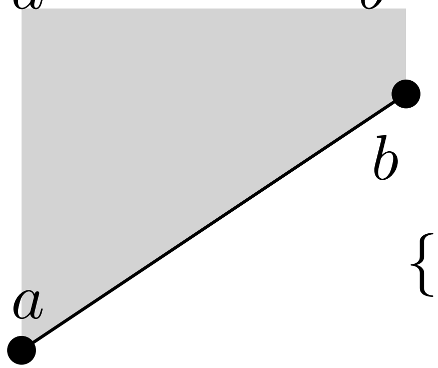
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \right\}$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

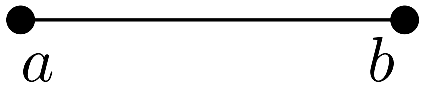
en $\mathbb{R}^2$:



$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} x_1 + a_2 - \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} a_1 \leq x_2 \end{array} \right\}$$

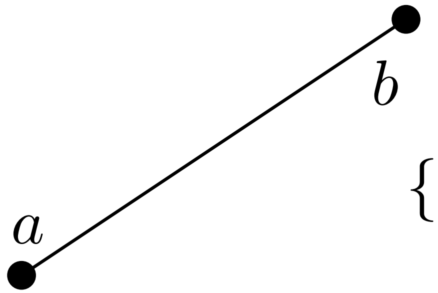
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



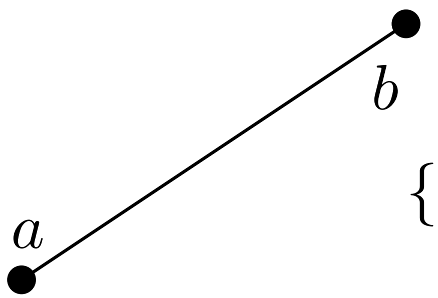
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 - a_2 + \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 \leq -x_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 + a_2 - \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 \leq x_2 \end{array} \right\}$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



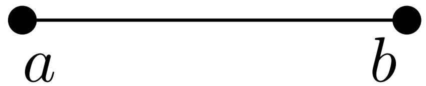
$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 - a_2 + \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 \leq -x_2$$

$$\{\ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix}\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$

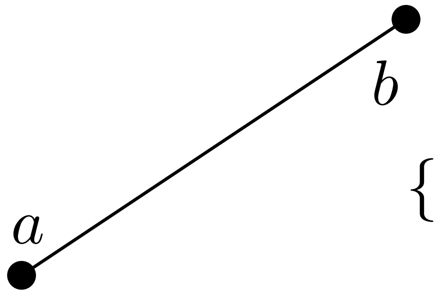
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



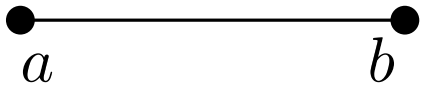
$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$

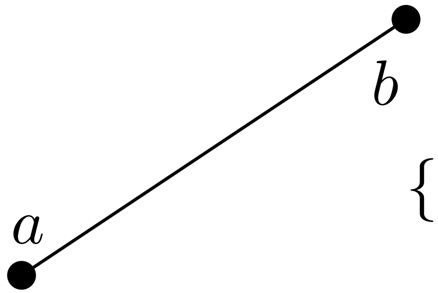
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



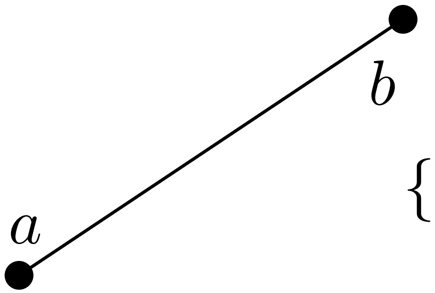
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2 \end{array} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

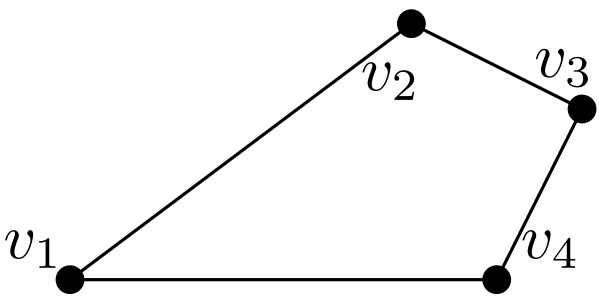
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{array} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$

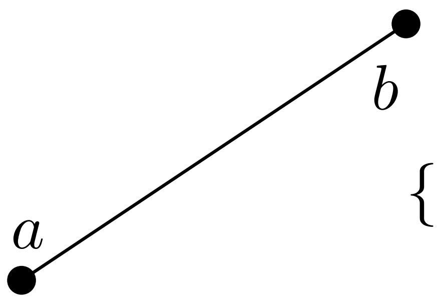


Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

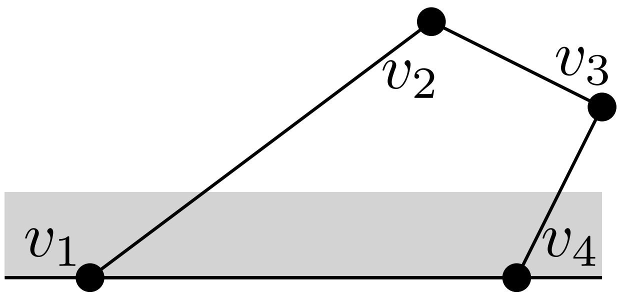
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{array} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$



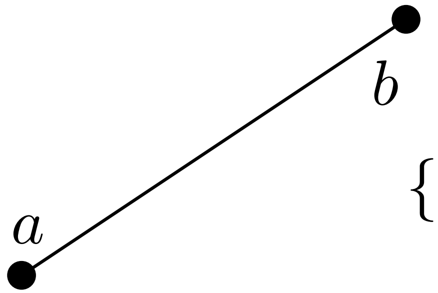
$$a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \leq b_1$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

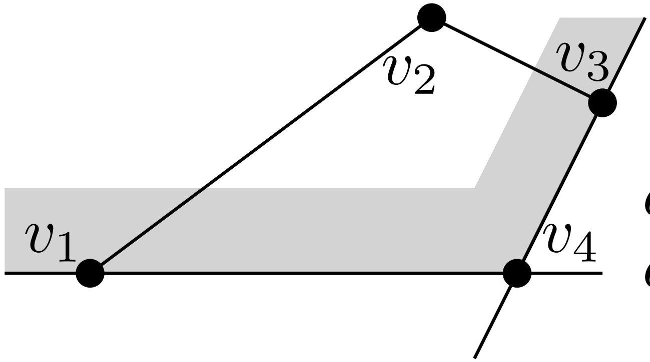
en $\mathbb{R}^2$:



$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$

$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{array} \right\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

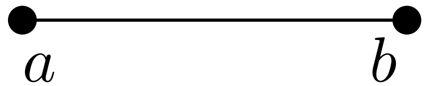
$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$



$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 \leq b_2$
$a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \leq b_1$

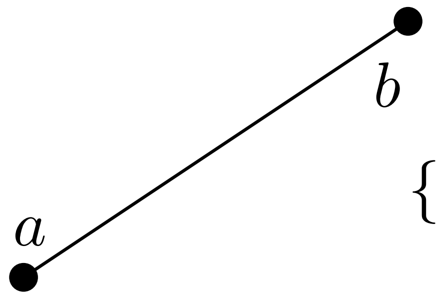
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

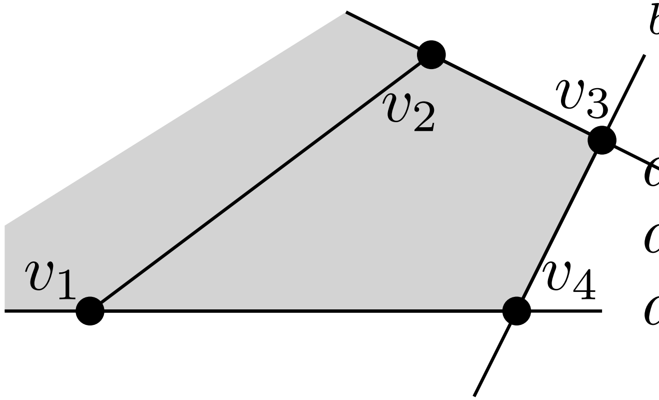
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} x_1 + x_2 \leq \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} a_1 + a_2$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} x_1 - x_2 \leq \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} a_1 - a_2$$



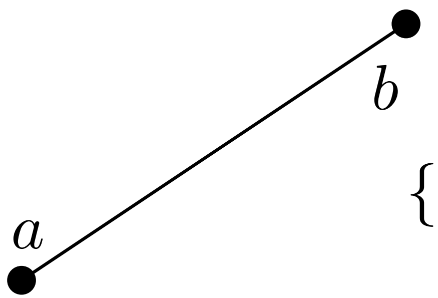
$$a_1^3 x_1 + a_2^3 x_2 \leq b_3$$
$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 \leq b_2$$
$$a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \leq b_1$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

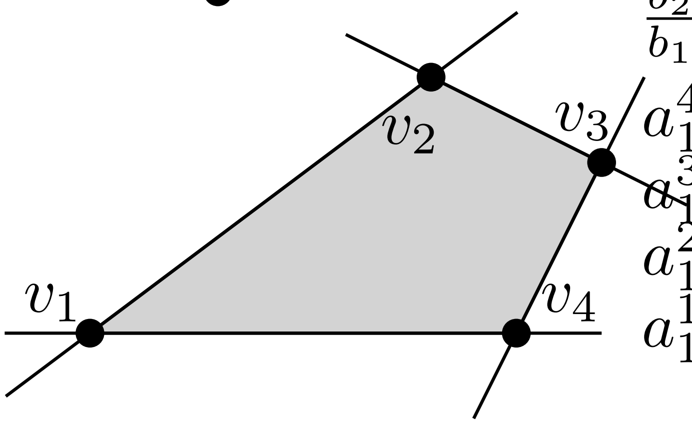
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{array} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$



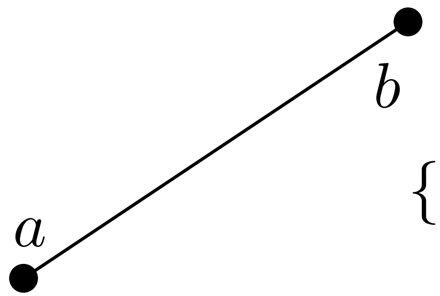
$$a_1^4 x_1 + a_2^4 x_2 \leq b_4$$
$$a_1^3 x_1 + a_2^3 x_2 \leq b_3$$
$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 \leq b_2$$
$$a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \leq b_1$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

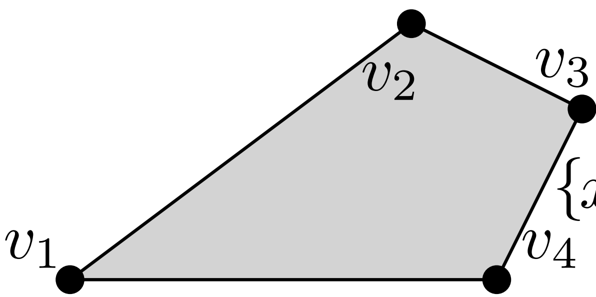
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$



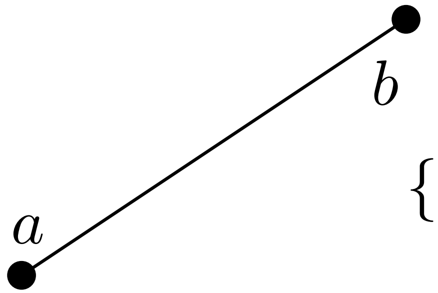
$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \}$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

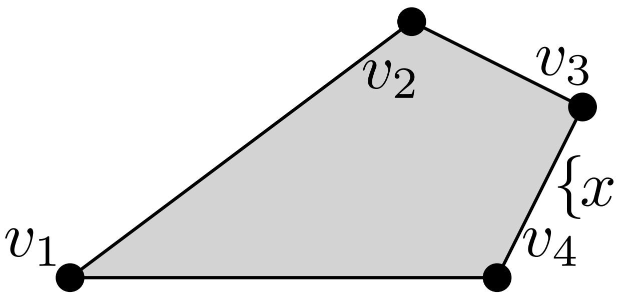
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$

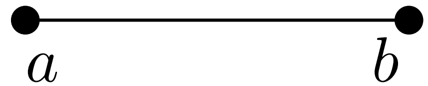


$$\{\textstyle\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \right\}$$

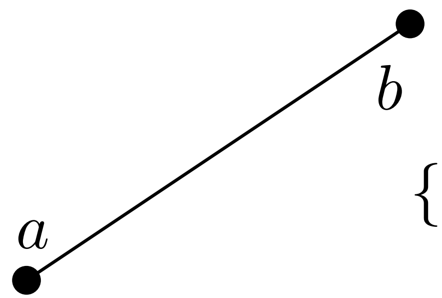
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

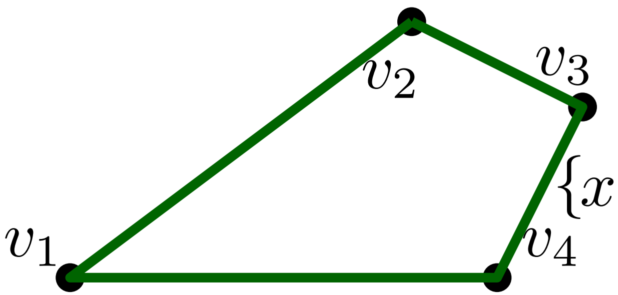
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$



$$\{\textstyle\sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 \,\&\, \lambda_i \geq 0\}$$

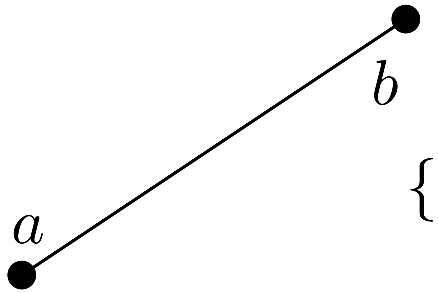
$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \}$$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

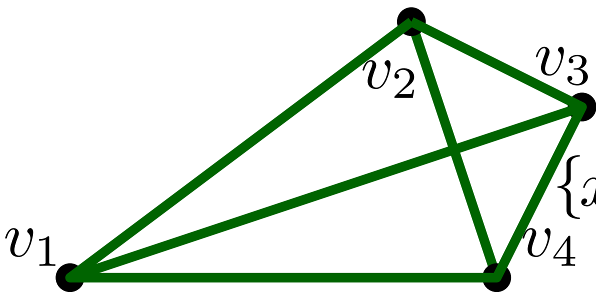
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2 \end{array} \right\}$$

$\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$



$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix}\}$$

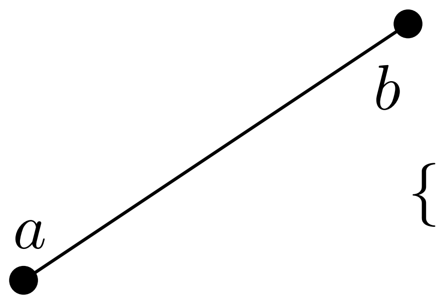
$\{\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

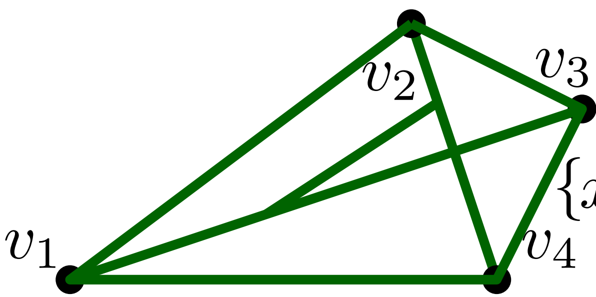
en $\mathbb{R}^2$:



$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$

$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$



$\{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

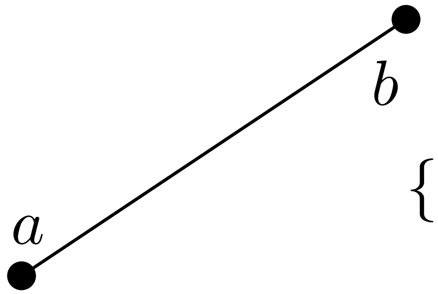
$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \}$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

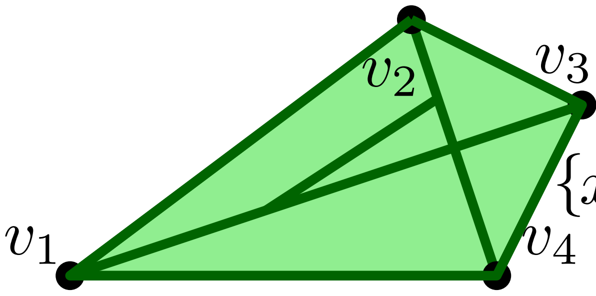
en $\mathbb{R}^2$:



$$\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2$$



$$\{\textstyle\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

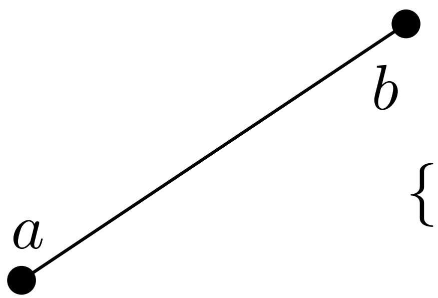
$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \}$$

Polytôpes

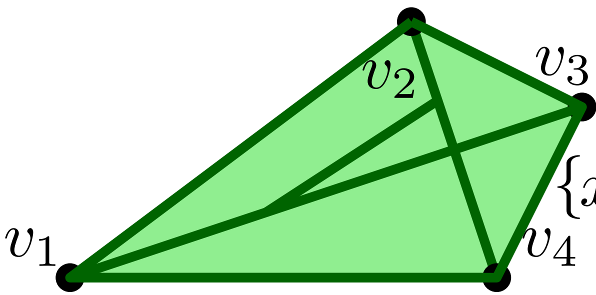
en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2 \end{array} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$



$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \right\} \quad \{\textstyle\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

$\uparrow$

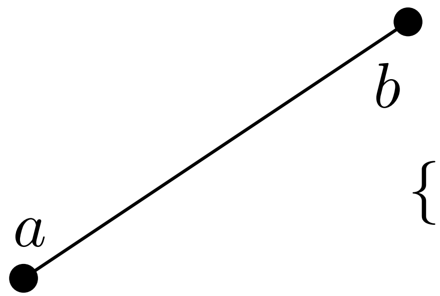
conv$(v_1, \ldots, v_4)$

Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

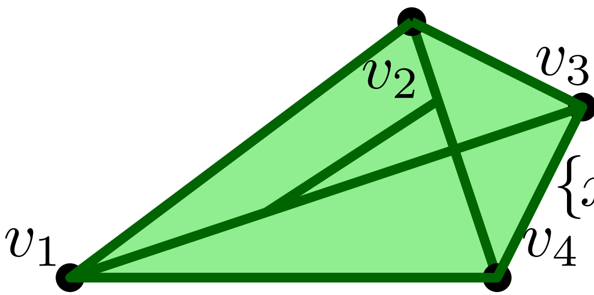
en $\mathbb{R}^2$:



$\frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} x_1 + x_2 \leq \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} a_1 + a_2$

$\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \end{matrix} \}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} x_1 - x_2 \leq \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} a_1 - a_2$



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \}$

$\{\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

$\uparrow$

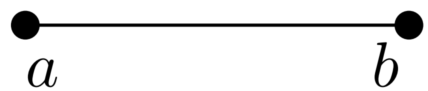
conv$(v_1, \ldots, v_4)$

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

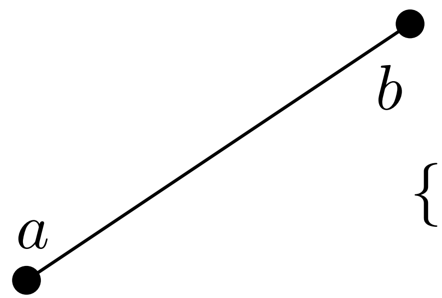
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

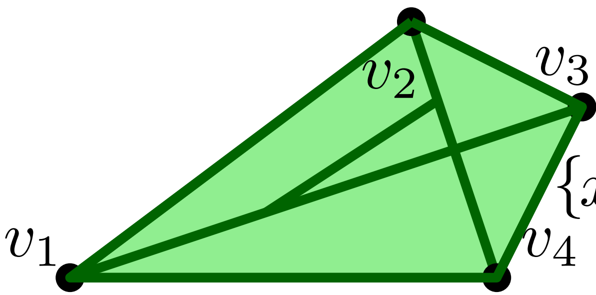


$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



$$\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2 \end{array} \} \qquad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$



$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \}$$

$$\{\textstyle\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

conv$(v_1, \ldots, v_4)$

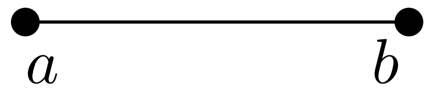
un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

$\mathcal{H}$-description $\qquad$ $\mathcal{V}$-description

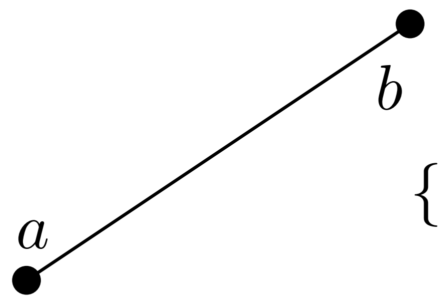
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:



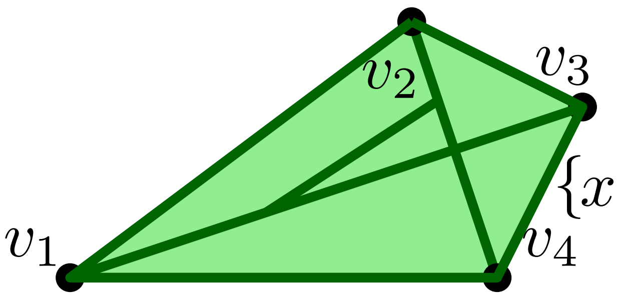
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}a_1 + a_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}a_1 - a_2 \end{array} \right\}$$

$\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$



$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix}\right\}$$

$\{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

conv$(v_1, \ldots, v_4)$

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

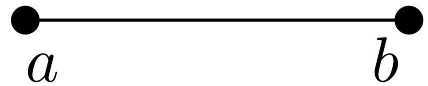
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

$\mathcal{H}$-description $\mathcal{V}$-description

théorème fondamentale des polytôpes

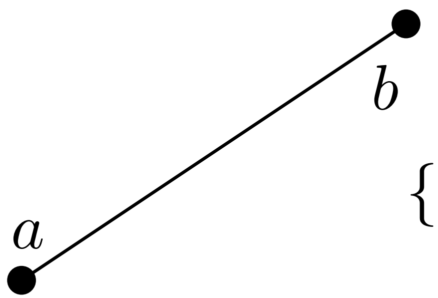
Polytôpes

en $\mathbb{R}$:

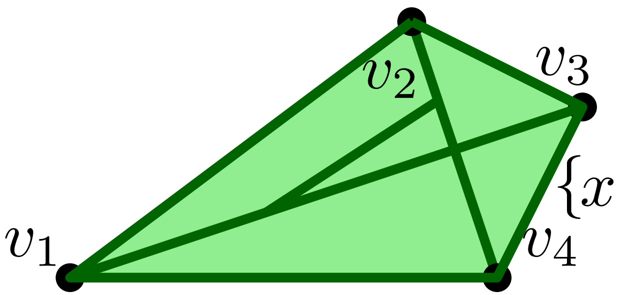


$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$

en $\mathbb{R}^2$:



$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1} x_1 + x_2 \leq \frac{a_2-b_2}{b_1-a_1} a_1 + a_2 \\ x_1 \leq b_1 \\ -x_1 \leq -a_1 \\ \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} x_1 - x_2 \leq \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} a_1 - a_2 \end{array} \right\} \quad \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$$



$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \right\} \quad \{\textstyle\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

conv$(v_1, \ldots, v_4)$

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

$\mathcal{H}$-description $\mathcal{V}$-description

théorème fondamentale des polytôpes

hyperplans sommets

Polytôpes

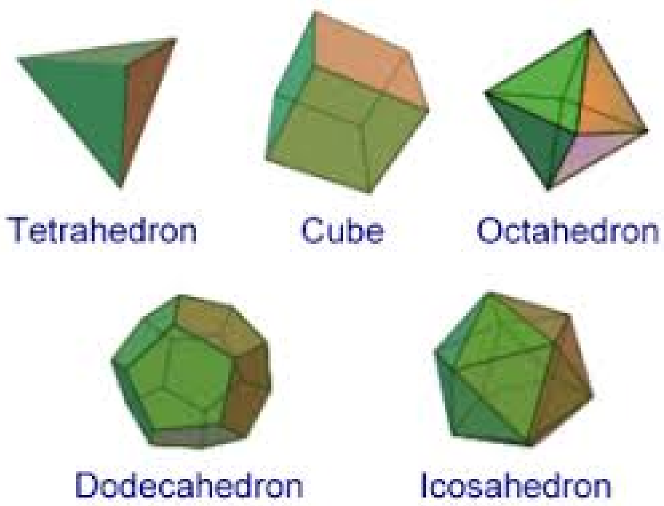
un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

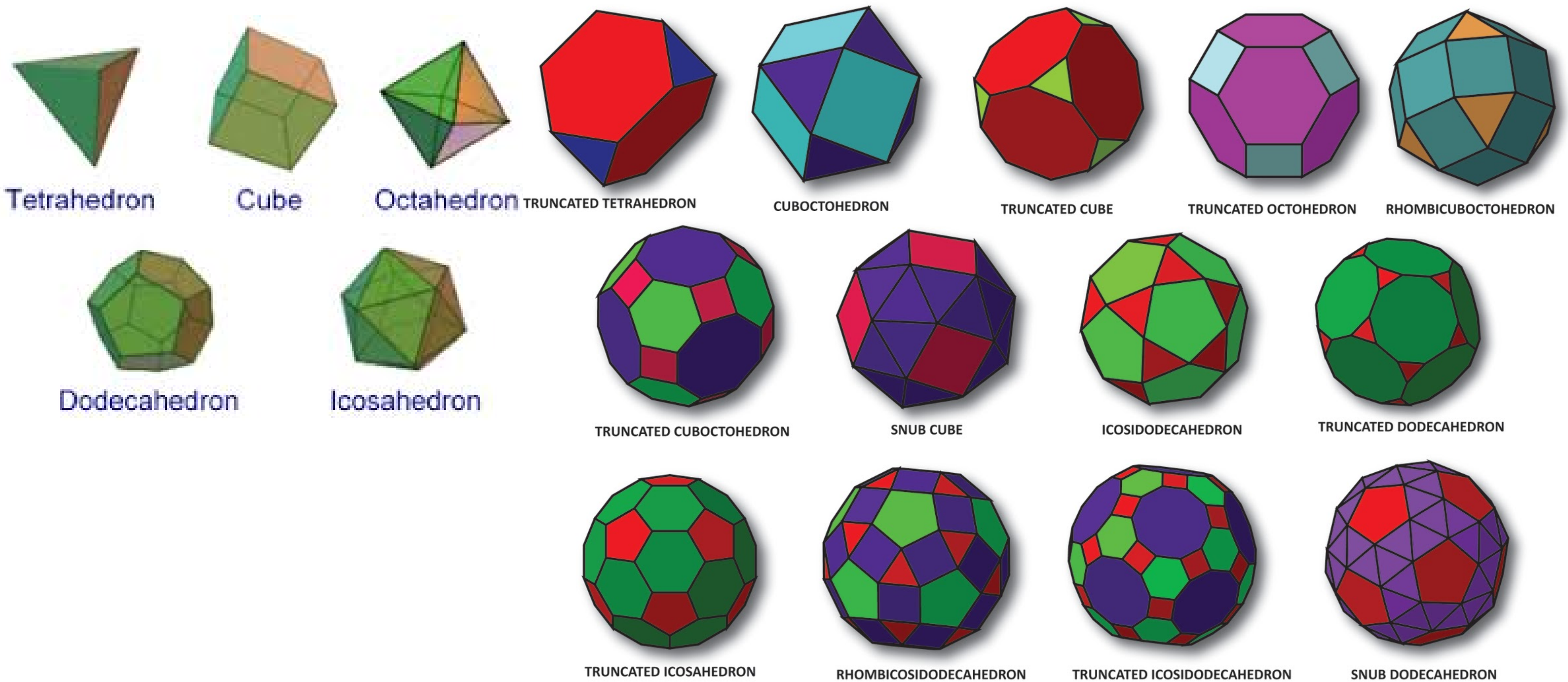
en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$



Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

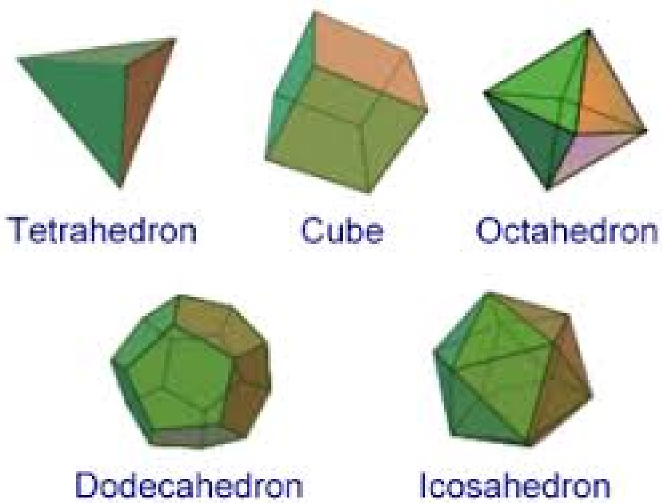
en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

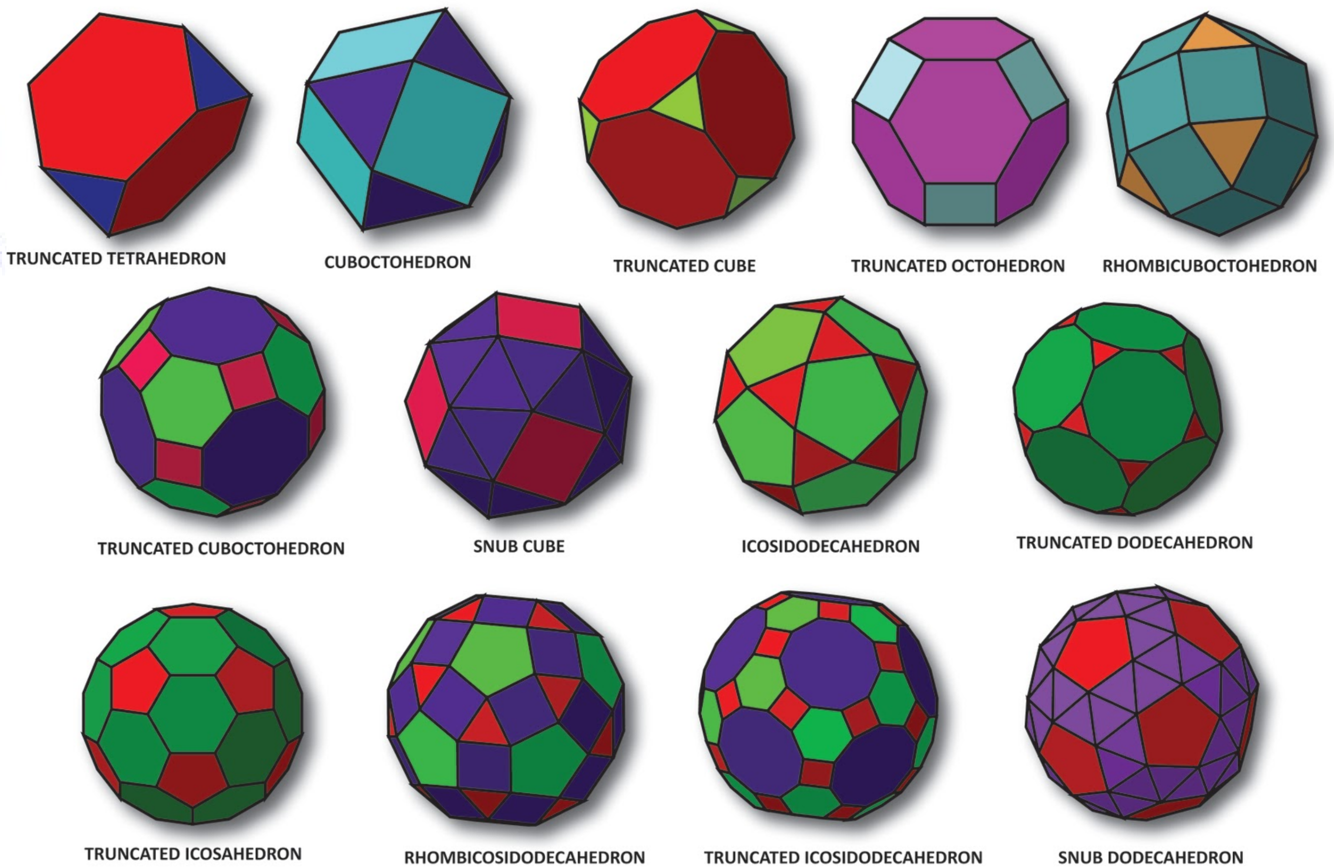


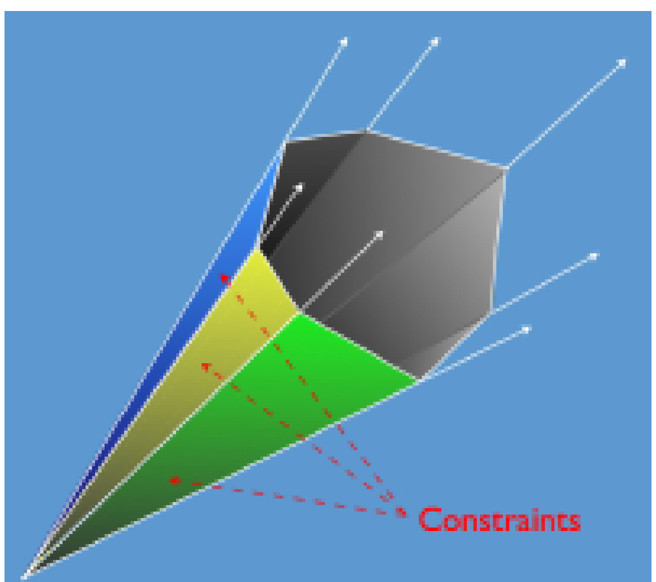
Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$





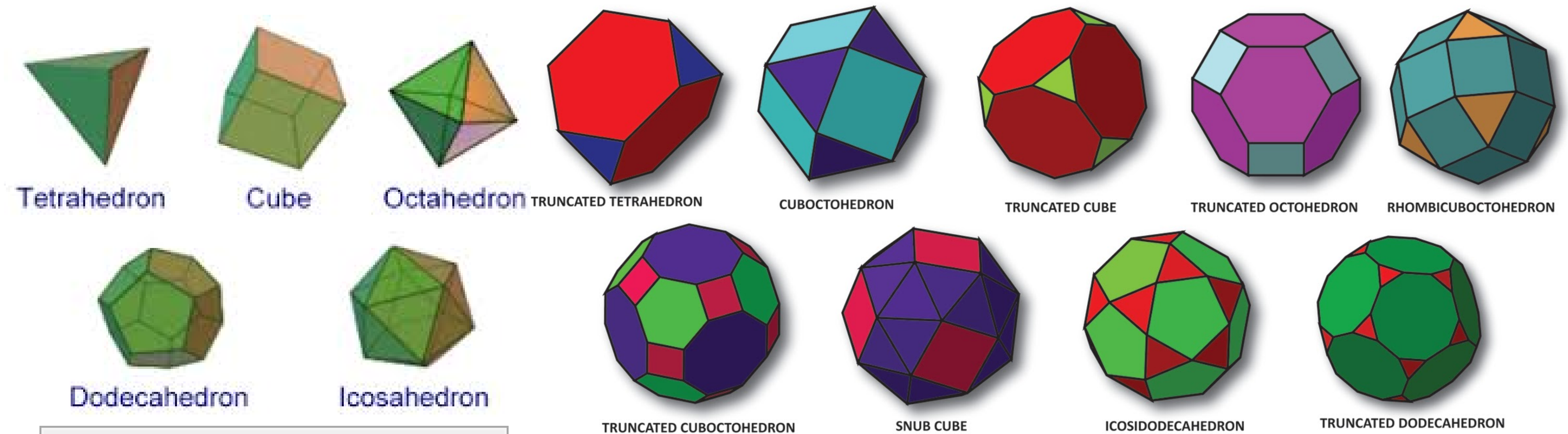


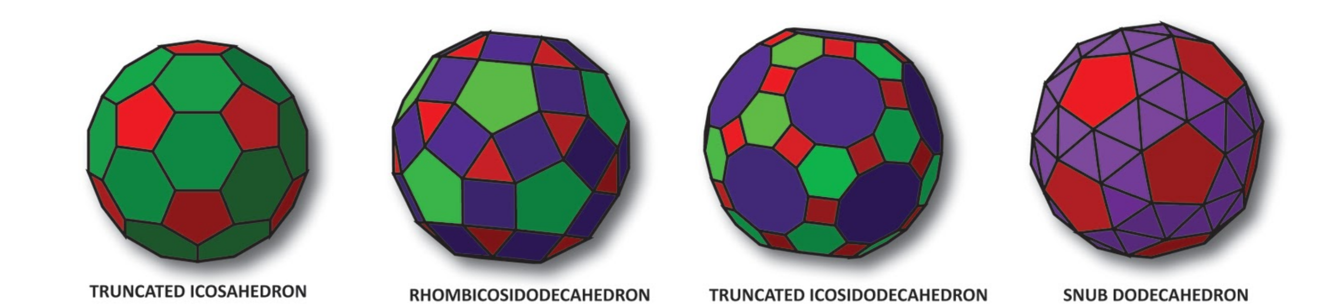
⟵ non-borné !

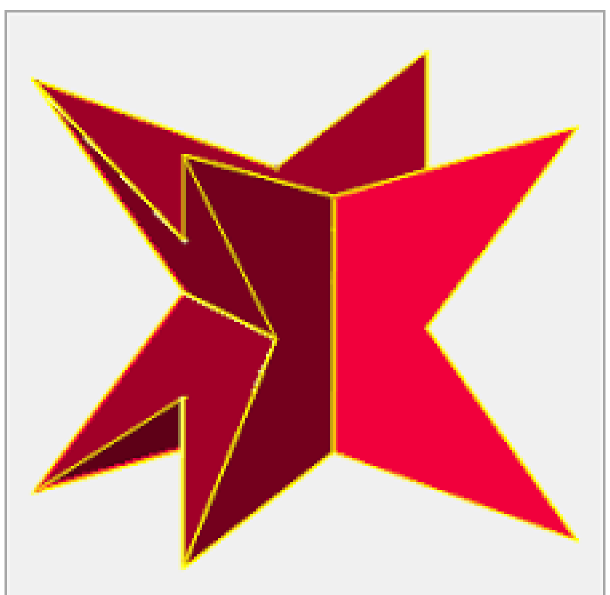
Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$





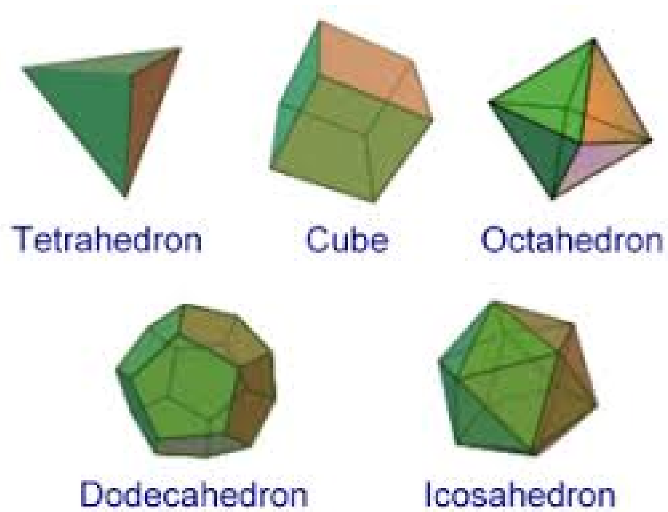


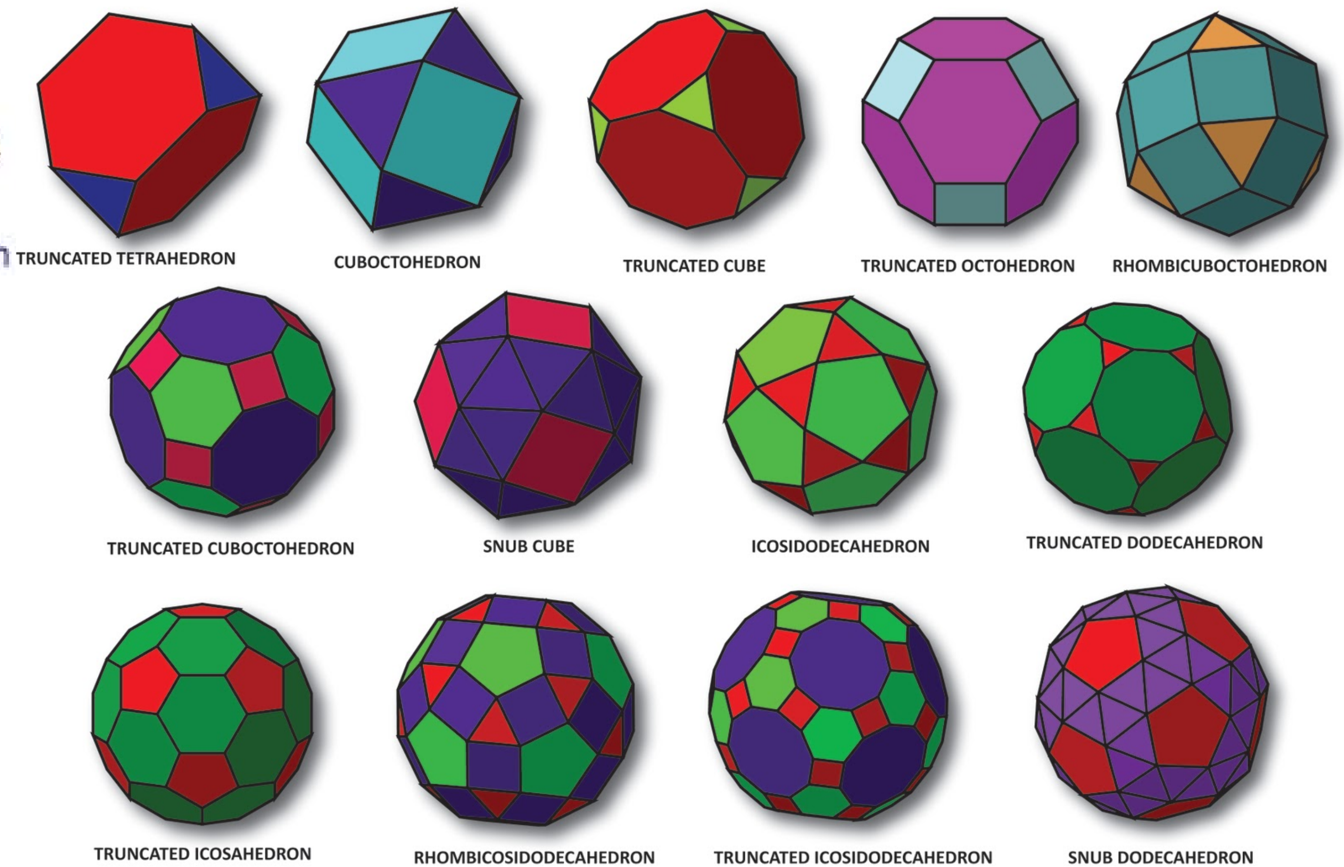
non-convexe !

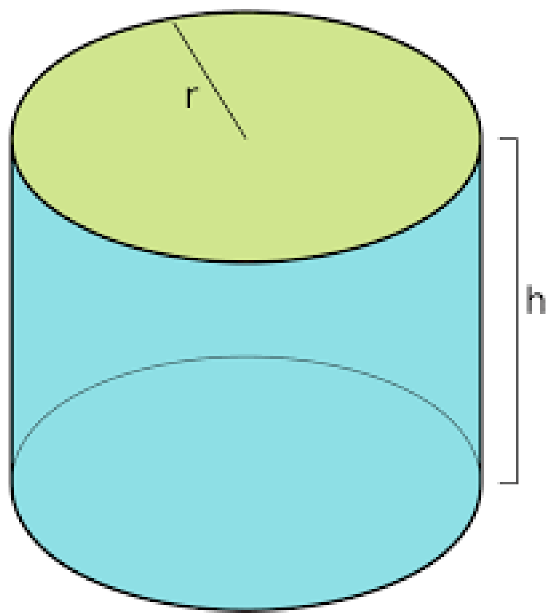
Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$





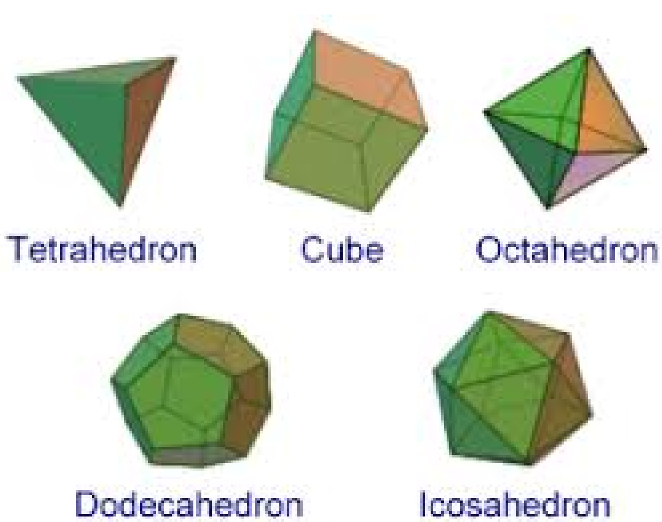


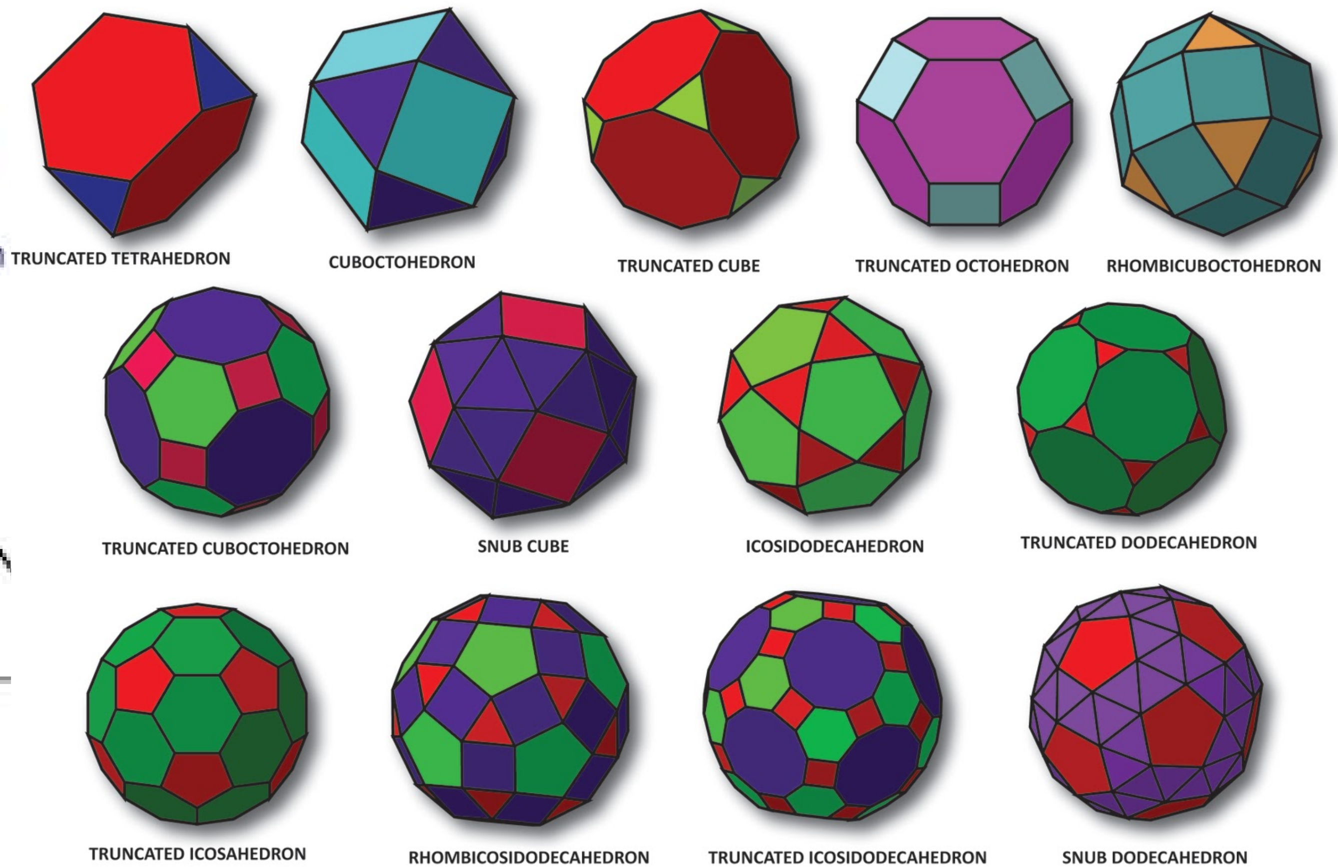
pas de descripiton fini !

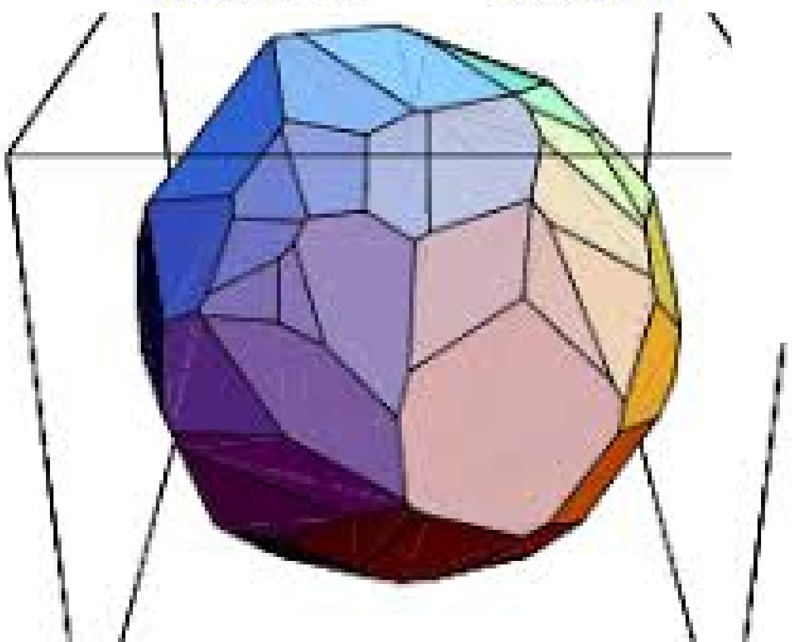
Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$





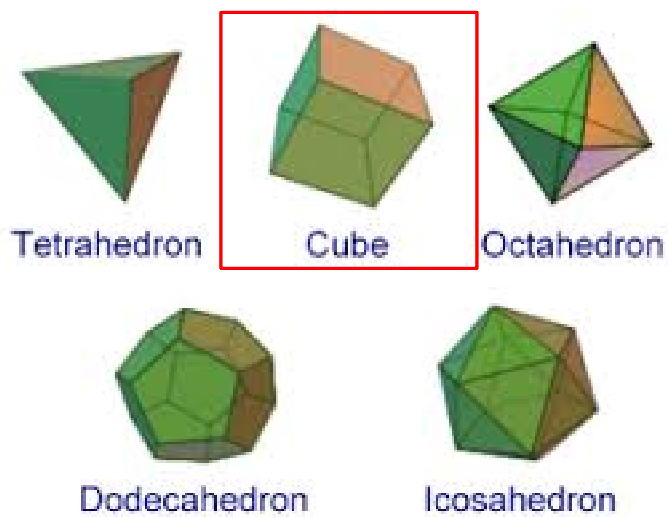


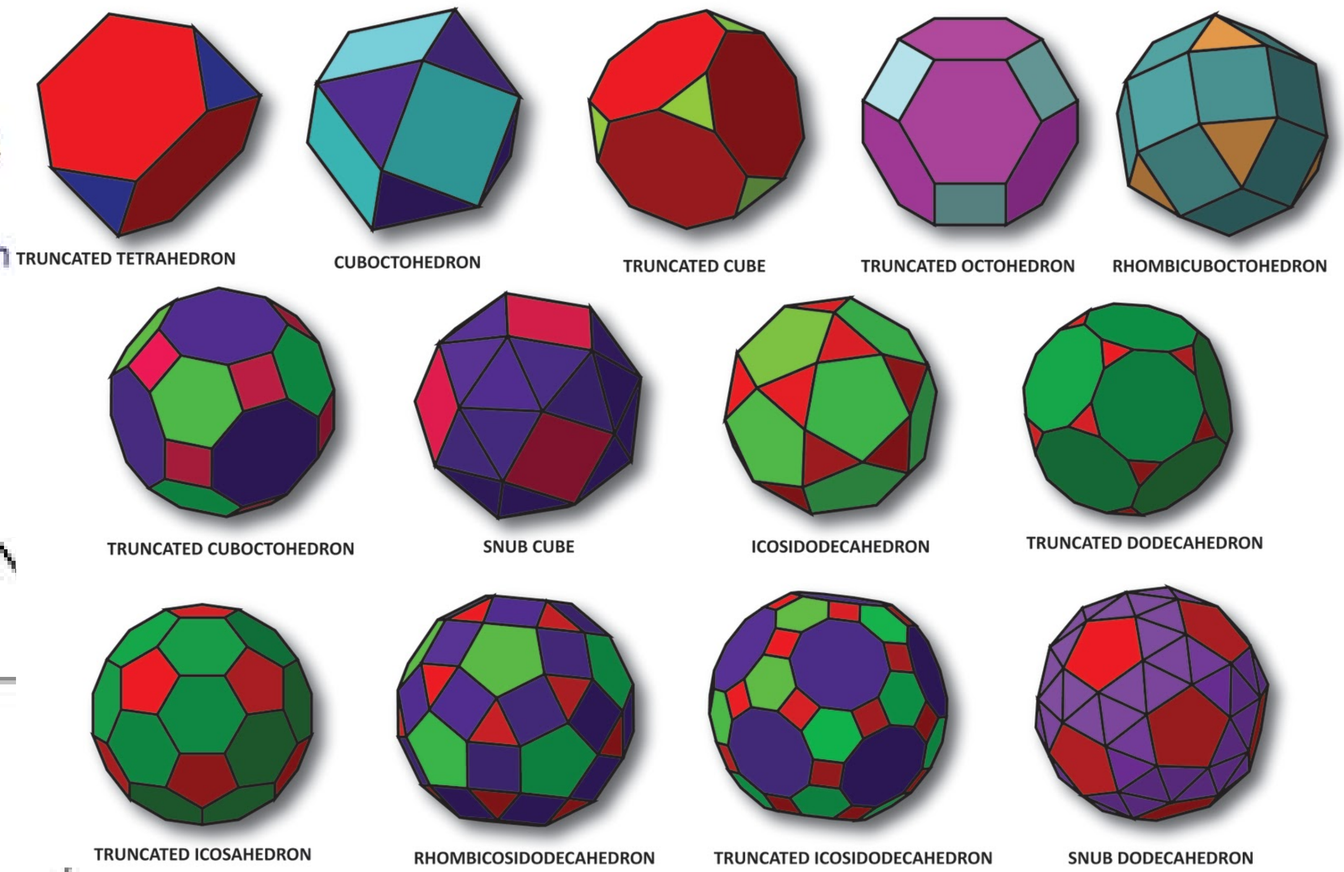
OK !

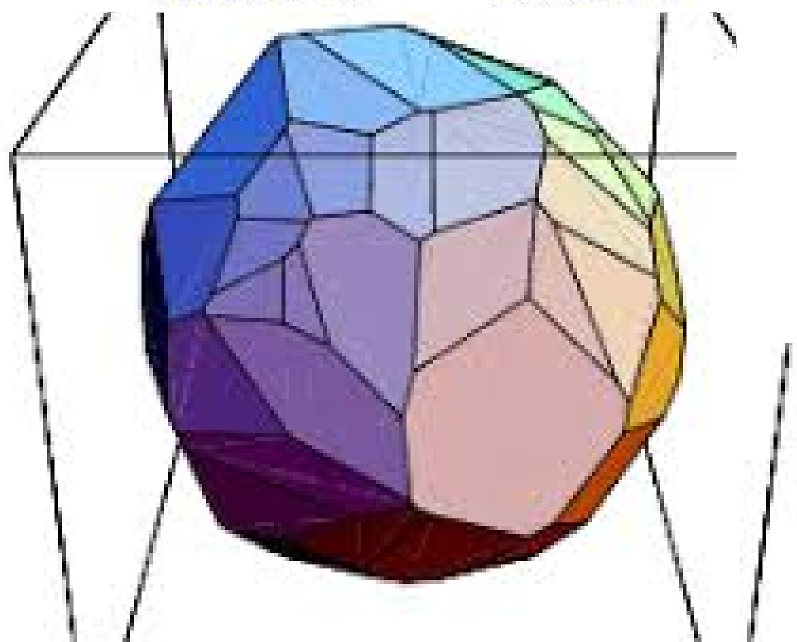
Polytôpes

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

en $\mathbb{R}^3$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$







OK ! on se concentre sur l'hypercube

Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$ $=$ conv$(v \mid v \in \{0,1\}^n)$

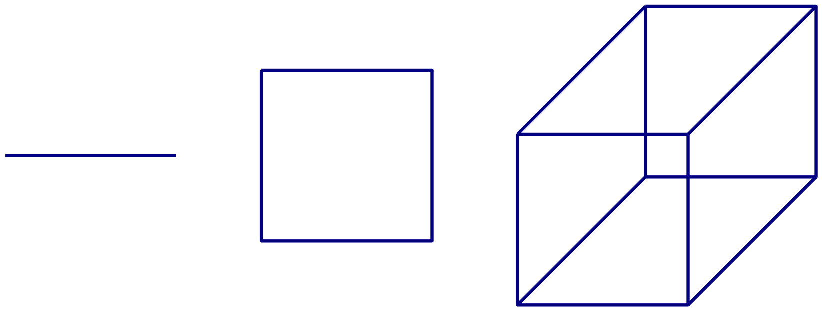
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



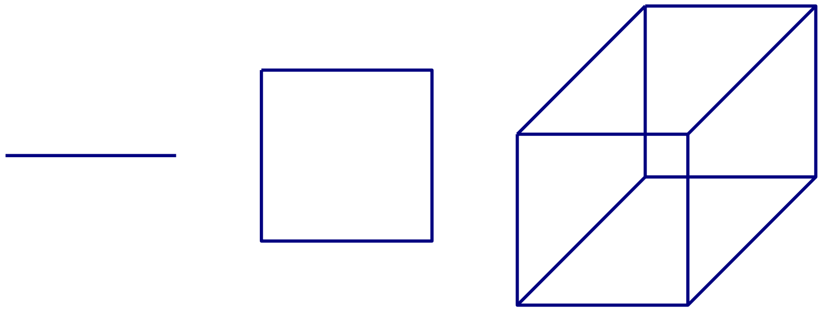
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$$\supseteq \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^d) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

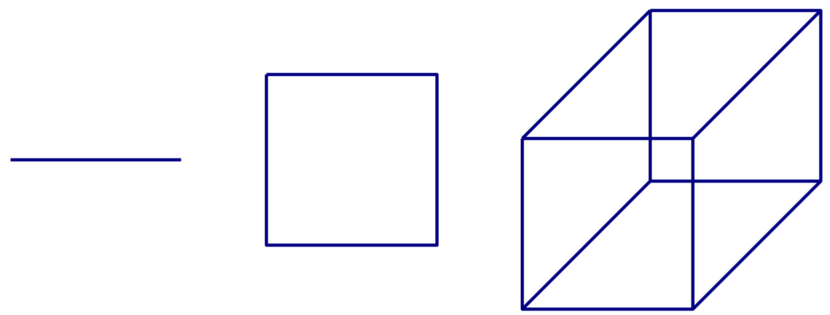
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \qquad \text{ou} \qquad \{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\supseteq$ conv$(v \mid v \in \{0,1\}^d) = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

si tout les v_i sont 1 dans l'entrée j, donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ l'est aussi

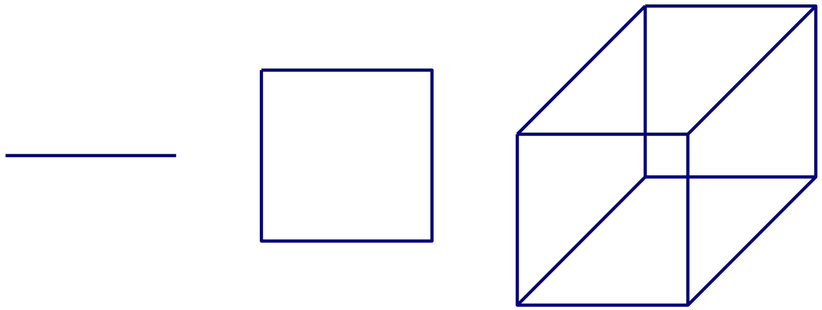
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ou $\{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$ $=$ conv$(v \mid v \in \{0,1\}^n)$



$\supseteq$ conv$(v \mid v \in \{0,1\}^d) = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

si tout les v_i sont 1 dans l'entrée j, donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ l'est aussi

si tout les v_i sont 0 dans l'entrée j, donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ l'est aussi

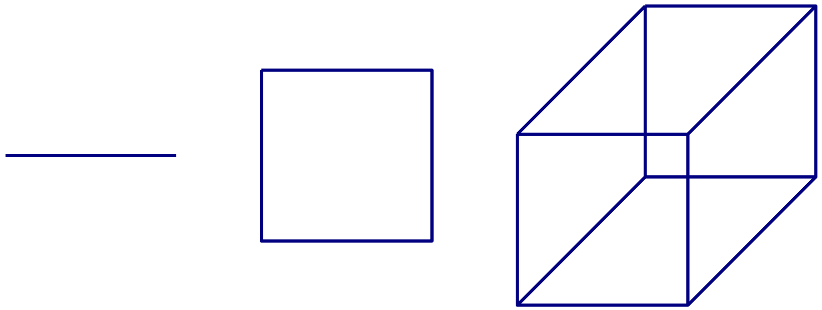
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\supseteq$ conv$(v \mid v \in \{0,1\}^d) = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

si tout les v_i sont 1 dans l'entrée j, donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ l'est aussi
si tout les v_i sont 0 dans l'entrée j, donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ l'est aussi
sinon l'entrée j, de $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ est entre 0 et 1

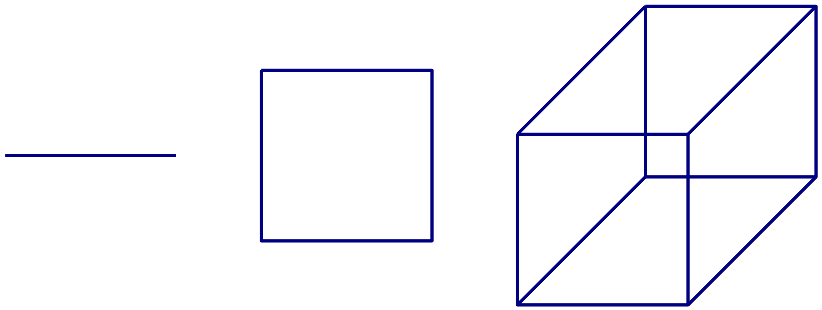
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\subseteq$ Induction sur n : soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

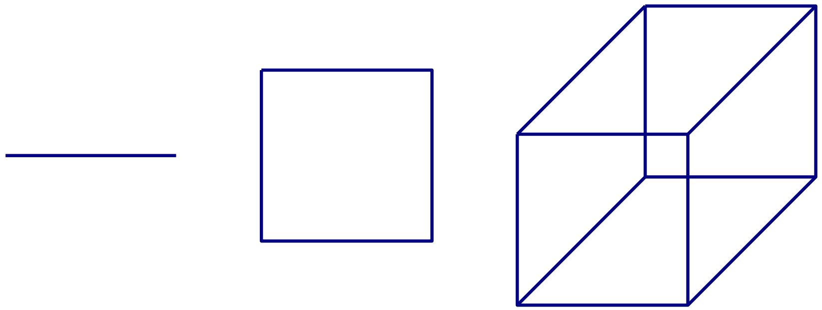
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\subseteq$ Induction sur n : soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

si $n = 1 : 0 \leq x \leq 1 \implies x = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$ pour $t = x$.

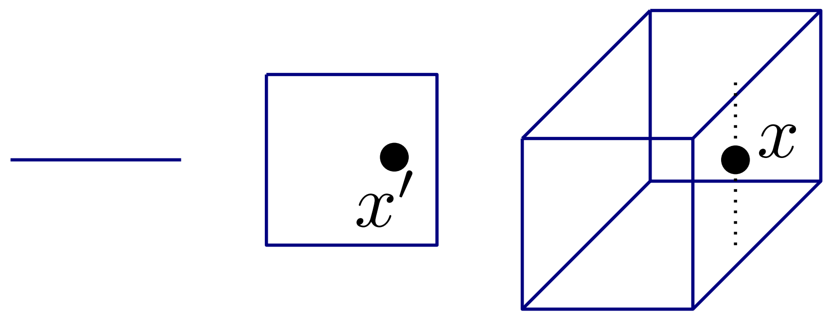
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\subseteq$ Induction sur n : soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

si $n = 1$: $0 \leq x \leq 1 \implies x = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$ pour $t = x$.

si $n \geq 1$:efface première cordonée x_1 de x

$$\rightsquigarrow x' \in \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$$

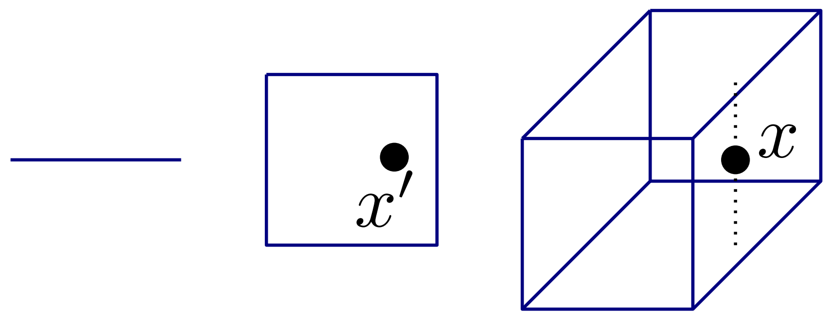
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\subseteq$ Induction sur n : soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

si $n = 1$: $0 \leq x \leq 1 \implies x = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$ pour $t = x$.

si $n \geq 1$:efface première cordonée x_1 de x

$\rightsquigarrow x' \in \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

$x' = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

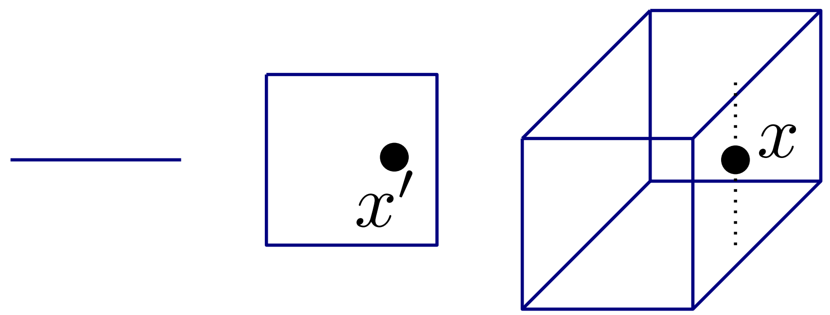
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{ou} \quad \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \text{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\subseteq$ Induction sur n : soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

si $n = 1$: $0 \leq x \leq 1 \implies x = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$ pour $t = x$.

si $n \geq 1$:efface première cordonée x_1 de x

$\rightsquigarrow x' \in \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

$x' = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

$v_i^{0/1}$ est v_i plus première cordonnée $0/1$

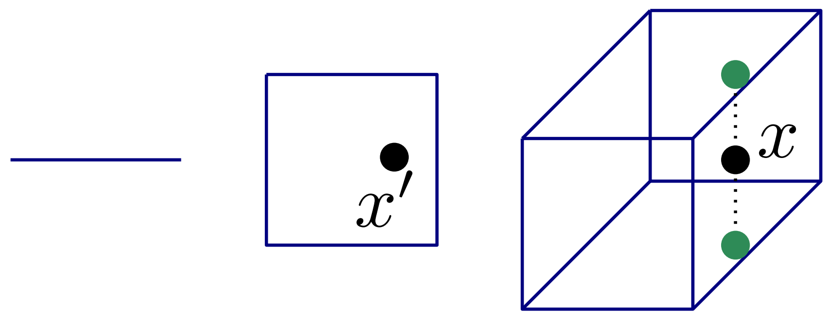
Polytôpes : l'hypercube

un polytôpe est un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \qquad \text{ou} \qquad \{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$$

l'hypercube Q_n de dimension n est

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\} \quad = \quad \mathrm{conv}(v \mid v \in \{0,1\}^n)$$



$\subseteq$ Induction sur n : soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$

si $n = 1$: $0 \leq x \leq 1 \implies x = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$ pour $t = x$.

si $n \geq 1$:efface première cordonée x_1 de x

$$\rightsquigarrow x' \in \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid Ix \leq 1 \& -Ix \leq 0\}$$

$x' = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \& \lambda_i \geq 0\}$

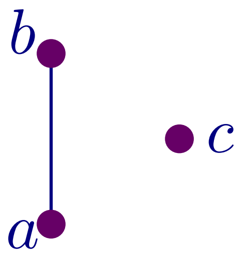
$v_i^{0/1}$ est v_i plus première cordonnée $0/1$

$x = (x_1 \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i^1) + ((1-x_1) \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i^0)$

Le polytope d'ordre

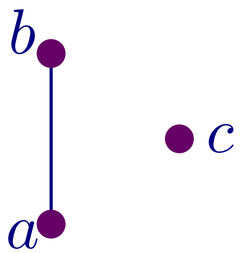
Le polytope d'ordre

poset X



Le polytope d'ordre

poset X

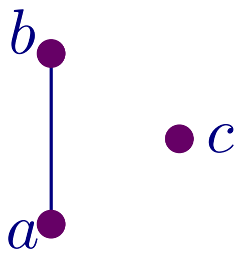


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

Le polytope d'ordre

poset X

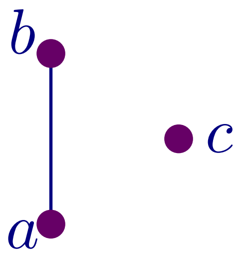


$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

Le polytope d'ordre

poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

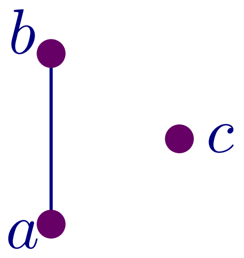
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X

ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$

Le polytope d'ordre

poset X

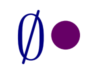


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

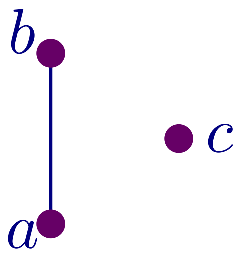
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$



Le polytope d'ordre

poset X

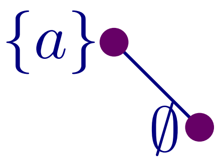


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

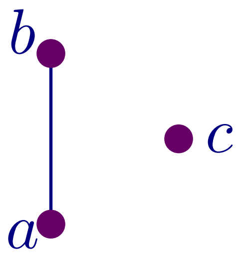
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$



Le polytope d'ordre

poset X

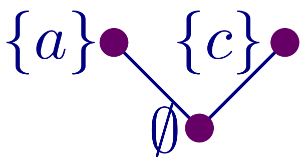


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

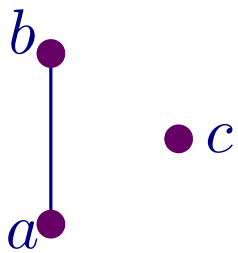
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$



Le polytope d'ordre

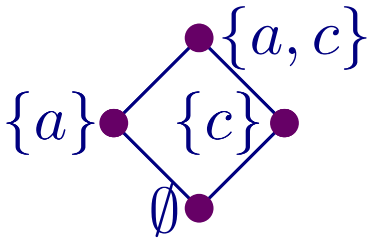
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

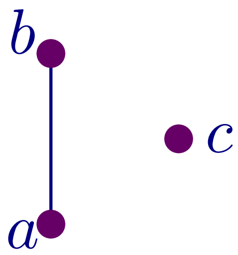
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$



Le polytope d'ordre

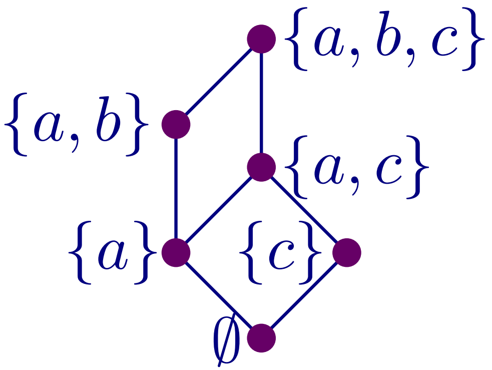
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

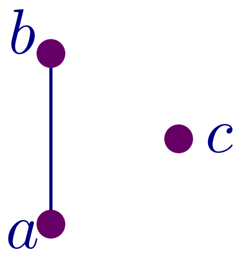
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$



Le polytope d'ordre

poset X

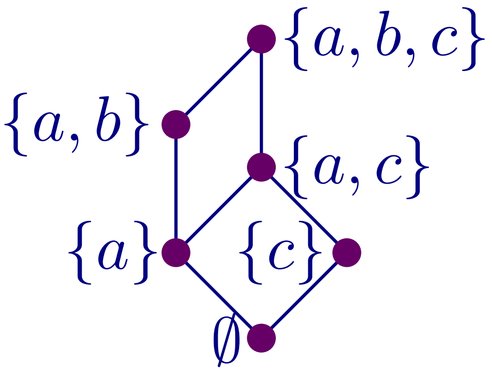


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

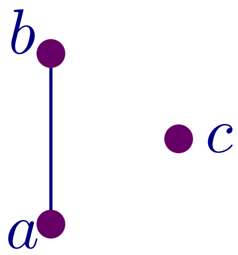
$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



Le polytope d'ordre

poset X

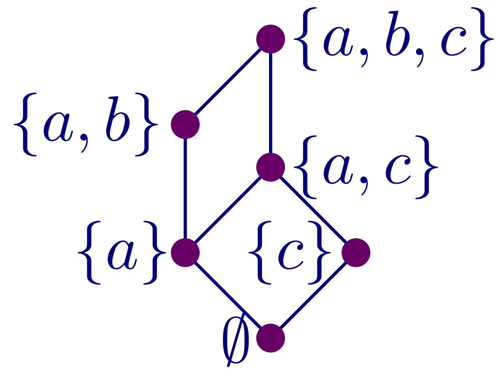


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

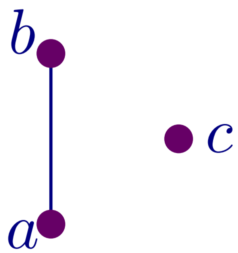
$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$

Le polytope d'ordre

poset X

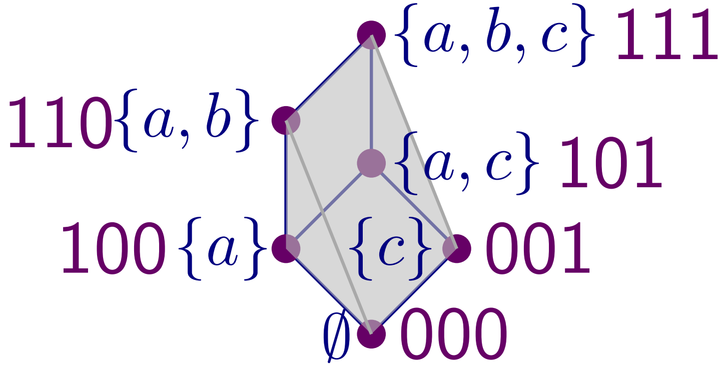


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

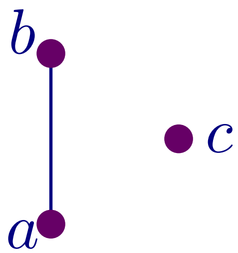
$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{$vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)\}$

Le polytope d'ordre

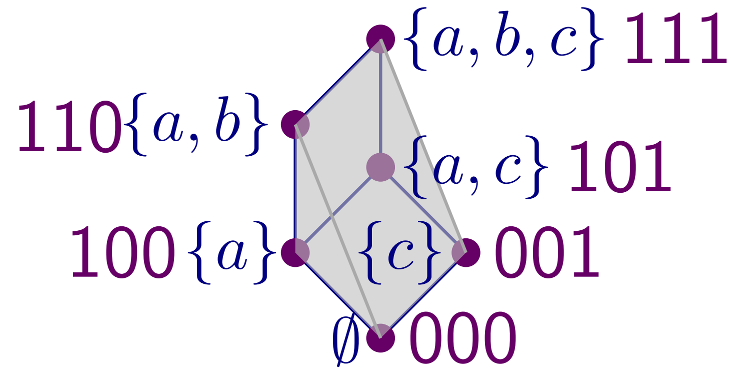
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif

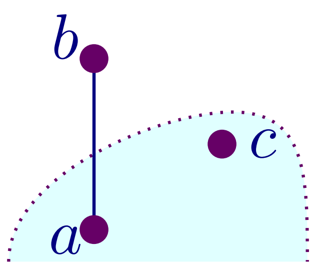


polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées
leurs combinaisons convexes aussi...

Le polytope d'ordre

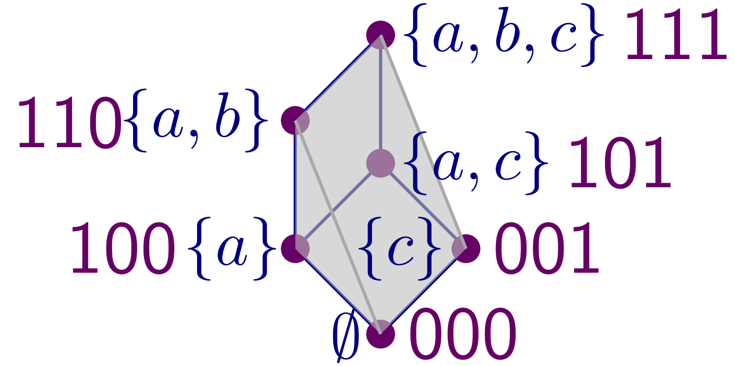
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif

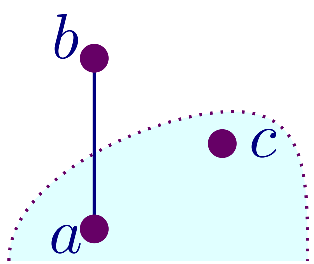


polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0, 1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0, 1]^n$ et satisfont les inégailtées
leurs combinaisons convexes aussi...

Le polytope d'ordre

poset X

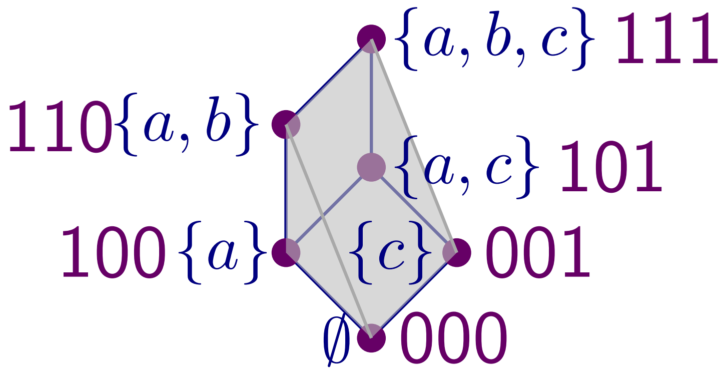


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$

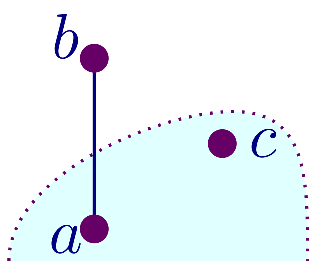
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

Le polytope d'ordre

poset X

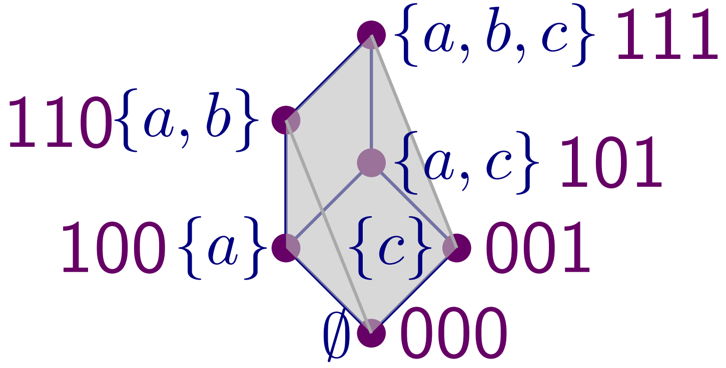


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}

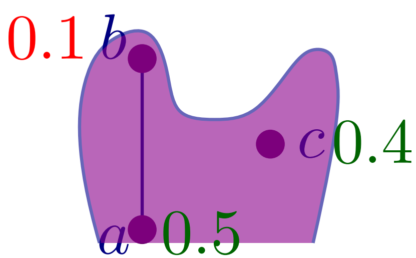
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

Le polytope d'ordre

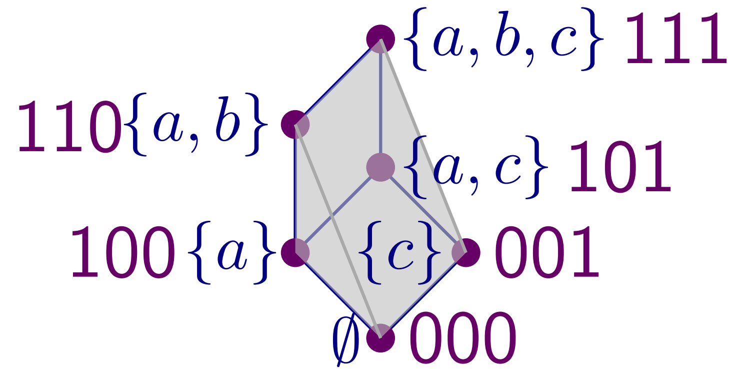
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



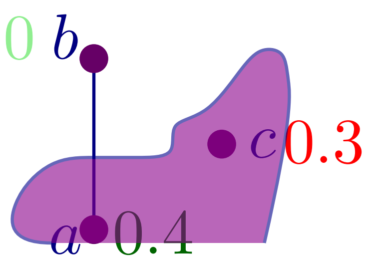
polytope d'ordre P_X = conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées
leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$
soit i la plus petite coordonées non-zero.
I_i l'idéal de tout les cordonnée avec au moins cette valeure p_i

Le polytope d'ordre

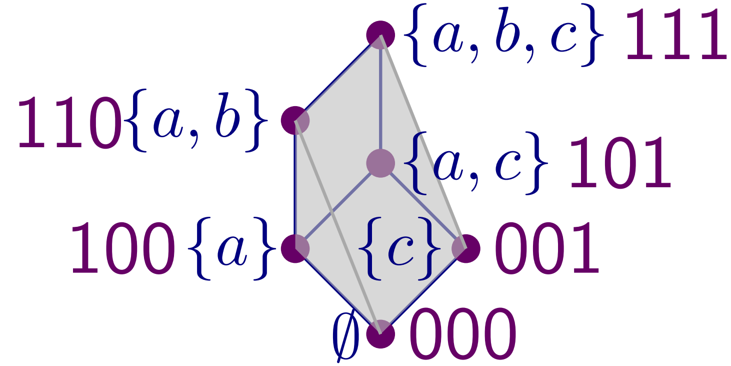
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



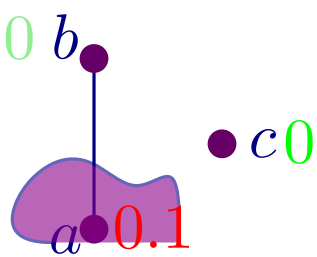
polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées
leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$
soit i la plus petite coordonées non-zero.
I_i l'idéal de tout les cordonnée avec au moins cette valeure p_i
reste p_i et recurse.

Le polytope d'ordre

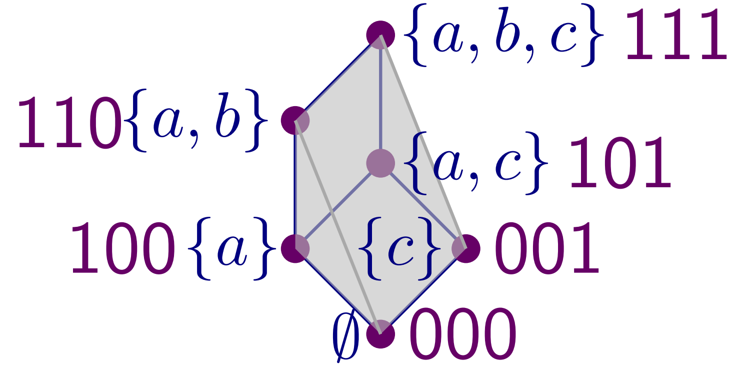
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv$\{$vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

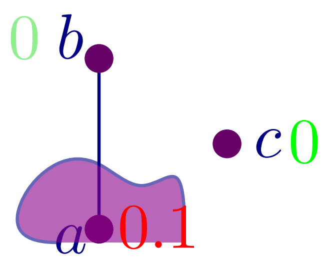
$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

soit i la plus petite coordonées non-zero.
I_i l'idéal de tout les cordonnée avec au moins cette valeure p_i
reste p_i et recurse.

Le polytope d'ordre

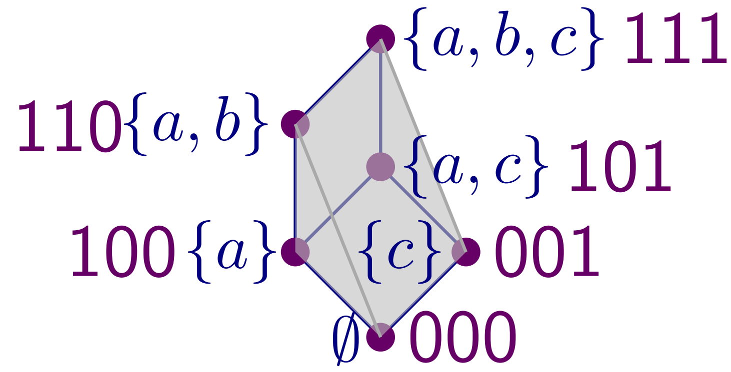
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

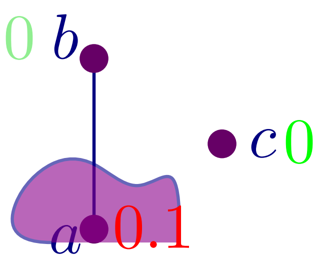
$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées
leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$
soit i la plus petite coordonées non-zero.
I_i l'idéal de tout les cordonnée avec au moins cette valeure p_i
reste p_i et recurse.

$$x = p_{i_1} I_{i_1} + \ldots + p_{i_k} I_{i_k}$$

Le polytope d'ordre

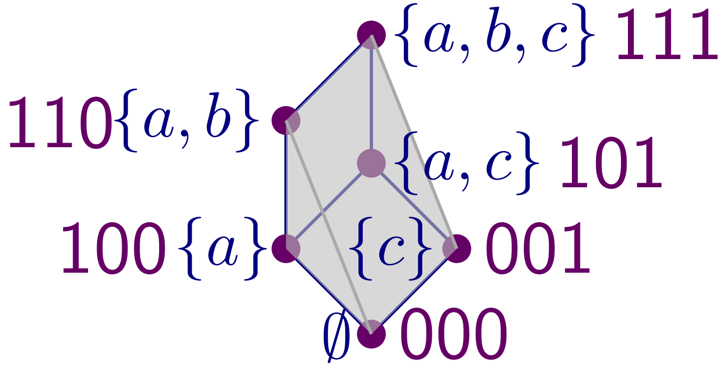
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées
leurs combinaisons convexes aussi...

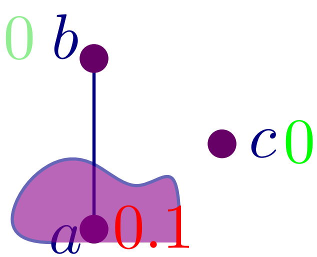
$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

soit i la plus petite coordonées non-zero.
I_i l'idéal de tout les cordonnée avec au moins cette valeure p_i
reste p_i et recurse.

$x = p_{i_1} I_{i_1} + \ldots + p_{i_k} I_{i_k}$
$p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} =$plus grande entrée de $x \leq 1$

Le polytope d'ordre

poset X

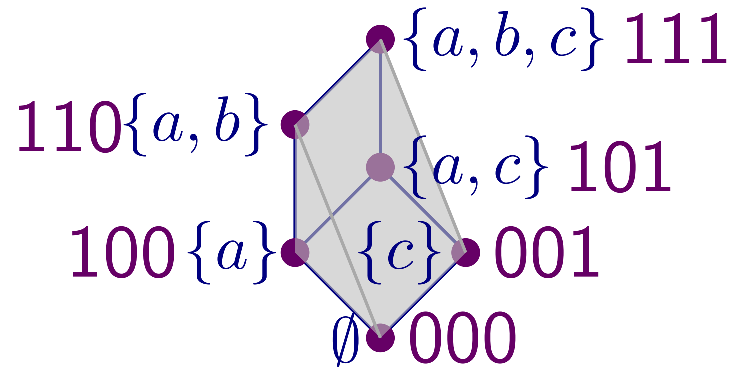


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}

$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$\subseteq$ vecteurs characteristiques sont en $[0,1]^n$ et satisfont les inégailtées leurs combinaisons convexes aussi...

$\supseteq$ soit $x \in \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

soit i la plus petite coordonées non-zero.
I_i l'idéal de tout les cordonnée avec au moins cette valeure p_i
reste p_i et recurse.

$x = p_{i_1} I_{i_1} + \ldots + p_{i_k} I_{i_k}$
$p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} =$plus grande entrée de $x \leq 1$
ajoute $p_0 \cdot (0, \ldots, 0)$ pour que la somme soit 1.

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

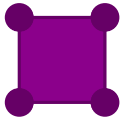
$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

k	1
$L_{Q_2}(k)$	4

Q_2 

Le polynôme d'Ehrhart

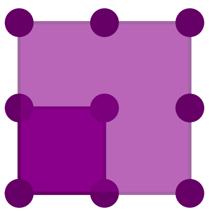
Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

k	1	2
$L_{Q_2}(k)$	4	9

$2Q_2$

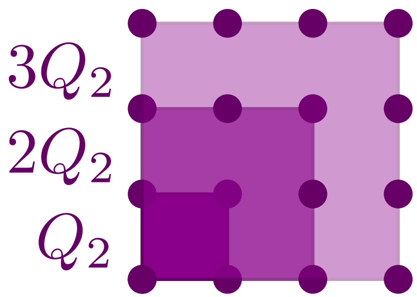
Q_2



Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

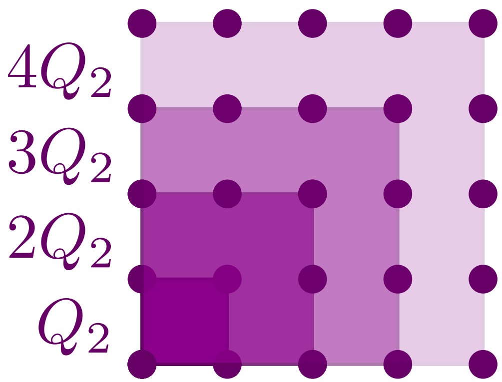


k	1	2	3
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

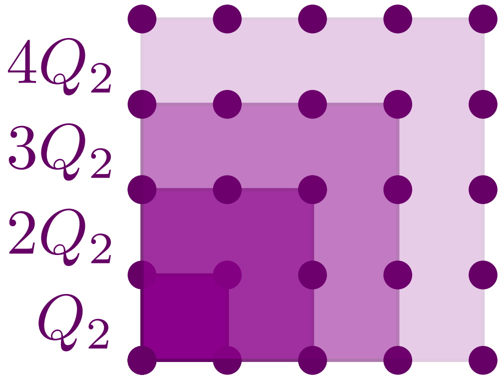


k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

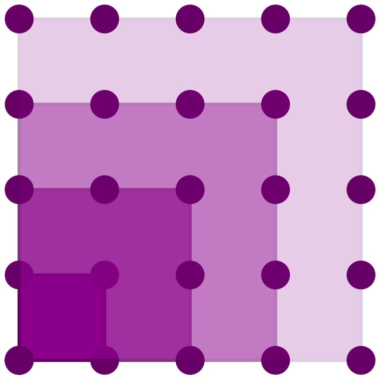
$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

$4Q_2$

$3Q_2$

$2Q_2$

Q_2



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

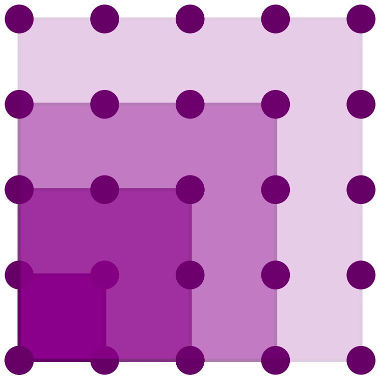
$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

$$L_{Q_n}(k) = (k+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i$$

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

$$L_{Q_n}(t) = (t+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i$$

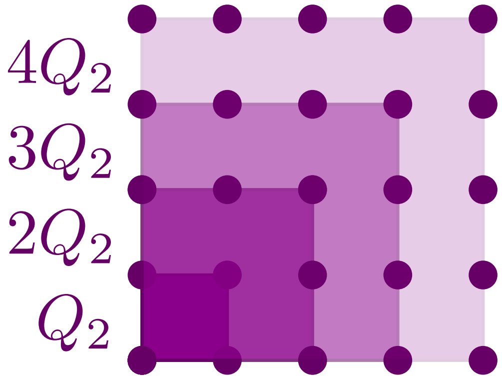
— polynôme de degré n

— coefficients rationels

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

$L_{Q_n}(t) = (t+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i$

— polynôme de degré n

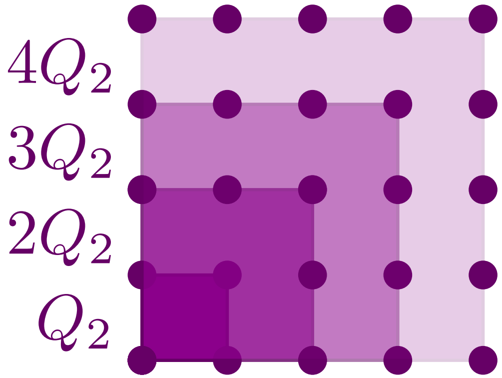
— coefficients rationels

Thm (Ehrhart '62) :
$L_P(t)$ est un polynôme de degré n avec coefficients rationels .

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

$L_{Q_n}(t) = (t+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i$

— polynôme de degré n

— coefficients rationels

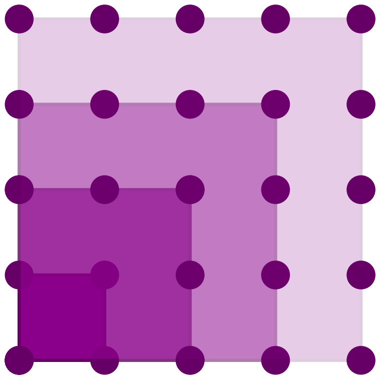
Thm (Ehrhart '62) :
$L_P(t)$ est un polynôme de degré n avec coefficients rationels .

Le polynôme d'Ehrhart de P

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

$L_{Q_n}(t) = (t+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i$

— polynôme de degré n

— coefficients rationels

Thm (Ehrhart '62) :
$L_P(t)$ est un polynôme de degré n avec coefficients rationels .

Le polynôme d'Ehrhart de P

Eugène Ehrhart, (1906 - 2000), mathématicien français.

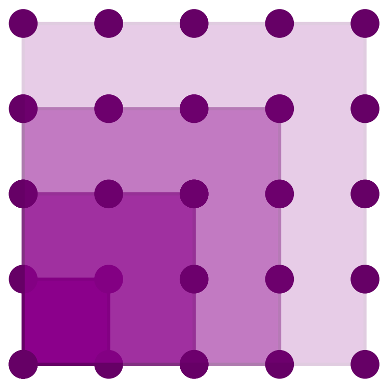
Ehrhart reçoit son BAC à l'âge de 22 ans. Il était professeur de mathématique dans plusieurs collèges et lycées et faisait de la recherche pendant son temps libre. Il commence à publier des papiers à l'âge de 40 ans et termine sa thèse de doctorat à l'âge de 60 ans.

Le polynôme d'Ehrhart

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope avec sommets entiers et $k \in \mathbb{N}$,

$$L_P(k) := |kP \cap \mathbb{Z}^n|.$$

$4Q_2$
$3Q_2$
$2Q_2$
Q_2



k	1	2	3	4
$L_{Q_2}(k)$	4	9	16	25

$$L_{Q_2}(k) = (k+1)^2$$

$$L_{Q_n}(t) = (t+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i$$

— polynôme de degré n

— coefficients rationels

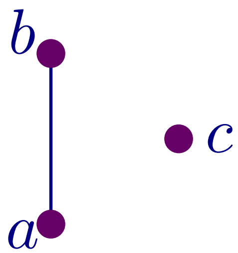
Thm (Ehrhart '62) :
$L_P(t)$ est un polynôme de degré n avec coefficients rationels .

Le polynôme d'Ehrhart de P

Thm (Stanely '91) :
Ils existent $h_0^*, \ldots, h_0^* \geq 0$ tels que $L_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=0}^{n} h_i^* \binom{t+n-i}{n}$.

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

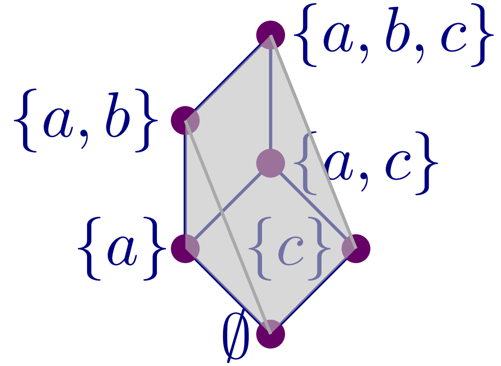
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

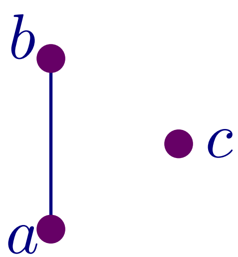
$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \mathrm{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

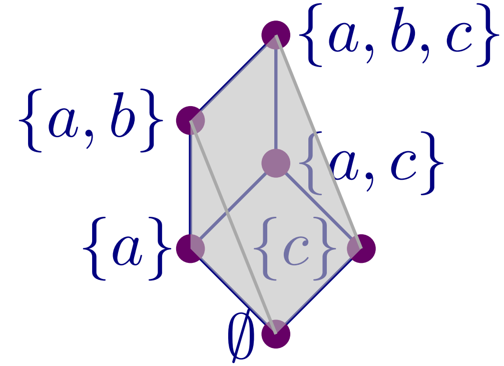
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



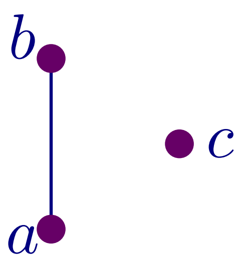
polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

si tout sommet est $0/1$,
pas des somments
entiers interieurs

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

poset X

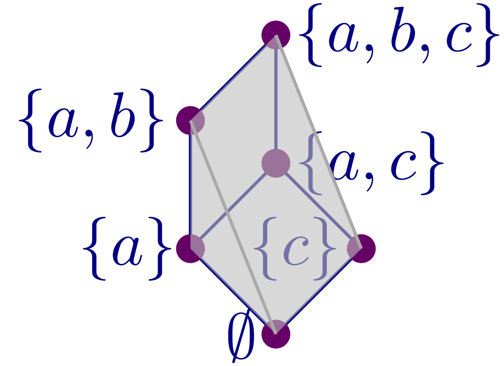


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$

$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

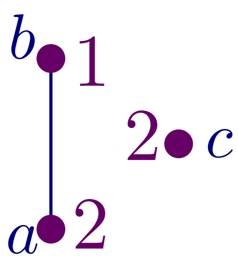
$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

$L_{P_X}(2) =$

si tout sommet est $0/1$,
pas des somments
entiers interieurs

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

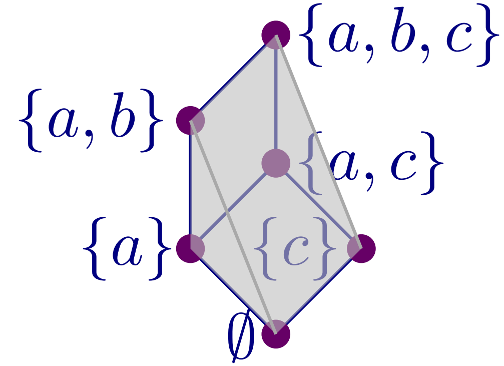
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,2]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

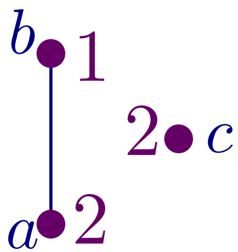
$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

$L_{P_X}(2) =$

si tout sommet est $0/1$,
pas des somments
entiers interieurs

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

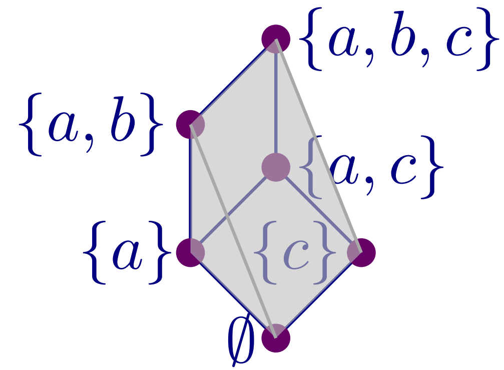
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



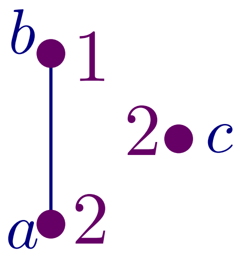
polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,2]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$ $L_{P_X}(2) = |\{\varphi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \varphi(i) \geq \varphi(j)\}|$

si tout sommet est $0/1$,
pas des somments
entiers interieurs

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

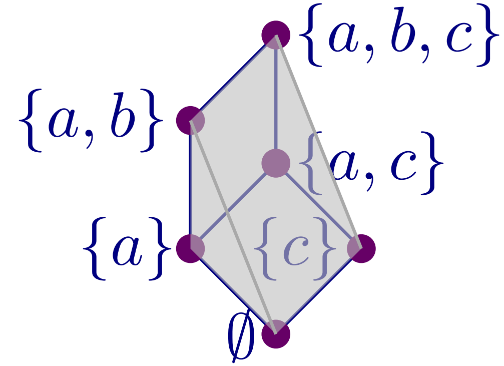
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,2]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

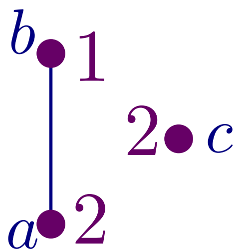
$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

$L_{P_X}(2) = |\{\varphi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \varphi(i) \geq \varphi(j)\}|$
$= |\{\psi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$

si tout sommet est $0/1$,
pas des somments
entiers interieurs

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

poset X

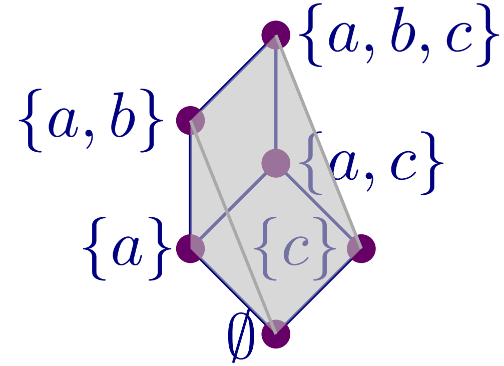


$I \subseteq X$ est un *idéal* si

$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}

$= \{x \in [0, 2]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

$L_{P_X}(2) = |\{\varphi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \varphi(i) \geq \varphi(j)\}|$

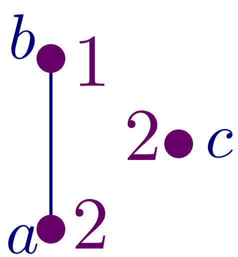
$= |\{\psi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$

si tout sommet est 0/1, pas des somments entiers interieurs

$\psi(i) := 2 - \varphi(i)$

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

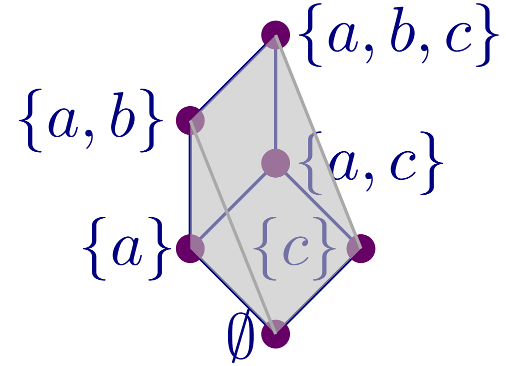
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre P_X = conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,2]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

$L_{P_X}(2) = |\{\varphi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \varphi(i) \geq \varphi(j)\}|$
$= |\{\psi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$

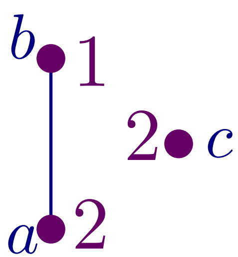
si tout sommet est 0/1,
pas des somments
entiers interieurs

$\psi(i) := 2 - \varphi(i)$

$$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$$

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

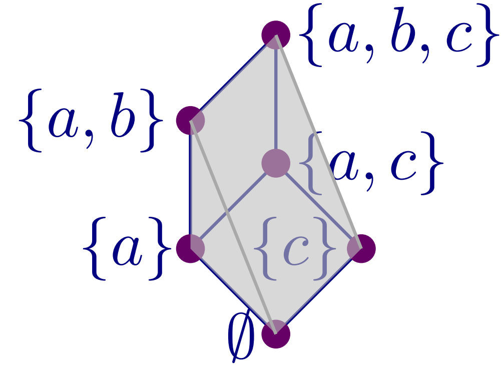
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0, 2]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$L_{P_X}(1) = |\mathcal{I}(X)|$

$L_{P_X}(2) = |\{\varphi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \varphi(i) \geq \varphi(j)\}|$
$= |\{\psi : X \to C_3 \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$

si tout sommet est $0/1$,
pas des somments
entiers interieurs

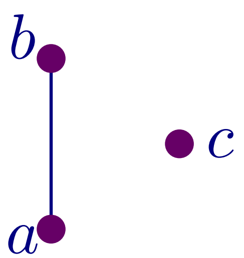
$\psi(i) := 2 - \varphi(i)$

$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$

Théorème (Stanley '86) : $L_{P_X}(k) = \Omega_X(k+1)$.

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

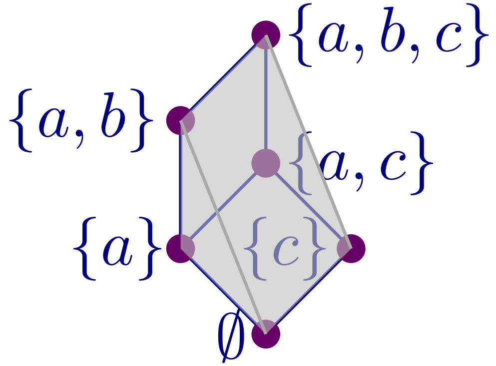
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



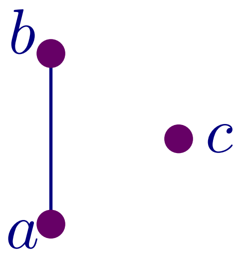
polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

$$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$$

Théorème (Stanley '86) : $L_{P_X}(k) = \Omega_X(k+1)$.

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

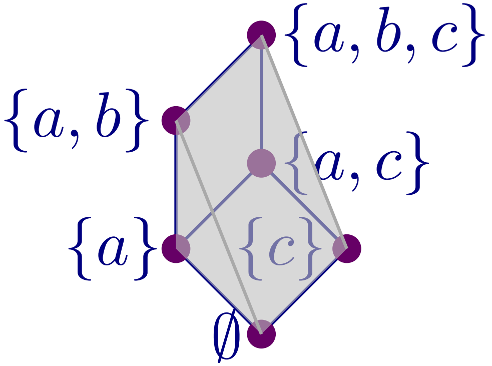
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \le x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre P_X = conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \le x_j$ si $i \ge j$ en $X\}$

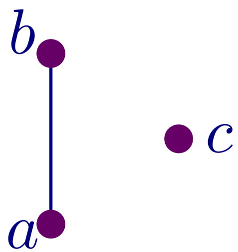
$$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \le j \implies \psi(i) \le \psi(j)\}|$$

Théorème (Stanley '86) : $L_{P_X}(k) = \Omega_X(k+1)$.

Thm :
$\Omega_X(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t-1+n-i}{n}$,
$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ et $\omega_P(0), \ldots \omega_P(n-1) \ge 0$.

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

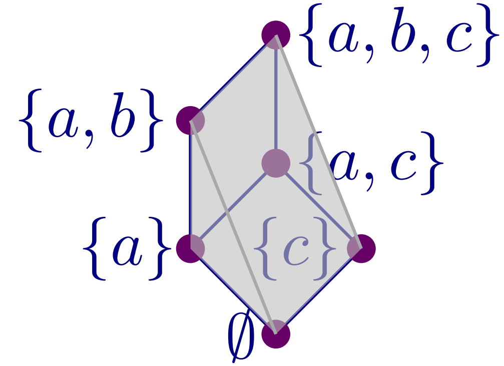
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X = \text{conv}\{\text{vecteurs characteristiques de } \mathcal{I}(X)\}$
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ en } X\}$

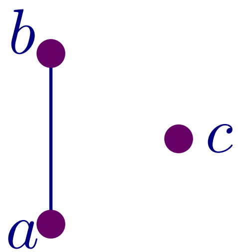
$$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$$

Théorème (Stanley '86) : $L_{P_X}(k) = \Omega_X(k+1)$.

Thm :
$\Omega_X(t+1) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t+n-i}{n}$,
$b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ et $\omega_P(0), \ldots \omega_P(n-1) \geq 0$.

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

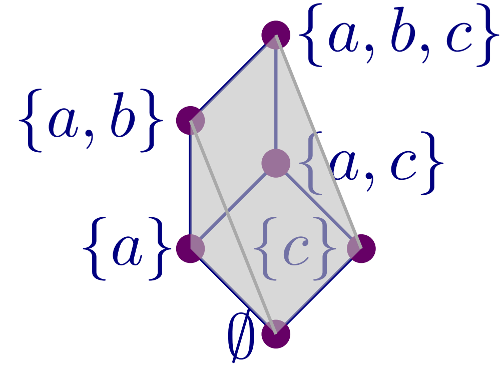
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre P_X = conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$$

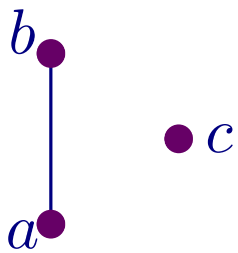
Théorème (Stanley '86) : $L_{P_X}(k) = \Omega_X(k+1)$.

Thm :
$\Omega_X(t+1) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t+n-i}{n}$,
$b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ et $\omega_P(0), \ldots \omega_P(n-1) \geq 0$.

$\rightsquigarrow L_{P_X}(t)$ a des coefficients rationels et ils existent $h_0^*, \ldots, h_0^* \geq 0$ tels que
$L_{P_X}(t) = \sum_{i=0}^{n} h_i^* \binom{t+n-i}{n}$.

Polynôme d'Ehrhart du polytope d'ordre

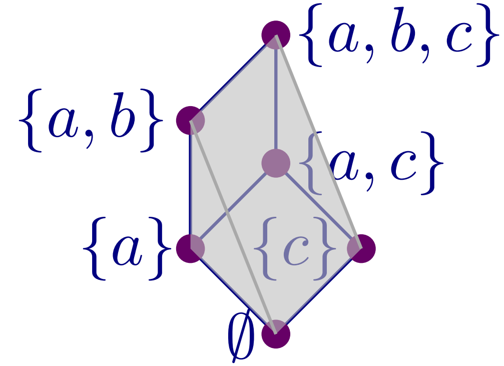
poset X



$I \subseteq X$ est un *idéal* si
$y \leq x \in I \implies y \in I$

$\mathcal{I}(X)$ les idéaux de X
ordonnés par inclusion

$\mathcal{I}(X)$ treilli distributif



polytope d'ordre $P_X =$ conv{vecteurs characteristiques de $\mathcal{I}(X)$}
$= \{x \in [0,1]^n \mid x_i \leq x_j$ si $i \geq j$ en $X\}$

$$L_{P_X}(k) = |\{\psi : X \to C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}|$$

Théorème (Stanley '86) : $L_{P_X}(k) = \Omega_X(k+1)$.

Thm :
$\Omega_X(t+1) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t+n-i}{n}$,
$b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ et $\omega_P(0), \ldots \omega_P(n-1) \geq 0$.

MERCI

$\rightsquigarrow L_{P_X}(t)$ a des coefficients rationels et ils existent $h_0^*, \ldots, h_0^* \geq 0$ tels que
$L_{P_X}(t) = \sum_{i=0}^{n} h_i^* \binom{t+n-i}{n}$.