

# Chapitre 4

## Popopo - posets, polynômes, polytopes

**Kolja Knauer**

*Dans ce cours, nous verrons une jolie interaction entre les ensembles partiellement ordonnés, les polynômes et les polytopes. Cette interaction existe grâce à Richard Stanley et son article Two poset polytopes [9]. On verra aussi comment celle-ci se retrouve comme un cas particulier de la théorie d'Ehrhart. On prendra ces connexions comme excuse pour explorer le monde des ordres partiels et de la géométrie discrète.*

### 4.1 Introduction

Les ordres partiels (ou posets) sont des objets riches en applications dans le monde réel. Ils sont utiles par exemple pour les problèmes de planification (*scheduling*), mais aussi essentiels en combinatoire pour analyser la structure des ensembles d'objets. Les polytopes ont aussi des nombreuses applications, car ils sont centraux dans l'optimisation linéaire mais aussi dans les mathématiques discrètes et l'informatique théorique. Ils forment également le cœur de la géométrie discrète. Finalement, les polynômes, comme les fonctions les plus simples, sont omniprésents en mathématique, informatique et leurs applications. En particulier, en combinatoire, ils permettent souvent de représenter des aspects numériques des objets à analyser.

Ce cours montre une des plus belles liaisons entre la théorie des ordres partiels et la géométrie discrète que je connais. Nous présenterons comment interpréter un polynôme classique des posets comme un polynôme

associé aux polytopes. Cette observation, faite par Richard Stanley [9], nous permet de voyager dans ces deux branches des mathématiques discrètes et de l'informatique théorique, en introduisant de concepts intéressants et quelques problèmes ouverts.

## 4.2 Posets

Pour plus de détails sur les posets ou simplement pour avoir une explication différente je recommande le livre [3]. Le beau livre [11] traite des questions de dimensions des posets.

Un *poset* (**P**artially **O**rdere**D** **S**ET) ou *ensemble partiellement ordonné* ou simplement un *ordre* est un couple  $P = (X, \leq)$  formé d'un ensemble  $X$  et d'une relation binaire  $\leq$  telle que pour tous  $x, y, z \in X$  :

1.  $x \leq x$ , (réflexivité)
2.  $x \leq y$  et  $y \leq x \implies x = y$ . (anti-symétrie)
3.  $x \leq y$  et  $y \leq z \implies x \leq z$ . (transitivité)

Dans un poset  $P = (X, \leq)$ , nous disons que  $x, y \in X$  sont *comparables* si  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ . Sinon,  $x, y$  sont dits *incomparables*, ce que nous dénotons par  $x \parallel y$ . Les premiers exemples de posets sont simplement les ordres qu'on connaît depuis toujours :  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, \leq)$ . Pour les espaces  $d$ -dimensionnels comme  $(\mathbb{N}^d, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}^d, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}^d, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}^n, \leq)$ , on peut définir l'*ordre composantes à composantes* où  $(x_1, \dots, x_d) \leq (y_1, \dots, y_d)$  si  $x_1 \leq y_1, \dots, x_d \leq y_d$ . Dans le même esprit on définit le *maximum* et *minimum composantes à composantes* respectivement par  $\max(x, y) = (\max(x_1, y_1), \dots, \max(x_d, y_d))$  et  $\min(x, y) = (\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_d, y_d))$ .

Un autre ordre naturel des ensembles de mots comme  $\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{Q}^d$  et  $\mathbb{R}^n$  est l'*ordre lexicographique*  $\leq_{\text{lex}}$ . Il est exactement l'ordre que les mots auront dans un dictionnaire, c'est-à-dire,  $x \leq_{\text{lex}} y$  si  $x = y$  ou s'il existe un  $1 \leq i \leq d$  tel que  $x_j \leq y_j$  pour tout  $1 \leq j < i$  et  $x_i < y_i$ . Notons que à différence de l'ordre composantes à composantes, dans l'ordre lexicographique tous les éléments sont comparables.

Dans un poset  $P = (X, \leq)$ , nous disons que  $y$  *couvre*  $x$ , noté  $x \prec y$ , si  $x \leq z \leq y \implies z \in \{x, y\}$  pour tout  $z \in X$ . Par exemple dans  $(\mathbb{Z}, \leq)$  nous avons  $x \prec y$  si et seulement si  $y - x = 1$ . Le *diagramme de Hasse* de  $P$  est un placement des points de  $X$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  tel que la coordonnée  $y$  de  $x$  est inférieure à la coordonnée  $y$  de  $z$  si  $x \leq z$  et une arête dessinée de  $x$  à  $z$  si  $x \prec z$ . Voyez la figure 4.1 pour le diagramme de Hasse de  $(\mathbb{Z}^2, \leq)$ . On peut l'obtenir en appliquant une rotation de 45 degrés dans le sens

anti-horaire à la grille  $\mathbb{Z}^2$  avec  $(x, y)$  formant une arête si et seulement si  $\{y_1 - x_1, y_2 - x_2\} = \{0, 1\}$ .

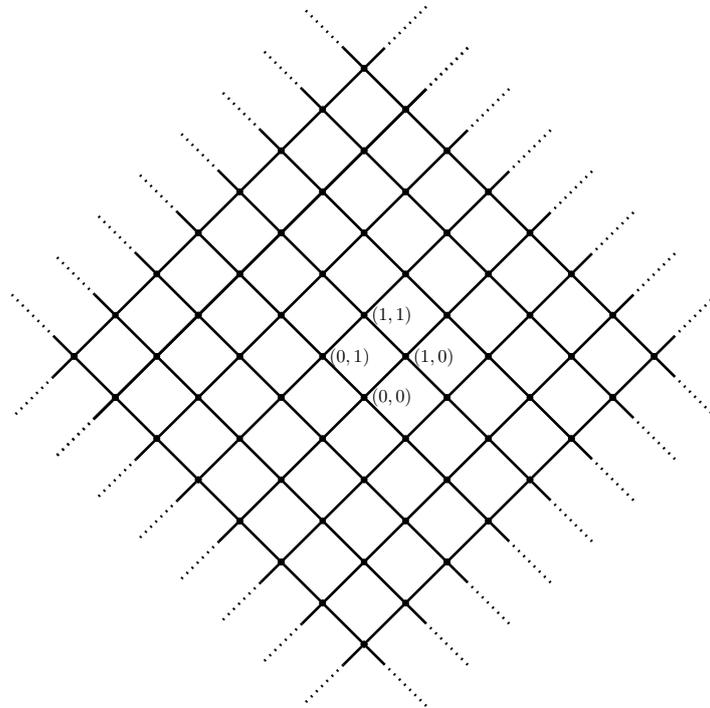


FIGURE 4.1 – Le diagramme de Hasse de  $(\mathbb{Z}^2, \leq)$ .

Nous disons qu'un poset  $P = (X, \leq_P)$  est un *sous-poset induit* d'un autre poset  $Q = (Y, \leq_Q)$ , si  $X \subseteq Y$  et  $x \leq_Q y \iff x \leq_P y$  pour tous  $x, y \in X$ . Cela veut dire que  $Q$  est obtenu à partir de  $P$  en supprimant quelques éléments, mais sans changer les relations entre les éléments qui restent. Dans ce cours, nous nous intéressons surtout aux *posets finis*, c'est-à-dire des posets  $P = (X, \leq)$  où  $X$  est fini. Une façon d'obtenir des posets finis est de prendre des sous-posets induits des posets décrits ci-dessus. Par exemple, on obtient  $(\{0, 1, 2\}, \leq)$ ,  $(\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}, \leq)$ ,  $(\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}, \leq)$ . Voir la figure 4.2 pour les diagrammes de Hasse associés.

Un autre exemple important de poset fini est le *treillis Booléen*  $\mathcal{B}_n = (\mathcal{P}_n, \subseteq)$ , où  $\mathcal{P}_n$  dénote l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, n\}$  et la relation d'ordre est l'inclusion ensembliste. Le poset  $\mathcal{B}_4$  est représenté en figure 4.2. L'observateur avisé peut constater que ce poset est "essentiellement le même" que  $(\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}, \leq)$ . Nous précisons maintenant ce que "essentiellement le même" veut dire.

Soient  $P = (X, \leq_P)$  et  $Q = (Y, \leq_Q)$  deux posets et  $\varphi : X \rightarrow Y$  une fonction. On dit que  $\varphi$  est un *homomorphisme* si  $x \leq_P y \implies \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ . L'ensemble des homomorphismes de  $P$  à  $Q$  est dénoté  $\text{Hom}(P, Q)$ . Un homomorphisme  $\varphi$  est appelé *épimorphisme* (resp. *monomorphisme*) s'il

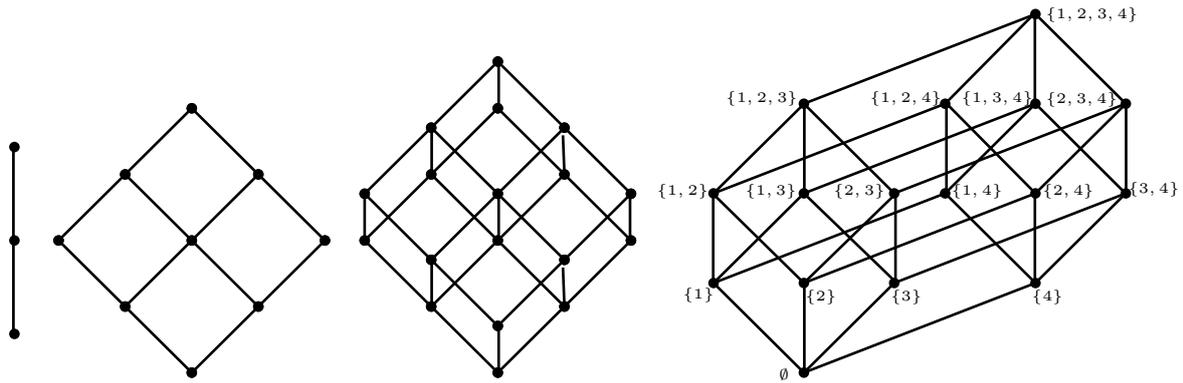


FIGURE 4.2 – Les diagrammes de Hasse de  $(\{0, 1, 2\}, \leq)$ ,  $(\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}, \leq)$ ,  $(\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}, \leq)$  et  $\mathcal{B}_4$ .

est surjectif (resp. s’il est injectif). Si  $\varphi$  est un monomorphisme tel que  $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y) \implies x \leq_P y$ , on dit que  $\varphi$  est un *plongement* de  $P$  dans  $Q$ . Nous dénotons l’ensemble des épimorphismes de  $P$  dans  $Q$  par  $\text{Epi}(P, Q)$ . Un homomorphisme  $\varphi$  est un *isomorphisme* si  $\varphi$  est un épimorphisme et un plongement. On dit que  $P$  et  $Q$  sont *isomorphes*, ce que l’on note par  $P \cong Q$ , s’il existe un isomorphisme de  $P$  à  $Q$ . Voir la figure 4.3 pour un schéma qui représente le rapport d’inclusion des homomorphismes, épimorphismes, monomorphismes, homomorphismes bijectifs, plongements et isomorphismes.

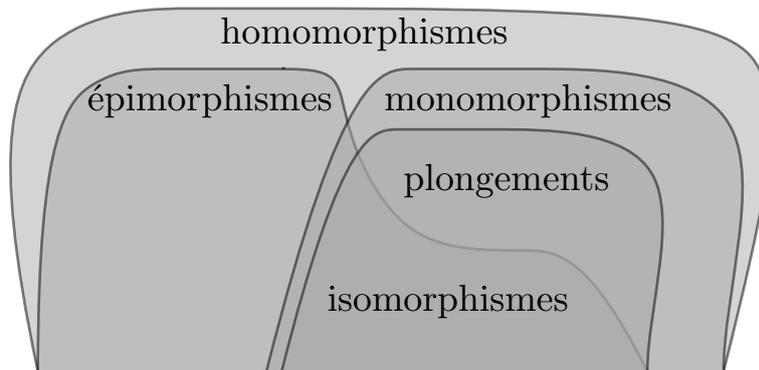


FIGURE 4.3 – Schéma d’inclusion des homomorphismes, épimorphismes, monomorphismes, homomorphismes bijectifs, plongements et isomorphismes.

Le concept d’isomorphisme est exactement ce qu’on va utiliser pour formaliser la notion de “essentiellement le même”. Pour le cas de  $\mathcal{B}_n$ , étant donné  $S \in \mathcal{P}_n$  nous définissons son *vecteur caractéristique*  $\chi(S) = (x_1, \dots, x_n)$  tel que  $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Maintenant l’exercice suivant doit être faisable :

**Exercice 4.2.1.** Soit  $M \subseteq \mathcal{P}_n$ . Montrer

$$(M, \subseteq) \cong (\{\chi(S) \mid S \in M\}, \leq).$$

(L'isomorphisme est  $\chi(\cdot)$ .)

Notons qu'il y a des homomorphismes bijectifs qui ne sont pas des plongement et donc pas des isomorphismes. Par exemple, soit  $M \subseteq \mathcal{P}_n$  alors la fonction  $\chi(\cdot)$  est un tel homomorphisme vers  $\{\chi(S) \mid S \in M\}, \leq_{\text{lex}}$ . Clairement, il y a aussi des plongement qui ne sont pas des isomorphismes parce qu'il ne sont pas surjectifs. Par exemple on peut plonger  $(\{0, \dots, n\}, \leq)$  dans  $(\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\}, \leq)$  en envoyant  $x \in \{0, \dots, n\}$  vers  $(x, x) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\}$ . Vérifier que toutes les région dans la figure 4.3 sont non-vides est un bon exercice. Une autre observation qui suit directement des définitions est la suivante :

**Exercice 4.2.2.** Montrer que  $\varphi$  est un plongement de  $P$  à  $Q$  si et seulement si  $P$  est isomorphe au sous-poset induit de  $Q$ . (Si  $\varphi$  est un plongement le sous-poset induit est  $\varphi(P)$ .)

Définissons maintenant deux autres types de posets importants. La chaîne  $C_k$  est le poset à  $k$  éléments qui sont deux à deux comparables, i.e.  $C_k \cong (\{0, \dots, k-1\}, \leq)$ . L'anti-chaîne  $A_k$  est le poset à  $k$  éléments qui sont deux à deux incomparables. La hauteur  $h(P)$  d'un poset  $P$  est le plus grand  $k$  tel que  $P$  contient un  $C_k$  induit et la largeur  $w(P)$  est le plus grand  $k$  tel que  $P$  contient un  $A_k$  induit. Les hauteurs des quatre posets dans la figure 4.2 sont 3, 5, 6 et 4, respectivement. Leurs largeurs sont 1, 3, 5 et 6, respectivement.

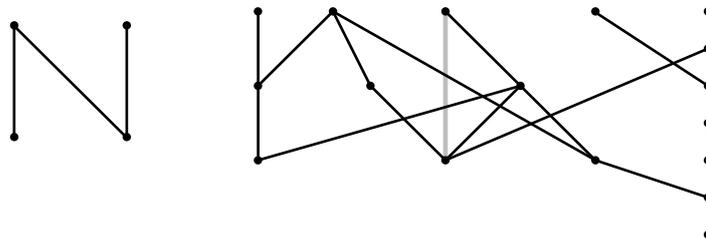


FIGURE 4.4 – Le diagramme de Hasse de  $N$  et d'un autre poset quelconque. Notons que l'arête gris ne peut pas être incluse dans le diagramme de Hasse de ce poset.

Une bonne façon d'obtenir des posets génériques est simplement de tracer un diagramme de Hasse (voir la figure 4.4). Le premier poset s'appelle  $N$ , pour des raisons obscures. Il va nous servir d'exemple pendant tout ce cours. Le deuxième poset est un poset quelconque, mais notons que l'arête gris foncé ne peut pas être incluse dans le diagramme de Hasse

parce qu'elle ne correspond pas à une relation de couverture, *i.e.* l'élément en haut ne couvre pas l'élément en bas.

Un dernier poset est représenté à la figure 4.5. Ses éléments sont différents objets discutés dans ce cours et  $x \leq y$  si  $x$  doit être expliqué avant  $y$ .

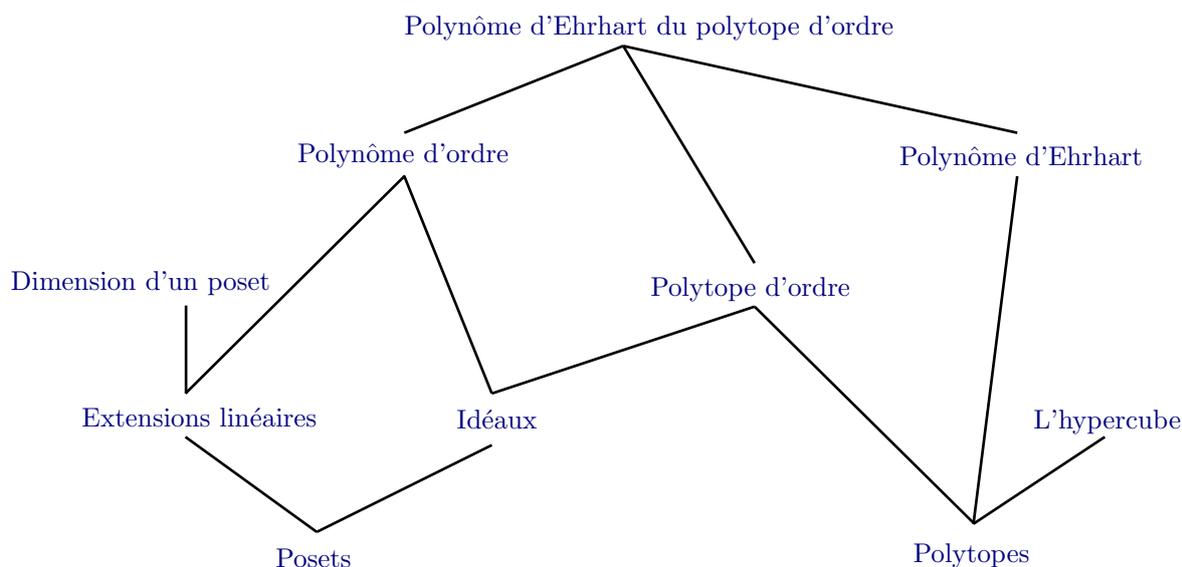


FIGURE 4.5 – Quelques éléments du contenu de ce cours.

### 4.2.1 Treillis distributifs et idéaux

Un poset  $P = (X, \leq)$  est un *treillis* si pour tous  $x, y \in X$  il existe un unique plus petit élément  $x \vee y \in X$  tel que  $x, y \leq x \vee y$  et un unique plus grand élément  $x \wedge y \in X$  tel que  $x \wedge y \leq x, y$ . On appelle  $x \vee y$  et  $x \wedge y$  le *join* et le *meet* de  $x$  et  $y$ , respectivement<sup>1</sup>. Dans un treillis  $P$  il y a toujours un unique élément maximum  $1_P$  et un unique élément minimum  $0_P$ . En effet, supposons qu'il existe plusieurs éléments maximaux (resp. minimaux). Alors leur join (resp. meet) est plus grand (resp. petit) qu'eux, ce qui est impossible. On peut voir  $\vee$  et  $\wedge$  comme des opérations binaires sur  $X$ , chacune étant commutative et associative. Cela nous permet d'écrire  $\vee S$  ou  $\wedge S$  pour  $S \subseteq X$ . En général on ne peut pas dire beaucoup sur l'interaction du join et du meet. Un treillis est *distributif* si les opérations binaires  $\vee$  et  $\wedge$  satisfont la loi distributive :  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  pour tous  $x, y, z \in X$ . Voir la figure 4.6 pour quatre treillis dont les deux derniers sont distributifs.

En fait, nous avons déjà rencontré des exemples de treillis distributifs aux figures 4.1 et 4.2. Généralement, on dit qu'un ensemble est *clos* par

1. En français on peut dire supremum et infimum au lieu de join et meet.

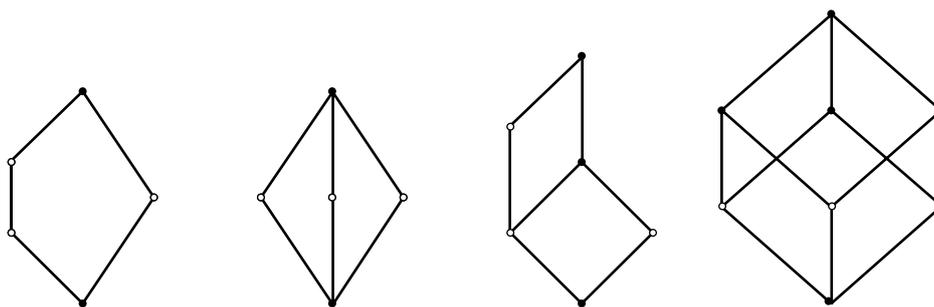


FIGURE 4.6 – Quatre treillis dont les deux derniers sont distributifs.

une opération si le résultat de cette opération tombe encore une fois dans l'ensemble initial. Avec cette notion nous pouvons montrer :

**Exercice 4.2.3.** Soit  $M \subseteq \mathcal{P}(n)$  clos par intersection et union. Montrer que  $(M, \subseteq)$  est un treillis distributif avec  $\vee = \cup$  et  $\wedge = \cap$ . Soit plus généralement  $M \subseteq \mathbb{N}^d$  clos par le maximum par composantes et le minimum par composantes. Montrer que  $(M, \leq)$  est un treillis distributif avec  $\vee = \max$  et  $\wedge = \min$ .

Soit  $P = (X, \leq)$  un poset. Un sous-ensemble  $I \subseteq X$  est un idéal s'il est clos vers le bas, c'est-à-dire  $y \leq x \in I \implies y \in I$ . Pour cette raison les idéaux sont aussi appelés *downsets* en anglais. L'ensemble des idéaux de  $P$  est noté  $\mathcal{I}(P)$  et est ordonné par inclusion. Les idéaux principaux de  $P$  sont les idéaux de la forme  $\downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\}$  pour  $x \in P$ . Voir la figure 4.7 pour l'exemple de  $N$  et  $\mathcal{I}(N)$ . L'ensemble  $\{a, c, d\}$  est un idéal principal, mais l'idéal  $\{a, b, c\}$  ne l'est pas. L'ensemble  $\{b, d\}$ , n'est pas un idéal de  $N$ .

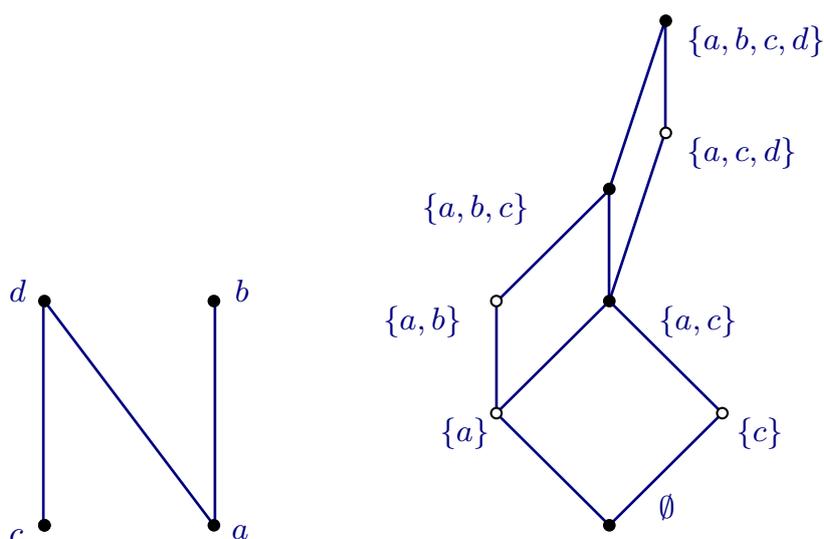


FIGURE 4.7 – Le poset  $N$  et le poset  $\mathcal{I}(N)$  associé. Le poset  $\mathcal{J}(\mathcal{I}(N)) \cong N$  peut être retrouvé en prenant le poset induit dans  $\mathcal{I}(N)$  par les join-irréductibles (les sommets blancs).

En utilisant l'exercice 4.2.3, pour résoudre l'exercice suivant il suffit de montrer que l'ensemble des idéaux d'un poset est clos par union et intersection.

**Exercice 4.2.4.** Soit  $P$  un poset. Montrer que le poset  $\mathcal{I}(P)$  associé est un treillis distributif.

Nous avons donc une façon d'associer à chaque poset fini un treillis distributif fini. Peut-on faire l'inverse? Dans un treillis  $P = (X, \leq)$ , un élément  $j \in X$  est appelé *join-irréductible* si  $x_1 \vee \dots \vee x_k = j \implies j \in \{x_1, \dots, x_k\}$  pour tous  $x_1, \dots, x_k \in X$ . On définit  $\bigvee \emptyset = 0_P$ , alors  $0_P$  n'est pas join-irréductible. En prenant ceci en compte, on peut résoudre l'exercice suivant :

**Exercice 4.2.5.** Soit  $P = (X, \leq)$  un treillis. Montrer qu'un élément  $j \in X$  est join-irréductible si et seulement si  $j$  couvre exactement un élément. (Si un élément couvre plusieurs autres éléments, il est leur join.)

Dans les figures 4.6 et 4.7 les éléments join-irréductibles sont les sommets blancs. Le sous-poset de  $P$  induit par les join-irréductibles est dénoté par  $\mathcal{J}(P)$ . Le *théorème fondamental des treillis distributifs finis* ou théorème de Birkhoff<sup>2</sup> est le suivant, dont une partie a déjà été montrée dans l'exercice 4.2.4 :

**Théorème 4.2.6** (Birkhoff 1937 [2]). L'application  $\mathcal{I}(\cdot)$  est une bijection entre les posets et les treillis distributifs finis. Son inverse est  $\mathcal{J}(\cdot)$ .

*Démonstration.* Les applications  $\mathcal{I}(\cdot)$  et  $\mathcal{J}(\cdot)$  sont bien définies. En effet, l'exercice 4.2.4 montre que  $\mathcal{I}(P)$  est un treillis distributif pour tout poset  $P$ . Inversement, il est clair que  $\mathcal{J}(\cdot)$  donne toujours un poset fini.

D'abord, nous allons montrer que  $\mathcal{J}(\mathcal{I}(\cdot))$  est l'identité. Nous pouvons utiliser l'exercice 4.2.5 pour voir que les éléments join-irréductibles de  $\mathcal{I}(P)$  correspondent aux idéaux de  $P$  qui contiennent exactement un élément  $x$ , tel que, privés de celui-ci, ils restent des idéaux de  $P$ . Donc, ce sont les idéaux principaux de  $P$ , de la forme  $\downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\}$  avec  $x \in P$ . Ainsi,  $\mathcal{J}(\mathcal{I}(P)) = \{\downarrow x \mid x \in P\}$ . La fonction  $\varphi : \{\downarrow x \mid x \in P\} \rightarrow P$  définie par  $\varphi(\downarrow x) = x$  est clairement un homomorphisme bijectif avec une inverse qui est aussi un homomorphisme. Nous avons montré  $P \cong \mathcal{J}(\mathcal{I}(P))$ .

---

2. Garrett Birkhoff, (1911-1996), mathématicien américain. Son père est le mathématicien George David Birkhoff. Après avoir étudié à l'université Harvard jusqu'en 1932, Garrett poursuivit sa formation à Cambridge. Membre de la Société des amis de Harvard, il passa le reste de sa carrière à y enseigner. Au cours de sa carrière, Birkhoff publia plus de 200 articles et dirigea plus de 50 thèses. Il fut membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis et de l'Académie américaine des arts et des sciences.

Pour voir que  $\mathcal{I}(\mathcal{J}(\cdot))$  est l'identité, prenons  $P$  un treillis distributif et  $\mathcal{J}(P)$  son poset de join-irréductibles. Nous voulons montrer que  $\varphi : P \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{J}(P))$  définit  $\varphi(x) = \{y \in \mathcal{J}(P) \mid y \leq x\}$  est un isomorphisme. D'abord, si  $y' \in \mathcal{J}(P)$ ,  $y \in \varphi(x)$  et  $y' \leq y$  alors  $y' \leq y \leq x$  et  $y' \in \varphi(x)$ . Donc,  $\varphi(x) \in \mathcal{I}(\mathcal{J}(P))$ . De plus, il est facile à voir que  $x' \leq x$  implique  $\varphi(x') \subseteq \varphi(x)$ . Donc,  $\varphi$  est un homomorphisme entre  $P$  et  $\mathcal{I}(\mathcal{J}(P))$ . Pour montrer l'injectivité supposons que  $\varphi(x) = \varphi(x')$ , donc  $\{y \in \mathcal{J}(P) \mid y \leq x\} = \{y \in \mathcal{J}(P) \mid y \leq x'\}$ , mais

$$x = \bigvee \{y \in \mathcal{J}(P) \mid y \leq x\} = \bigvee \{y \in \mathcal{J}(P) \mid y \leq x'\} = x'.$$

Pour la surjectivité soit  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{J}(P))$ . Nous allons montrer que  $\varphi^{-1}(I) = \bigvee I$ . Clairement,  $\varphi(\bigvee I) \supseteq I$ . Pour l'autre inclusion, soit  $I = \{x_1, \dots, x_k\}$  et  $x \in \mathcal{J}(P)$  tel que  $x \leq \bigvee I$ . En utilisant que  $P$  est distributif nous avons  $x = x \wedge \bigvee I = (x_1 \wedge x) \vee \dots \vee (x_k \wedge x)$ . Comme  $x$  est join-irréductible, il existe un  $i$  tel que  $x \wedge x_i = x$  donc  $x \leq x_i$ . Alors  $x \in I$ , ce qu'on voulait.

Pour montrer que  $\varphi$  est un plongement, soient  $I, I' \in \mathcal{I}(\mathcal{J}(P))$  avec  $I \subseteq I'$ . Puisque nous avons juste montré que  $\varphi^{-1}(I) = \bigvee I$ ,  $\bigvee I \leq \bigvee I'$  est immédiat. ■

En particulier, si  $P$  est un treillis distributif, nous avons  $P \cong \mathcal{I}(\mathcal{J}(P))$ . Cela montre que les deux premiers treillis de la figure 4.6 ne sont pas distributifs, parce leurs images respectives par rapport à  $\mathcal{I}(\mathcal{J}(\cdot))$  sont les deux derniers treillis de la figure 4.6.

Il y a aussi une façon facile d'interpréter les idéaux d'un poset comme des homomorphismes. On peut associer l'idéal  $I$  de  $P$  au vecteur  $\mathbf{1} - \chi(I) \in \{0, 1\}^{|P|}$ . Ce vecteur peut être vu comme une fonction de  $P$  vers  $\{0, 1\}$  et on peut se convaincre qu'elle est en fait un homomorphisme de  $P$  vers  $C_2$ . Les seuls idéaux qui ne correspondent pas à un homomorphisme surjectif sont  $P$  et  $\emptyset$ . Ce qui amène à :

**Exercice 4.2.7.** Soit  $P$  un poset. Montrer  $|\mathcal{I}(P)| = |\text{Hom}(P, C_2)| = |\text{Epi}(P, C_2)| + 2$ .

## 4.2.2 Extensions linéaires et dimension

Soit  $P = (X, \leq)$  un poset. Une *extension linéaire* de  $P$  est une chaîne  $L = (X, \leq_L)$  telle que  $x \leq y \implies x \leq_L y$  pour tous  $x, y \in X$ . Par exemple, la chaîne  $(a \leq b \leq c \leq d)$  est une extension linéaire de  $\mathbb{N}$  étiqueté comme sur la figure 4.7. Pour se faciliter la vie, on écrit simplement  $abcd$  pour cette chaîne. Le cas général se traite de façon similaire. Les extensions

linéaires sont présentes dans la vie de tous les jours, par exemple quand on doit exécuter différentes tâches dans un ordre précis. Par exemple, l'ordre dans lequel les objets de la figure 4.5 sont expliqués dans ce cours est une extension linéaire de ce poset.

Généralement, on appelle un élément d'un ensemble d'ensembles  $M$  *maximal* (resp. *minimal*) s'il est maximal (resp. minimal) par rapport à  $(M, \subseteq)$ . Par exemple, dans la proposition suivante une chaîne induite dans  $P$  est maximale, si elle n'est pas contenue dans une autre chaîne induite de  $P$ .

**Proposition 4.2.8.** *Les extensions linéaires de  $P$  sont en correspondance bijective avec les chaînes maximales induites de  $\mathcal{I}(P)$ .*

*Démonstration.* Soit  $L = x_1 \dots x_n$  une extension linéaire de  $P = (X, \leq)$ . Pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , nous avons  $x_i \leq x_j \implies i \leq j$ . Donc  $(\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, \dots, x_{n-1}\}, X)$  est une chaîne dans  $\mathcal{I}(P)$ . Comme, la différence entre deux éléments consécutifs est un ensemble de taille 1, cette chaîne n'est pas contenue dans une autre chaîne plus grande, c'est-à-dire, elle est maximale.

Inversement, soit  $C_k = (I_1, \dots, I_k)$  une chaîne maximale de  $\mathcal{I}(P)$ . Comme  $I_{i-1} \subsetneq I_i$ , la différence  $I_i \setminus I_{i-1}$  est non-vide. Soit  $x \in I_i \setminus I_{i-1}$  minimal, c'est-à-dire  $x' < x \implies x' \in I_{i-1}$ . Donc  $I_{i-1} \cup \{x\} \in \mathcal{I}(P)$  et  $I_{i-1} \subsetneq I_{i-1} \cup \{x\} \subseteq I_i$ . Comme la chaîne est maximale nous avons montré que  $I_i \setminus I_{i-1}$  a un seul élément, que nous pouvons appeler  $x_i$ . Si  $i < j$  alors  $x_i \in I_i$  et  $I_j \setminus I_i \ni x_j$ , donc  $x_i$  ne peut pas être plus grand ni égal à  $x_j$ .

Aussi, par maximalité de la chaîne, nous avons  $I_1 = \emptyset$  et  $I_k = X$ , donc  $k - 1 = n$  et  $x_1 \dots x_n$  est une extension linéaire de  $P$ .

Évidemment, les deux applications que nous avons montrées sont des inverses l'une de l'autre et nous avons donné une bijection entre les deux ensembles. ■

Nous notons l'ensemble d'extensions linéaires d'un poset  $P$  par  $\mathcal{L}(P)$ . Il y a aussi une façon facile d'interpréter les extensions linéaires d'un poset comme des épimorphismes. Pour définir un homomorphisme  $\varphi_L$  à partir d'un  $L \in \mathcal{L}(P)$ , l'idée est d'envoyer chaque élément de  $P$  à sa position dans  $L$ .

**Exercice 4.2.9.** *Soit  $P$  un poset à  $n$  éléments. Montrer  $|\mathcal{L}(P)| = |\text{Epi}(P, C_n)|$ .*

Le graphe  $G_P$  des extensions linéaires de  $P$  a comme sommets l'ensemble  $\mathcal{L}(P)$  des extensions linéaires de  $P$ . Il y a une arête entre deux sommets  $L, L'$  de  $G_P$  si la différence entre les extensions linéaires  $L, L'$  est seulement d'une transposition voisine, i.e.  $L'$  peut être obtenue de  $L$  en changeant

les positions de deux éléments consécutifs de  $L$ . Voir la figure 4.8 pour le graphe des extensions linéaires de  $N$  (étiqueté comme sur la figure 4.7). Les chiffres dans la figure 4.8 deviendront clairs avant la proposition 4.2.12.

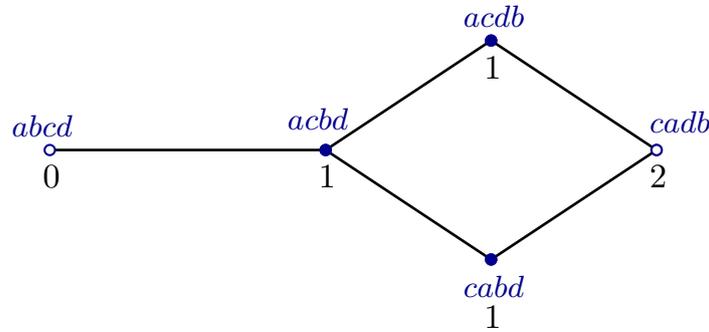


FIGURE 4.8 – Le graphe  $G_N$  des extensions linéaires de  $N$ . Les chiffres dénotent le nombre de descentes de chaque extension linéaire par rapport à  $F = abcd$ .

Un réalisateur de  $P$  est un ensemble  $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_k\}$  d'extensions linéaires de  $P$  tel que pour tous  $x, y \in X$  tels que  $x \parallel y$  ils existent  $L_i, L_j \in \mathcal{R}$  telles que  $x \leq_{L_i} y$  et  $y \leq_{L_j} x$ . La dimension  $\dim(P)$  de  $P$  est la taille minimale d'un réalisateur. Par exemple,  $\dim(N) \leq 2$ , parce que les deux extensions linéaires  $abcd$  et  $cadb$  représentées par un sommet blanc sur la figure 4.8 forment un réalisateur. Comme, les seuls posets de dimension 1 sont les chaînes, nous avons  $\dim(N) = 2$ . La notion de dimension est en fait très liée à la dimension géométrique, comme justifié par la proposition suivante :

**Proposition 4.2.10.** *La dimension de  $P$  est le plus petit  $d \in \mathbb{N}$  tel qu'il existe un plongement de  $P$  dans  $\mathbb{N}^d$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_k\}$  un réalisateur de  $P$ . Pour  $x \in X$  définissons  $x_i$  comme la position de  $x$  dans  $L_i$ , i.e. si  $x$  est le  $x_i$ -ème élément de  $L$ . Le fait que  $\mathcal{R}$  est un réalisateur implique que  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{N}^k$  défini par  $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_k)$  est un plongement.

Inversement, si  $P$  est plongé dans  $\mathbb{N}^k$ , alors par l'exercice 4.2.2,  $P$  est isomorphe à un sous-poset induit  $Q$  de  $\mathbb{N}^k$ . Il suffit de montrer que  $\dim(Q) \leq k$ . Nous incrémentons les coordonnées de chacun des points de  $Q$  par des petites valeurs de façon à ce qu'ils conservent le même ordre, mais qu'aucune paire de points n'ait une même coordonnée. Une façon concrète de le faire est de prendre une extension linéaire  $L = q_1 \dots q_n$  de  $Q$  est remplacer  $q_i$  par  $q_i + \frac{1}{n-i+1} \mathbf{1}$ , où  $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^k$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Maintenant, soit  $L_i$  l'ordre tel que  $x \leq_{L_i} y$  si pour la  $i$ -ème coordonnée nous avons  $x_i \leq y_i$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{R} = \{L_1, \dots, L_k\}$  est un réalisateur de  $P$ . ■

Avec la proposition 4.2.10, la figure 4.9 donne une autre façon de voir que  $\dim(N) = 2$ , mais aussi  $\dim(A_k) = 2$ .

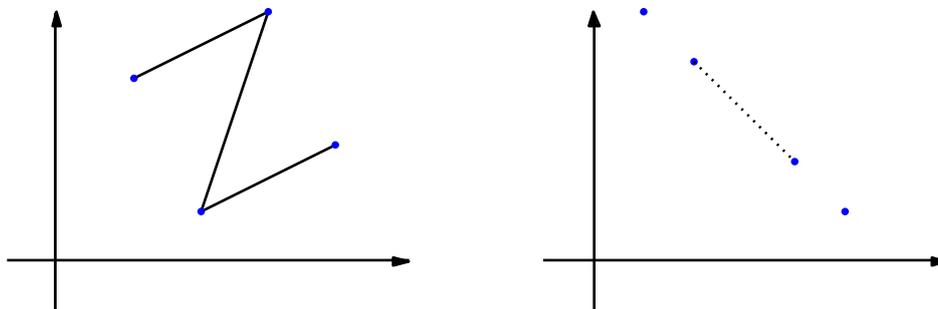


FIGURE 4.9 – Illustrations géométriques pour  $\dim(N) = 2 = \dim(A_k)$ .

Finalement, nous voudrions nous convaincre que la dimension est vraiment un paramètre intéressant, dans le sens où, pour tout  $d$ , il existe un poset de dimension  $d$ . Pour cela nous définissons le poset  $S_n$  qui porte le joli nom d'*exemple standard*. Il est défini sur l'ensemble  $X = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  par des comparabilités  $a_i \leq b_j \iff i \neq j$ . Voir la figure 4.10 pour une illustration.

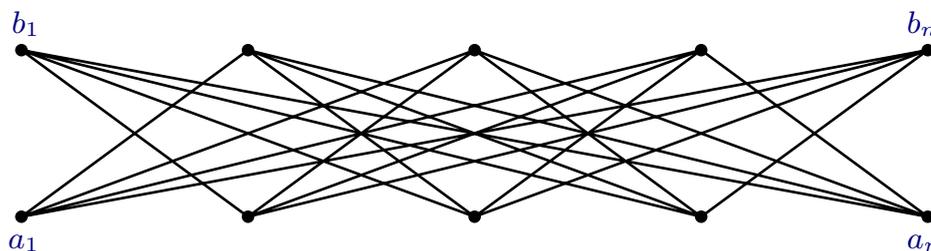


FIGURE 4.10 – L'exemple standard  $S_n$ .

**Proposition 4.2.11.** *Nous avons  $\dim(S_n) = n$  pour tout  $n \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $L_i$  une extension linéaire de  $S_n$  telle que  $b_i \leq_{L_i} a_i$ . Par transitivité nous obtenons  $a_j \leq_{L_i} b_j$  pour tout  $j \neq i$ . Donc, dans un réalisateur, il faut avoir au moins une extension linéaire  $L_i$  pour chaque couple  $(a_i, b_i)$  et  $\dim(S_n) \geq n$ .

Pour montrer que  $\dim(S_n) \leq n$ , d'après la proposition 4.2.10, il suffit de donner un plongement de  $S_n$  dans  $\mathbb{N}^n$ . On dénote par  $e_i \in \mathbb{N}^n$  le vecteur ayant des composantes nulles partout sauf en la  $i$ -ème coordonnée qui vaut 1 et par  $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^n$  le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Il est facile de vérifier que  $\varphi : S_n \rightarrow \mathbb{N}^n$  défini par  $\varphi(a_i) = e_i$  et  $\varphi(b_i) = \mathbf{1} - e_i$  est un plongement comme demandé. ■

Soit  $F \in \mathcal{L}(P)$  fixé. Une *descente par rapport à  $F$*  d'une extension linéaire  $L = x_1 \dots x_n$  de  $P$  est un couple  $(i, i + 1)$  tel que  $x_i \geq_F x_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ . Le nombre de descentes de  $L$  est dénoté par  $\text{des}_F(L)$ . Le nombre d'extensions linéaires  $L$  de  $P$  avec  $\text{des}_F(L) = i$  est noté  $\omega_P(i)$ , où l'indice  $F$  est supprimé parce que cette valeur est indépendante du choix de  $F$ . Cela peut être montré directement en utilisant la prochaine proposition, mais est en particulier une conséquence de théorème 4.2.14. Les nombres des descentes de  $N$  par rapport à  $F = abcd$  sont données dans la figure 4.8.

**Proposition 4.2.12.** *Dans  $G_P$ , la valeur  $\text{des}_F(L)$  correspond aux voisins de  $L$  qui sont sur un plus court chemin entre  $L$  et  $F$ .*

*Démonstration.* Clairement, les descentes  $(i, i + 1)$  de  $L$  correspondent à des voisins de  $L$  dans  $G_P$  (ceux obtenus en remplaçant  $(i, i + 1)$  par  $(i + 1, i)$ ).

Pour montrer qu'elles correspondent exactement à ceux sur les plus court chemins, on montre que la distance entre  $L$  et  $F$  est exactement le nombre de couples  $(i, j)$  tels que  $i <_L j$  et  $j <_F i$ . Il s'agit d'une borne inférieure. Il suffit donc de montrer qu'on peut trouver un chemin de telle longueur. On procède par récurrence sur le nombre de couples qui sont ordonnés de façon opposées dans  $F$  et  $L$ . Si ce nombre est nul, nous avons  $F = L$  et il n'y a rien à montrer. Sinon soient  $L = 1 \dots n$  et  $(i, j)$  le couple différent en  $F$  avec la plus petite différence  $j - i$ . Si  $j - i = 1$ , en changeant la position de  $i$  et  $j$  on obtient un voisin  $L'$  de  $L$  avec moins de différences avec  $F$  que  $L$ . Par récurrence il existe un plus court chemin  $C'$  de  $L'$  à  $F$  dont la longueur est le nombre de couples différents entre  $L'$  et  $F$ . Donc la concaténation de l'arête  $\{L, L'\}$  avec  $C'$  donne un plus court chemin  $C$  de  $L$  à  $F$  dont la longueur est le nombre de couples différents entre  $L$  et  $F$ .

Il nous reste à montrer que  $j - i$  est toujours égal à 1. Supposons que  $j - i > 1$  et soit  $i < k < j$ . Dans  $F$ ,  $i$  et  $j$  sont inversés, donc  $(i, k)$  ou  $(k, j)$  est aussi un couple inversé dont la différence est plus petite que  $j - i$ . Ceci contredit la minimalité dans le choix de  $(i, j)$ . ■

Sur la figure 4.8, pour chaque extension linéaire  $L$  de  $N$  nous calculons  $\text{des}_F(L)$  par rapport à  $F = abcd$ . En particulier, nous voyons que  $\omega_N(0) = 1$ ,  $\omega_N(1) = 3$ ,  $\omega_N(2) = 1$  et  $\omega_N(i) = 0$  pour tout  $i \geq 3$ . Une suite  $(s_1, \dots, s_\ell)$  de nombres réels est appelé *unimodale* s'il existe  $1 \leq m \leq \ell$  tel que  $s_i \leq s_j$  pour tous  $1 \leq i \leq j \leq m$  et  $s_i \geq s_j$  pour tous  $m \leq i \leq j \leq \ell$ . Un problème ouvert important de la combinatoire des posets est

**Problème 4.2.13.** *Soit  $P$  un poset fini de  $n$  éléments. La suite  $\omega_P = (\omega_P(0), \dots, \omega_P(n - 1))$  est-elle unimodale ?*

Le problème est résolu pour les posets *graded* où toutes les chaînes maximales ont la même longueur [7] et pour les unions disjointes de chaînes [8].

### 4.2.3 Le polynôme d'ordre

Si  $P$  est un poset, nous définissons la fonction  $\Omega_P(k) = |\text{Hom}(P, C_k)|$ . Donc,  $\Omega_P$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui compte les homomorphismes de  $P$  à  $C_k$ . Une autre fonction est  $\varepsilon_P(k) = |\text{Epi}(P, C_k)|$ . Si  $P$  a  $n$  éléments, l'exercice 4.2.9 montre  $\varepsilon_P(n) = |\mathcal{L}(P)|$ .

**Théorème 4.2.14.** *Soit  $P$  un poset à  $n$  éléments. La fonction  $\Omega_P$  peut être étendue à un polynôme réel. Plus précisément*

$$\Omega_P(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_P(i) \binom{t}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{t-1+n-i}{n}.$$

En particulier, nous pouvons écrire  $\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  avec  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ ,  $a_0 = 1$  et  $a_n = \frac{|\mathcal{L}(P)|}{n!}$ .

*Démonstration.* Observons qu'un homomorphisme  $\varphi$  quelconque de  $P$  à  $C_k$  avec une image de taille  $i$  peut être écrit comme une composition d'un épimorphisme  $\varphi'$  de  $P$  à  $C_i$  et après un monomorphisme  $\varphi''$  de  $C_i$  à  $C_k$ , i.e.  $\varphi = \varphi'' \circ \varphi'$ . Pour  $\varphi''$  il y a  $\binom{k}{i}$  possibilités, parce que  $\varphi''$  correspond à un choix de  $i$  valeurs  $\varphi''(0), \dots, \varphi''(i-1) \in \{0, \dots, k-1\}$  telles que  $\varphi''(0) < \dots < \varphi''(i-1)$ . Comme le nombre de choix pour  $\varphi'$  est  $\varepsilon_P(i)$ , nous pouvons conclure  $\Omega_P(k) = \sum_{i=1}^{|P|} \varepsilon_P(i) \binom{k}{i} = \sum_{i=1}^{|P|} \left( \frac{\varepsilon_P(i)}{i!} (k-i+1) \cdots k \right)$ . Donc, en particulier  $\Omega_P$  peut être étendu à un polynôme réel en  $k$  de la forme  $\sum_{i=0}^n a_i t^i$  avec  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$  avec  $a_0 = 1$  et par l'exercice 4.2.9 nous avons  $a_n = \frac{\varepsilon_P(n)}{n!} = \frac{|\mathcal{L}(P)|}{n!}$ .

Pour la deuxième égalité, fixons  $F \in \mathcal{L}(P)$ . Pour  $L \in \mathcal{L}(P)$  nous définissons l'ensemble d'homomorphismes  $\varphi$  de  $L$  dans  $C_k$  tels que si  $L$  ordonne deux éléments de  $P$  différemment de  $F$ , alors  $\varphi$  ne les confond pas :

$$\mathcal{A}_F(L, k) := \{ \varphi \in \text{Hom}(L, C_k) \mid x >_L y \text{ et } x <_F y \implies \varphi(x) > \varphi(y) \}.$$

Montrons que  $\text{Hom}(P, C_k)$  est l'union disjointe  $\bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}_F(L, k)$ .

D'abord convainquons-nous que les ensembles  $\mathcal{A}_F(L, k)$  sont deux à deux disjoints. Soient  $L \neq L'$ . Il existe  $x, y \in X$  tels que  $x <_L y$  et  $y <_{L'} x$ . Supposons sans perte de généralité  $x <_F y$ . Donc  $\varphi \in \mathcal{A}_F(L', k) \implies$

$\varphi(x) > \varphi(y)$ , mais  $\varphi \in \text{Hom}(L, C_k) \implies \varphi(x) \leq \varphi(y)$ . Comme  $\mathcal{A}_F(L, k) \subseteq \text{Hom}(L, C_k)$ , nous avons  $\mathcal{A}_F(L, k) \cap \mathcal{A}_F(L', k) = \emptyset$ .

Pour montrer l'égalité des ensembles  $\text{Hom}(P, C_k)$  et  $\bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}_F(L, k)$ , notons d'abord que  $\text{Hom}(P, C_k) \supseteq \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}_F(L, k)$  est trivial, parce que  $\text{Hom}(L, C_k) \subseteq \text{Hom}(P, C_k)$  pour tout  $L \in \mathcal{L}(P)$ . Il nous reste donc à montrer que  $\text{Hom}(P, C_k) \subseteq \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}_F(L, k)$ . Prenons  $\varphi \in \text{Hom}(P, C_k)$ . Nous définissons  $L_\varphi$  comme  $x <_{L_\varphi} y$  si  $\varphi(x) < \varphi(y)$  ou  $\varphi(x) = \varphi(y)$  et  $x <_F y$ . Il est facile de voir que  $L_\varphi \in \mathcal{L}(P)$ . En fait, si  $x <_P y$  alors  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ , et alors  $x <_{L_\varphi} y$ . En plus, pour tous  $x, y \in P$  tels que  $x \parallel y$ , nous avons  $x <_{L_\varphi} y$  ou  $y <_{L_\varphi} x$  et cette relation vient ou du fait que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ , ou de la comparabilité en  $F$  et du fait que  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Donc, par l'anti-symétrie de  $F$  et  $C_k$  on ne peut pas avoir  $x <_{L_\varphi} y$  et  $y <_{L_\varphi} x$ . Cela implique  $L_\varphi \in \mathcal{L}(P)$ . Pour conclure, montrons que  $\varphi \in \mathcal{A}_F(L_\varphi, k)$ . En fait, comme  $\varphi(x) < \varphi(y) \implies x <_{L_\varphi} y$  nous avons bien  $y \leq_{L_\varphi} x \implies \varphi(y) \leq \varphi(x)$  et  $\varphi \in \text{Hom}(L_\varphi, C_k)$ . Supposons que  $x <_F y$  et  $x >_{L_\varphi} y$ , alors par définition de  $L_\varphi$  nous avons  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ . Comme  $\varphi \in \text{Hom}(L_\varphi, C_k)$  ceci donne  $\varphi(x) > \varphi(y)$ . Nous avons montré  $\varphi \in \mathcal{A}_F(L_\varphi, k)$ , donc  $\text{Hom}(P, C_k) \subseteq \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}_F(L, k)$ , ce qui nous manquait pour l'égalité  $\text{Hom}(P, C_k) = \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}_F(L, k)$

Au vu de l'égalité d'ensembles que nous venons de montrer, nous pouvons dénombrer les ensembles  $\mathcal{A}_F(L, k)$  pour  $L \in \mathcal{L}(P)$  au lieu de dénombrer  $\text{Hom}(P, C_k)$ . Pour cela on va trouver un codage plus convenable pour les éléments de  $\mathcal{A}_F(L, k)$ . Soit  $L = 1 \dots n$  une extension linéaire de  $P$  et  $\varphi \in \text{Hom}(L, C_k)$  tel que si  $x >_L y$  et  $x <_F y$ , alors  $\varphi(x) > \varphi(y)$ . Donc  $\mathcal{A}_F(L, k)$  est l'ensemble de suites  $1 \leq \varphi(1) \leq \dots \leq \varphi(n) \leq k$  telles que si pour un  $j > i$  nous avons  $j <_F i$  alors  $\varphi(j) > \varphi(i)$ . En particulier, si  $i + 1 <_F i$ , nous avons  $\varphi(i + 1) > \varphi(i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ . Nous allons montrer que l'implication inverse est aussi vraie, c'est-à-dire si  $i + 1 <_F i \implies \varphi(i + 1) > \varphi(i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ , alors  $j <_F i \implies \varphi(j) > \varphi(i)$  pour tout couple  $1 \leq i < j \leq n$ . Nous le montrons par récurrence sur  $j - i$ . Le cas  $j - i = 1$  est simplement le cas  $j = i + 1$  qui est vrai par hypothèse. Supposons  $j - i > 1$  et prenons  $i < k < j$ . Si  $j <_F i$ , alors  $j <_F k$  ou  $k <_F i$ . Comme  $k - i, j - k < j - i$ , l'hypothèse de récurrence donne  $\varphi(k) < \varphi(j)$  ou  $\varphi(i) < \varphi(k)$ . Par transitivité,  $\varphi(i) < \varphi(j)$ .

Pour dénombrer  $\mathcal{A}_F(L, k)$ , nous comptons alors les suites  $1 \leq \varphi(1) \leq \dots \leq \varphi(n) \leq k$  telles que si  $i + 1 <_F i$ , l'inégalité  $\varphi(i) < \varphi(i + 1)$  est stricte. Il faut donc choisir pour chaque  $0 \leq i \leq n$  la valeur  $\varphi(i + 1) - \varphi(i)$ , où  $\varphi(0)$  est défini comme 1 et  $\varphi(n + 1)$  est défini comme  $k$ . Si  $i + 1 <_F i$ , elle doit être strictement positive (et ceci arrive exactement  $\text{des}_F(L)$  fois), sinon simplement positive. En plus leur somme doit être  $k - 1$ . Cela revient à choisir  $n + 1$  valeurs strictement positives tels que leur somme est  $k - 1 +$

$n + 1 - \text{des}_F(L) = k + n - \text{des}_F(L)$  et ensuite à retirer 1 à chacune des  $n + 1 - \text{des}_F(L)$  valeurs qui correspondent à un couple  $i <_F i + 1$ . Cela correspond à choisir  $n$  endroits où couper l'intervalle  $[1, 2, \dots, k + n - \text{des}_F(L)]$  pour obtenir  $n + 1$  intervalles. Pour ceci, il existe  $\binom{k-1+n-\text{des}_F(L)}{n}$  possibilités. Nous avons trouvé que le nombre de ces suites et donc aussi la taille de  $\mathcal{A}_F(L, k)$  est  $\binom{k-1+n-\text{des}_F(L)}{n}$ . Nous calculons

$$\Omega_P(k) = \sum_{L \in \mathcal{L}} \binom{k-1+n-\text{des}_F(L)}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_P(i) \binom{k-1+n-i}{n}. \quad \blacksquare$$

Nous appelons le polynôme  $\Omega_P(t)$  le *polynôme d'ordre* de  $P$ . La première description de  $\Omega_P(t)$  dans le théorème 4.2.14 est indépendante du choix d'un  $F \in \mathcal{L}(P)$ , mais la définition de  $\omega_P$  dans la deuxième description l'est a priori. Du coup une conséquence du théorème est que  $\omega_P$  est indépendant du choix de  $F \in \mathcal{L}(P)$ .

Comme exemple, nous pouvons calculer le polynôme d'ordre de  $N$  :

$$\Omega_N(t) = \varepsilon_N(1)t + \varepsilon_N(2) \binom{t}{2} + \varepsilon_N(3) \binom{t}{3} + \varepsilon_N(4) \binom{t}{4}.$$

D'abord, remarquons que  $\varepsilon_P(1) = 1$  pour tout poset, parce qu'il y a un seul épimorphisme vers  $C_1 = \{0\}$  – la fonction constante. En utilisant les exercices 4.2.7 et 4.2.9 et le fait qu'on connaît le nombre d'idéaux et d'extensions linéaires de  $N$  (figures 4.7 et 4.8) nous avons :  $\varepsilon_N(2) = 6$  et  $\varepsilon_N(4) = 5$ . Pour calculer  $\varepsilon_N(3)$ , il faut donc déterminer le nombre d'homomorphismes surjectifs de  $N$  à  $C_3$ . Une petite distinction de cas donne  $\varepsilon_N(3) = 10$ . Nous obtenons :

$$\Omega_N(k) = 1k + 6 \binom{k}{2} + 10 \binom{k}{3} + 5 \binom{k}{4}.$$

Cela nous permet d'écrire le polynôme d'ordre de  $N$  dans la base standard des polynômes  $\Omega_N(k) = \frac{5}{24}k^4 + \frac{5}{12}k^3 + \frac{7}{24}k^2 + \frac{1}{12}k$ . Une autre façon de déterminer ce polynôme pour  $P$  avec  $n$  éléments est de regarder les valeurs de la suite  $\omega_P = (\omega_P(1), \dots, \omega_P(n-1))$ . Dans notre cas nous avons  $\omega(N) = (1, 3, 1, 0)$  (voir la figure 4.8). Nous obtenons  $\Omega_N(k) = \binom{k+3}{4} + 3\binom{k+2}{4} + \binom{k+1}{4}$ .

Un poset  $P = (X, \leq)$  est appelé *zigzag* si  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  et pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , lorsque  $x_j$  couvre  $x_i$ , on a  $|j - i| = 1$ . Notons que le  $N$  est un zigzag. Voir la figure 4.11 pour un autre exemple. Un cas particulier d'une conjecture ouverte de De Loera et al [4] a été reformulée en termes de posets dans [6].

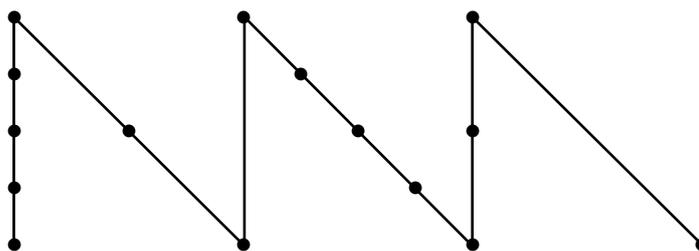


FIGURE 4.11 – Un poset zigzag.

**Problème 4.2.15.** Est-il vrai que si  $P$  est un zigzag à  $n$  éléments, alors les coefficients  $a_1, \dots, a_n$  de  $\Omega_P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  sont positifs ?

Le problème 4.2.13 est aussi ouvert pour les posets zigzags.

### 4.3 Polytopes

Ici, nous introduisons brièvement et superficiellement le sujet vaste et riche des polytopes. Nous recommandons le livre introductif standard [12] pour des explications plus détaillées.

Un ensemble  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  est *convexe* si pour tous  $a, b \in S$ , le segment  $\{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$  est aussi inclus dans  $S$ . L'*enveloppe convexe* d'un sous-ensemble fini  $V = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  est le plus petit ensemble convexe contenant  $V$ . Cet ensemble est unique parce que l'intersection de deux ensembles convexes est convexe. Voir la figure 4.12 pour une illustration de l'enveloppe convexe de deux points dans le plan.

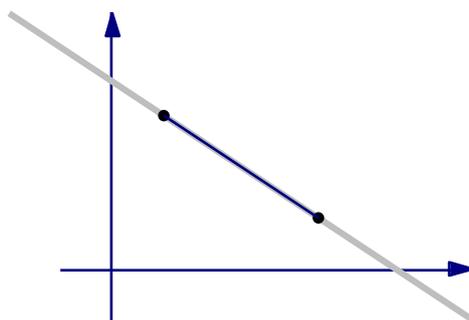


FIGURE 4.12 – Deux points dans  $\mathbb{R}^2$  et leur enveloppe convexe. Le segment gris indique que la dimension de ce polytope est 1.

Une *combinaison convexe* de  $V$  est une somme  $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$  telle que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i \geq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

**Exercice 4.3.1.** Soit  $V = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Montrer  $\text{conv}(V) = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$ . (Montrer avec la définition que l'en-

semble de droite est convexe. Inversement, supposer qu'une combinaison convexe n'est pas dans un ensemble  $S$  contenant  $V$  et montrer qu'alors  $S$  n'est pas convexe.)

Un polytope  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$  est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points  $V$ , appelés *sommets*. C'est-à-dire  $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ . Un polytope est appelé *entier* si  $V \subseteq \mathbb{Z}^n$  et  $\mathcal{P}$  est un *0/1-polytope* si  $V \subseteq \{0, 1\}^n$ . Voir la figure 4.13 pour des illustrations.

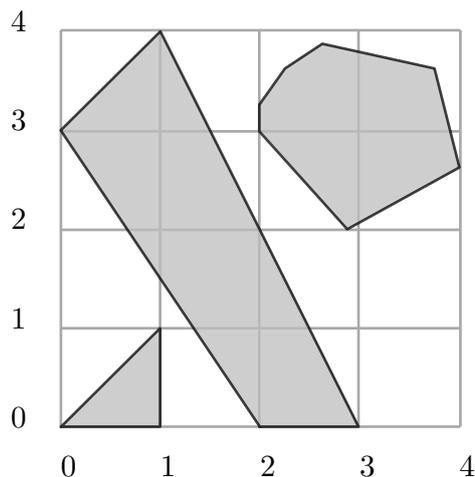


FIGURE 4.13 – Un 0/1-polytope, un polytope entier et un polytope qui n'est pas entier.

Le *théorème principal des polytopes* n'est pas simple à montrer et donne une autre façon de décrire un polytope :

**Théorème 4.3.2.** [12, Theorem 1.1] Un ensemble  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$  est un polytope si et seulement si  $\mathcal{P}$  est borné et peut être écrit comme  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  pour une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^m$ .

La description de  $\mathcal{P}$  donnée par le théorème 4.3.2 est appelée  *$\mathcal{H}$ -description*. La lettre  $\mathcal{H}$  provient du fait que chaque ligne  $a_i$  de  $A$  et l'entrée correspondante de  $b_i$  peuvent être vues comme un demi-espace (halfspace)  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a_i \rangle \leq b_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire standard, et  $\mathcal{P}$  est l'intersection de tous ces demi-espaces. D'un autre côté, la description par sommets de  $\mathcal{P}$  est appelé la  *$\mathcal{V}$ -description* de  $\mathcal{P}$ .

La *dimension*  $\dim(\mathcal{P})$  d'un polytope  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$  est la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par l'ensemble  $\mathcal{P} - x$  pour  $x \in \mathcal{P}$ . Elle est indépendante du choix de  $x$ .

Après ces définitions, commençons avec des polytopes en petite dimension pour comprendre un peu ces notions. Un seul point  $a \in \mathbb{R}^n$  est un polytope, mais de dimension 0. Dans  $\mathbb{R}$ , un polytope est un ensemble de points qui peut être écrit comme  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  pour  $a \leq b$  deux

éléments de  $\mathbb{R}$ , donc c'est simplement un *intervalle fermé* de dimension 0 s'il est réduit à un seul point et de dimension 1 sinon. Une autre façon de l'écrire est  $\{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1]\}$  – la  $\mathcal{V}$ -description.

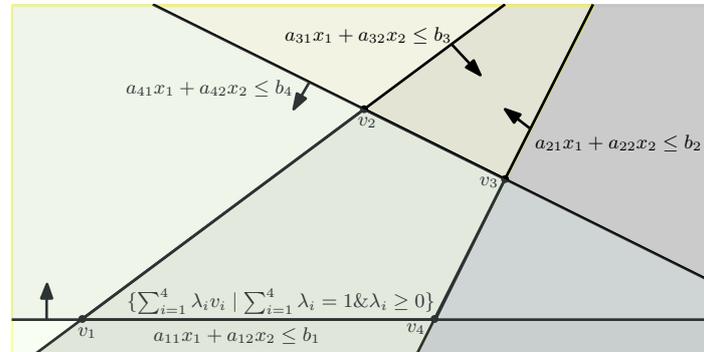


FIGURE 4.14 – Illustration des deux descriptions d'un polytope.

Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , les polytopes sont des points (dim = 0), des segments (dim = 1), ou des polygones simples et convexes (dim = 2). Voir la figure 4.14 pour un exemple qui montre la représentation d'un polytope comme enveloppe convexe ( $\mathcal{V}$ -description) et comme intersection de demi-plans ( $\mathcal{H}$ -description.). Sur la figure 4.15 nous montrons plusieurs sous-ensembles du plan qui ne sont pas des polytopes.

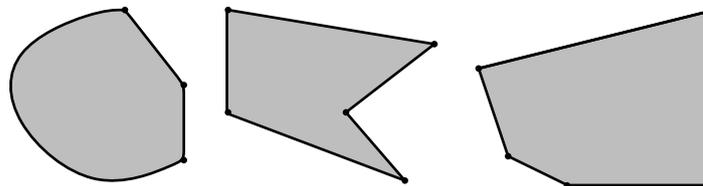


FIGURE 4.15 – Sous-ensembles du plan qui ne sont pas de polytopes : pas d'ensemble fini de sommets, pas convexe, pas borné.

L'*hypercube* est le polytope  $Q_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ix \leq 1 \text{ et } -Ix \leq 0\}$ , où  $I$  dénote la *matrice identité* possédant des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Voir la figure 4.16 pour des exemples.

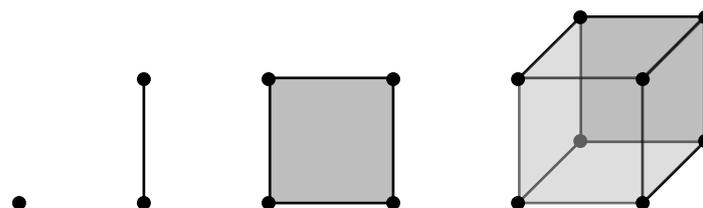


FIGURE 4.16 – Les hypercubes  $Q_0, Q_1, Q_2$  et  $Q_3$ .

**Exercice 4.3.3.** Montrer que la  $\mathcal{V}$ -description de  $Q_n$  est  $\text{conv}(\{v \mid v \in \{0, 1\}^n\})$ .

### 4.3.1 Le polytope d'ordre

Soit  $P = (X, \leq)$  un poset. Le polytope d'ordre  $\mathcal{O}_P$  est défini comme l'enveloppe convexe de  $\{\chi(I) \mid I \in \mathcal{I}(P)\}$ , où  $\chi$  est le vecteur caractéristique. Voir la figure 4.17 pour un exemple. Un autre exemple est donné par des hypercubes car  $Q_n = \mathcal{O}(A_n)$  est le polytope d'ordre de l'anti-chaîne.

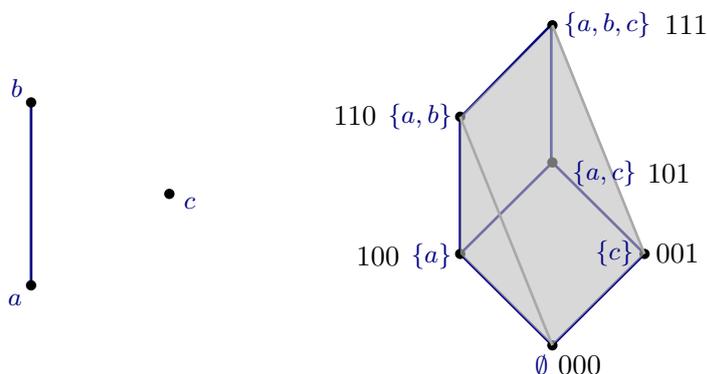


FIGURE 4.17 – Le polytope d'ordre d'un poset. Les sommets du polytope sont indexés avec l'idéal correspondant et son vecteur caractéristique.

**Proposition 4.3.4.** Nous avons  $\mathcal{O}_P = \{x \in [0, 1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ dans } P\}$ .

*Démonstration.* Pour montrer l'inclusion " $\subseteq$ ", observons simplement que les vecteurs caractéristiques sont dans  $[0, 1]^n$  et satisfont les inégalités, parce qu'ils sont des vecteurs caractéristiques des idéaux. Comme  $\{x \in [0, 1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ dans } P\}$  est convexe, leurs combinaisons convexes sont aussi dans  $\{x \in [0, 1]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ dans } P\}$ .

Pour " $\supseteq$ ", soit  $x \in [0, 1]^n$  tel que  $x_i \leq x_j$  si  $i \geq j$ . Soit  $i$  la plus petite coordonnée non nulle de  $x$  et soit  $p_i$  cette valeur. Soit  $I_i$  l'idéal  $\{j \in X \mid p_i \leq x_j\}$ . Définissons  $x' = x - p_i \chi(I_i)$  et recommençons. Cet algorithme nous donne une représentation  $x = p_{i_1} I_{i_1} + \dots + p_{i_k} I_{i_k}$  où  $p_{i_1} + \dots + p_{i_k}$  est la valeur de la plus grande coordonnée de  $x$ . Cette valeur est au plus 1. Nous ajoutons  $p_0 \cdot (0, \dots, 0)$  avec  $p_0 = 1 - (p_{i_1} + \dots + p_{i_k})$  pour que la somme des coefficients soit 1 et nous avons écrit  $x = p_0 I_0 + p_{i_1} I_{i_1} + \dots + p_{i_k} I_{i_k}$  comme combinaison convexe des vecteurs caractéristiques des idéaux de  $P$ . ■

### 4.3.2 Le polynôme d'Ehrhart

Nous allons associer une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  à chaque polytope entier. Après, nous verrons que cette fonction peut être étendue à un polynôme réel, exactement comme le polynôme d'ordre. Pour un polytope  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  et un entier  $k \in \mathbb{N}$ , nous définissons la fonction  $L_{\mathcal{P}}(k) := |k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n|$ , où  $k\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k}x \in \mathcal{P}\}$ . Autrement dit pour passer de  $\mathcal{P}$  à  $k\mathcal{P}$  on multiplie les coordonnées par  $k$ . Voir la figure 4.18 pour un exemple avec l'hypercube  $Q_2$ .

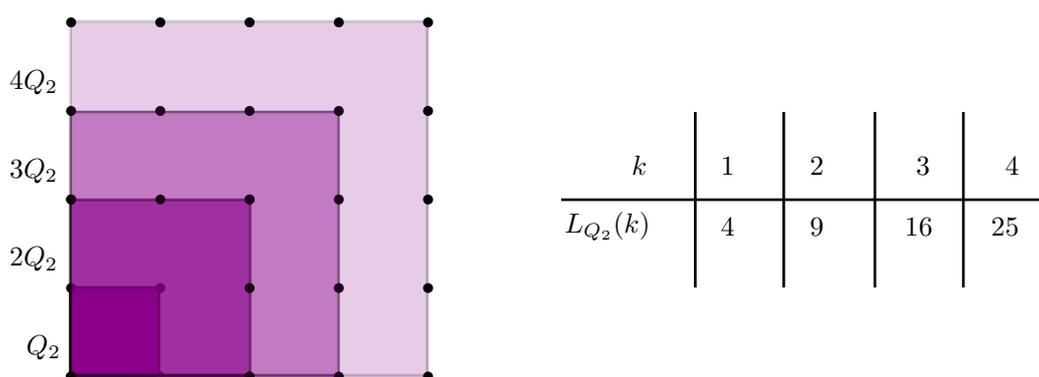


FIGURE 4.18 – Pour  $Q_2$  nous avons  $L_{Q_2}(k) = (k + 1)^2$ , qui clairement peut être étendue à un polynôme réel.

En généralisant l'exemple de  $Q_2$  on peut résoudre l'exercice suivant.

**Exercice 4.3.5.** Soit  $Q_n$  l'hypercube. Montrer que  $L_{Q_n}$  peut être étendue à un polynôme réel, tel que  $L_{Q_n}(t) = (t + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i$ .

Le Théorème d'Ehrhart<sup>3</sup> généralise ce résultat à tout polytope entier et le polynôme obtenu est appelé le *polynôme d'Ehrhart* :

**Théorème 4.3.6** (Ehrhart 1962 [5]). Pour tout polytope  $\mathcal{P}$  entier de dimension  $n$ , la fonction  $L_{\mathcal{P}}(t)$  est un polynôme de degré  $n$  à coefficients rationnels.

À tout polynôme  $p$  en général est associé la *série de Hilbert*  $H_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p(i)t^i$ . Si le degré de  $p$  est  $n$ , on peut écrire  $H_p(t) = \frac{h_0^* + h_1^*t + \dots + h_n^*t^n}{(1-t)^{n+1}}$  avec  $h_i^* \in \mathbb{R}$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ . On obtient alors la formule alternative suivante  $p(t) = \sum_{i=0}^n h_i^* \binom{t+n-i}{n}$ . Dans le cas du polynôme d'Ehrhart c'est Stanley qui a montré que les coefficients  $h^*$  sont positifs.

3. Eugène Ehrhart (1906 - 2000), mathématicien français, reçoit son BAC à l'âge de 22 ans. Professeur de mathématique en collèges et lycées, il fait de la recherche pendant son temps libre. Il publie ses premiers papiers à l'âge de 40 ans et termine sa thèse de doctorat à l'âge de 60 ans.

**Théorème 4.3.7** (Stanley 1991 [10]). Soit  $\mathcal{P}$  un polytope entier de dimension  $n$ . Ils existent  $h_0^*, \dots, h_n^* \geq 0$  tels que  $L_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=0}^n h_i^* \binom{t+n-i}{n}$ .

Les preuves des deux théorèmes 4.3.6 et 4.3.7 sont trop difficiles et longues pour le contexte de ce cours. Une référence approfondissant ce sujet est le livre [1]. Ici, on démontre ces résultats dans le cas particulier des polytopes d'ordre en prouvant le théorème suivant :

**Théorème 4.3.8** (Stanley 1986 [9]). Soit  $P$  un poset. Alors  $L_{\mathcal{O}_P}(t) = \Omega_P(t+1)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Si deux polynômes coïncident sur un nombre infini de points, alors ils sont égaux. Il suffit de montrer que  $L_{\mathcal{O}_P}(k) = \Omega_P(k+1)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Pour commencer, observons que  $L_{\mathcal{O}_P}(1) = |\mathcal{I}(P)|$  parce qu'un polytope avec des sommets dans  $\{0, 1\}^n$  n'a pas de point entier sauf ses sommets. Pour  $k = 1$ , l'égalité est donc vraie.

En général, nous avons  $k\mathcal{O}_P = \{x \in [0, k]^n \mid x_i \leq x_j \text{ si } i \geq j \text{ dans } P\}$  en utilisant la proposition 4.3.4. Il est facile de voir que chaque point entier dans ce polytope correspond à une fonction dans  $\{\varphi : X \rightarrow C_{k+1} \mid i \leq j \implies \varphi(i) \geq \varphi(j)\}$ . Cet ensemble correspond à  $\{\psi : X \rightarrow C_{k+1} \mid i \leq j \implies \psi(i) \leq \psi(j)\}$ , en définissant  $\psi(i) := k - \varphi(i)$ . Ce dernier ensemble contient simplement tous les homomorphismes de  $P$  à  $C_{k+1}$ . Nous avons montré  $L_{\mathcal{O}_P}(k) = \Omega_P(k+1)$ . ■

En combinant les théorèmes 4.2.14 et 4.3.8 nous obtenons les théorèmes 4.3.6 et 4.3.7 pour les polytopes d'ordres comme corollaire :

**Corollaire 4.3.9.** Soient  $P$  un poset à  $n$  éléments et  $\mathcal{O}_P$  le polytope d'ordre associé. La fonction  $L_{\mathcal{O}_P}(t)$  est un polynôme de degré  $n$  avec coefficients rationnels. De plus, il existe  $\omega_0, \dots, \omega_{n-1} \geq 0$  tels que  $L_{\mathcal{O}_P}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \binom{t+n-i}{n}$ .

## Bibliographie

- [1] M. BECK et S. ROBINS : *Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra*. Undergrad. Texts Math. Springer, New York, NY, 2007.
- [2] G. BIRKHOFF : Rings of sets. *Duke Math. J.*, 3(3):443–454, 1937.
- [3] B. A. DAVEY et H. A. PRIESTLEY : *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd éd., 2002.
- [4] J. A. DE LOERA, D. C. HAWS et M. KÖPPE : Ehrhart polynomials of matroid polytopes and polymatroids. *Discrete Comput. Geom.*, 42:670–702, 2009.

- [5] E. EHRHART : Sur les polyèdres rationnels homothétiques à  $n$  dimensions. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 254:616–618, 1962.
- [6] K. KNAUER, L. MARTÍNEZ-SANDOVAL et J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN : On lattice path matroid polytopes : Integer points and Ehrhart polynomial. *Discrete Comput. Geom.*, 60(3):698–719, 2018.
- [7] V. REINER et V. WELKER : On the Charney-Davis and Neggers-Stanley conjectures. *J. Combin. Theory Ser. A*, 109(2):247–280, 2005.
- [8] R. SIMION : A multiindexed Sturm sequence of polynomials and unimodality of certain combinatorial sequences. *J. Combin. Theory Ser. A*, 36:15–22, 1984.
- [9] R. P. STANLEY : Two poset polytopes. *Discrete Comput. Geom.*, 1:9–23, 1986.
- [10] R. P. STANLEY : On the Hilbert function of a graded Cohen-Macaulay domain. *J. Pure Appl. Algebra*, 73(3):307–314, 1991.
- [11] W. T. TROTTER : *Combinatorics and partially ordered sets : dimension theory*. Johns Hopkins Ser. Math. Sci. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1992.
- [12] G. M. ZIEGLER : *Lectures on polytopes.*, vol. 152 de *Grad. Texts Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.