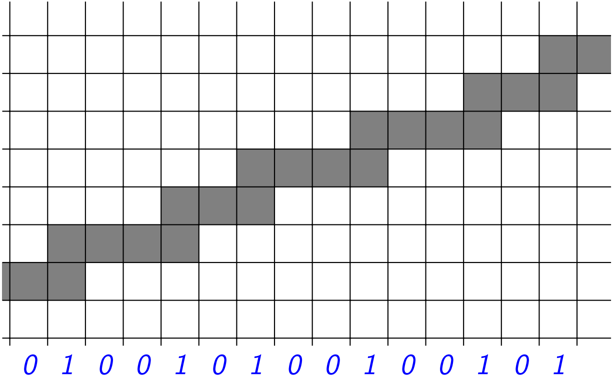
Quelques méthodes pour les mots sturmiens

Définitions. Dualité de Berstel et Pocchiola

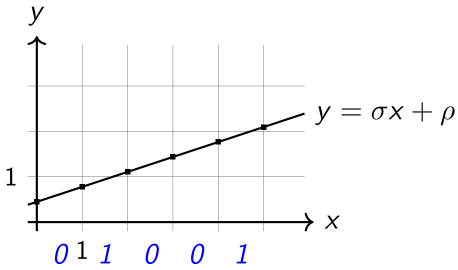
Anna FRID

March 5, 2019

Un mot sturmien comme un mot mécanique



Un mot sturmien comme un mot mécanique



$$s[n] = \lfloor (n+1)\sigma + \rho \rfloor - \lfloor n\sigma + \rho \rfloor$$

ou

$$s[n] = \lceil (n+1)\sigma + \rho \rceil - \lceil n\sigma + \rho \rceil$$

Complexité

La fonction de *complexité en facteurs* d'un mot fini ou infini x est la fonction $p_x(n)$ qui donne le nombre de facteurs distincts de longueur n dans ce mot.

Theorem (Morse et Hedlund, 1940)

Un mot infini $x = x[0]x[1]\cdots x[n]\cdots$ est ultimement périodique si et seulement si $p_x(n) \leq n$ pour un entier n.

Définitions équivalentes

Un mot infini $x = x[0]x[1]\cdots x[n]\cdots$ est dit *sturmien* si, pour tout entier naturel n, le mot x a exactement $n+1$ facteurs différents de longueur n.

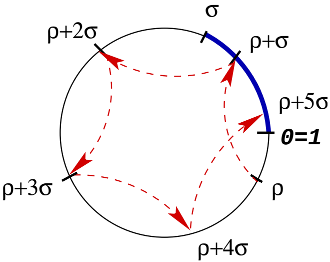
Theorem (Morse et Hedlund, 1940)

Soit x un mot infini sur un alphabet binaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

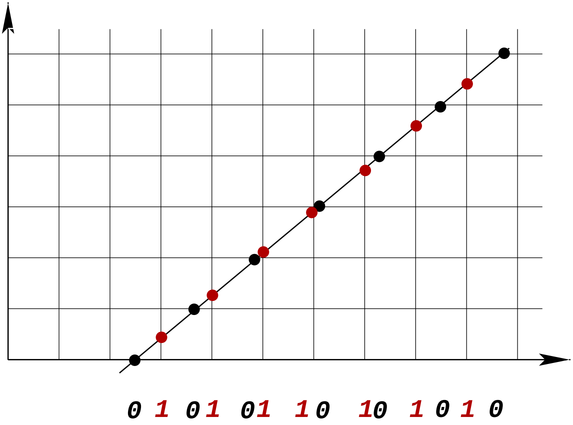
- x est sturmien ;
- x est mécanique de pente irrationnelle ;
- x est équilibré et non ultimement périodique.

Mots comme des trajectoires

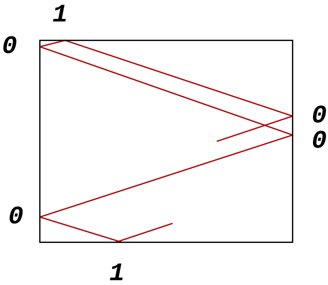
$$s[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } \{(n+1)\sigma + \rho\} < \sigma \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$



Une définition de plus

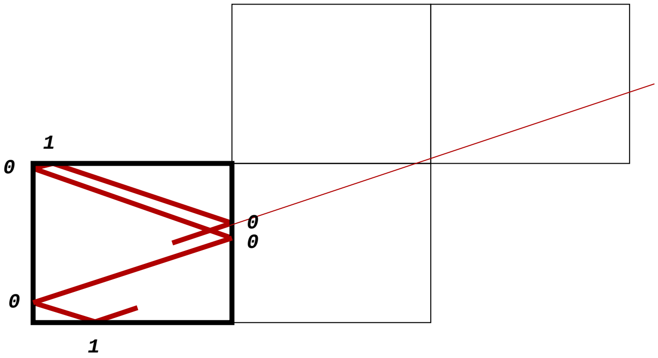


Billiards



$$010001\cdots$$

Equivalence



$$010001\cdots$$

A lire

- J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words. In: M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words. Cambridge University Press, 2002.
- J.-P. Allouche, J. Shallit, Automatic sequences — theory, applications, generalizations. Chapter 9. Cambridge University Press, 2003.
- P. Arnoux, Sturmian sequences. In: N. Pytheas Fogg, Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Springer, 2003.

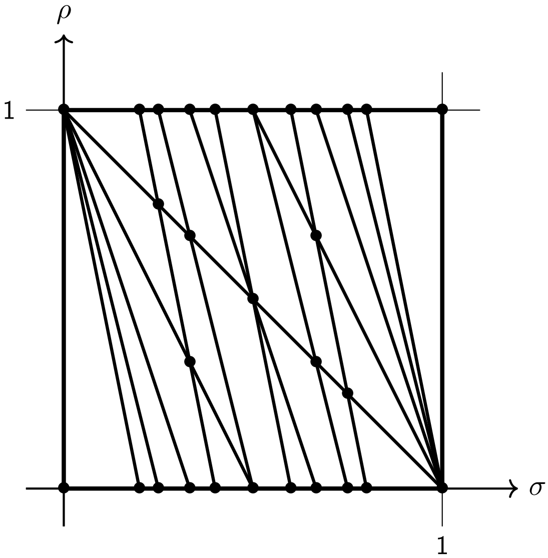
Theorem (Lipatov, 82; Mignosi, 91; Berstel et Pocchiola, 93)

Le nombre total de facteurs sturmiens de longueur n est

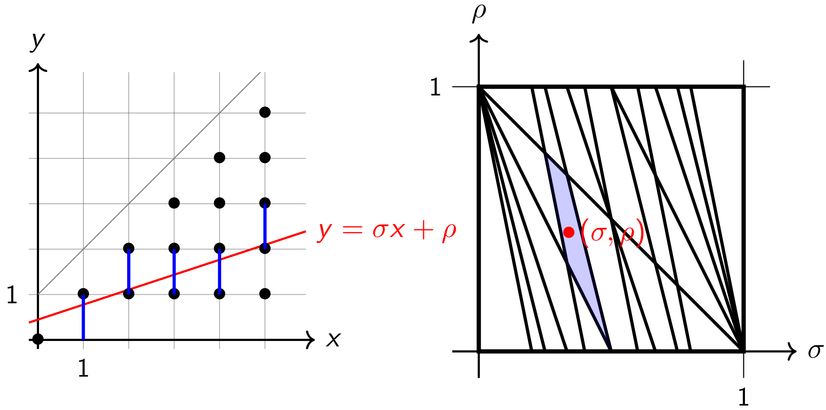
$$\sum_{q=1}^{n} \varphi(q)(n+1-q) = \frac{3}{\pi^2}\frac{n^3}{3} + O(n^2 \log n),$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

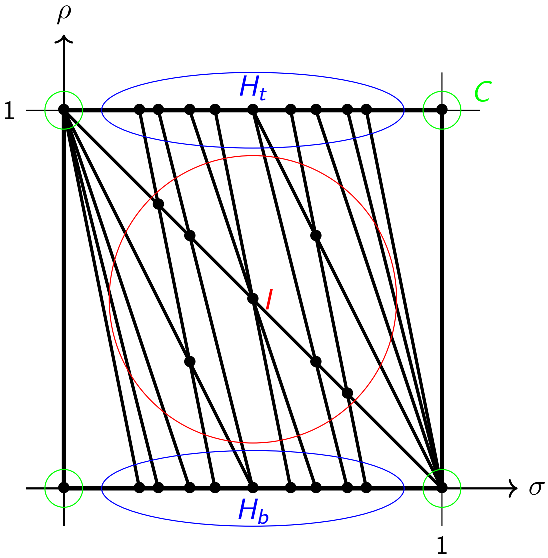
L'arrangement d'ordre 5



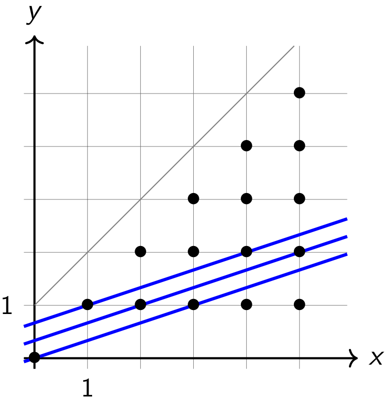
Dualité entre droites et points

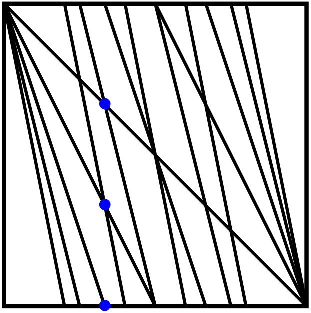


Quatre groupes de sommets de l'arrangement



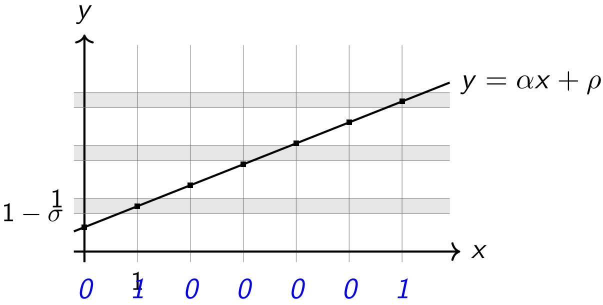
Dualité





Les trois droites de pente $1/3$ croisent au total $5+1$ points de P_5 et correspondent à 3 points de $\mathcal{A}_5$ qui rencontrent au total 6 droites de L_5

Mots de rotation



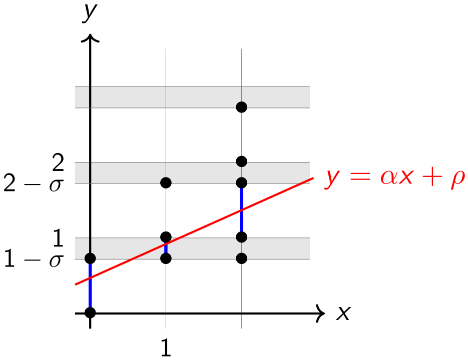
$$\mathbf{r}[q] = \begin{cases} 0, & \text{si } \{q\alpha + \rho\} \leq 1 - \sigma, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

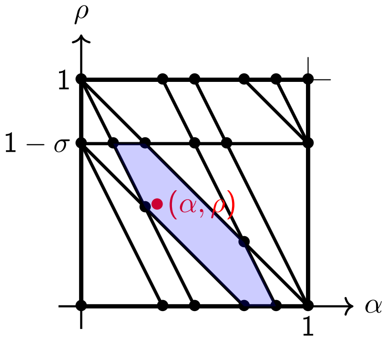
Mots de rotation

Quel est le nombre total de mots de rotation avec le paramètre σ fixé ?

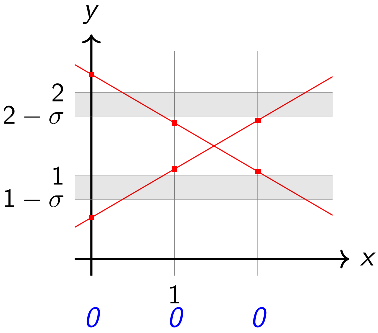
[Cassaigne, F., 2007] : une borne supérieure unique pour tout σ; des formules précises pour $1/3 < \sigma < 2/3$ (valeurs irrationnelles).

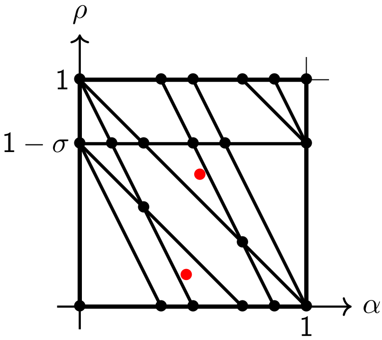
Dualité pour les mots de rotation avec σ fixé





Droites et points symétriques





Nombre de mots de rotations

Pour un σ fixé, on a

$$r_\sigma(n+1) \leq \frac{f(n)}{2} + 1,$$

Par exemple, si $3/8 < \sigma < 2/5$, on a

$$r_\sigma(n+1) = \begin{cases} \frac{f(n)}{2} - 7, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{f(n)}{2} - 8, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

à partir de $n = 8$.

Nombre total de mots de rotation

Faut-il dessiner un cube - α, β, σ ?
Heureusement que non.

Nombre total de mots de rotation

Theorem (F., Jamet, 2014)

Starting from $n = 3$, the number of binary rotation words of length $n + 1$ is

$$f(n+1) = n^2 + 3n + 4 + \frac{1}{2}\sum_{p=3}^{n} \varphi(p)(n^2 - p^2 + n + p) - f_1(n) - 2\sum_{l=2}^{n-1} f_2(n, l),$$

where

$$f_1(n) = \begin{cases} 2\sum_{i=k}^{2k}\sum_{p=1}^{i+1}\varphi(p), & \text{if } n = 2k+1, \\ 2\sum_{i=k}^{2k-1}\sum_{p=1}^{i+1}\varphi(p) + \sum_{p=1}^{k}\varphi(p), & \text{if } n = 2k, \end{cases}$$

$$g(n, l) = n - l + 1 + (n \bmod (l+1)),$$

$$h(n, l) = \min(l + 1, n - l),$$

and

$$f_2(n, l) = \left(\frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{l+1} \right\rfloor g(n, l) - h(n, l)\right)(\varphi(l+1) - 1) + h(n, l)\left(\frac{\varphi(l+1)}{2} - 1\right).$$