Méthode des invariants de Tutte et mouvement brownien réfléchi dans les cônes

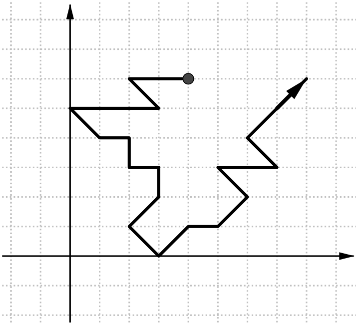
Étude de la distribution stationnaire

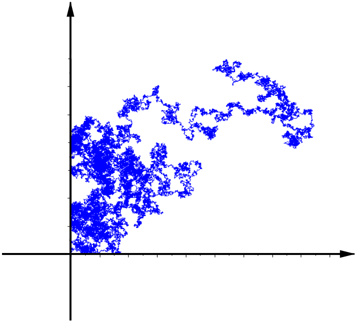
SANDRO FRANCESCHI

Issu d'un travail en collaboration avec
M. BOUSQUET-MÉLOU, A. ELVEY PRICE, C. HARDOUIN, K. RASCHEL

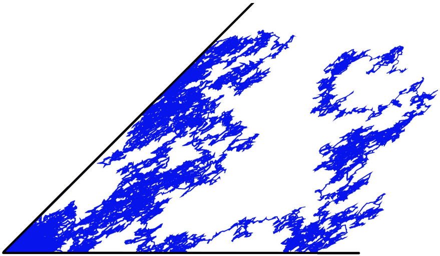
LPSM, Sorbonne Université

Marseille, CIRM, 21 mars 2019



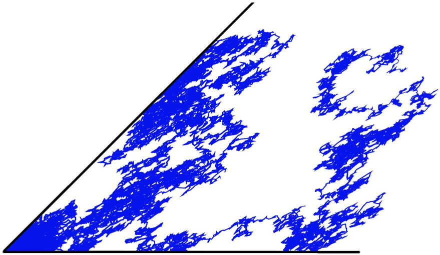


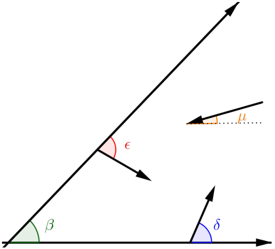
- **Cas discret** (marche aléatoire) très étudié, des formules exactes et remarquables existent, populaire en combinatoire.
- **Cas continu** (mouvement brownien) initialement utilisé pour approximer des réseaux de files d'attente.



• Dans le cadre continu une simple transformation linéaire permet de ramener la cas d'un cône au cas du quadrant.

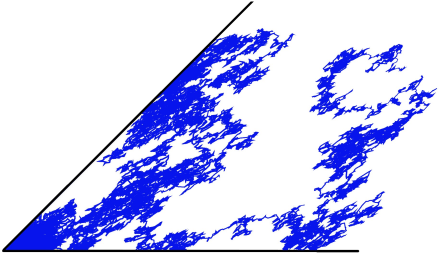
Introduction : un paramètre clé

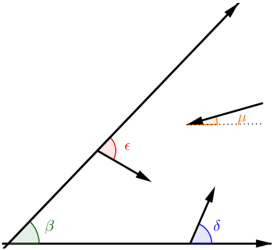




• On considère des réflexions obliques d'angle constant le long de chaque bord.

Introduction : un paramètre clé





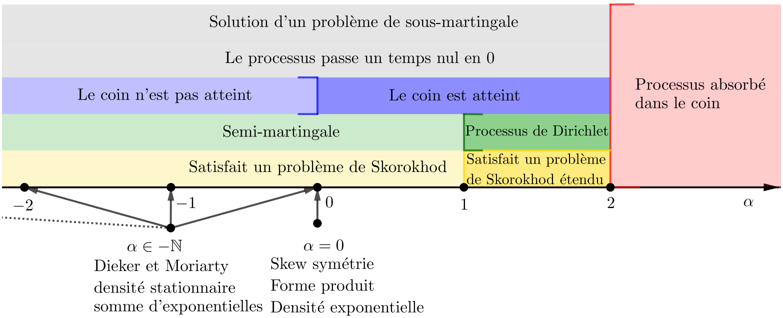
• On considère des réflexions obliques d'angle constant le long de chaque bord.

• Un paramètre clé pour le processus :

$$\boxed{\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}}$$

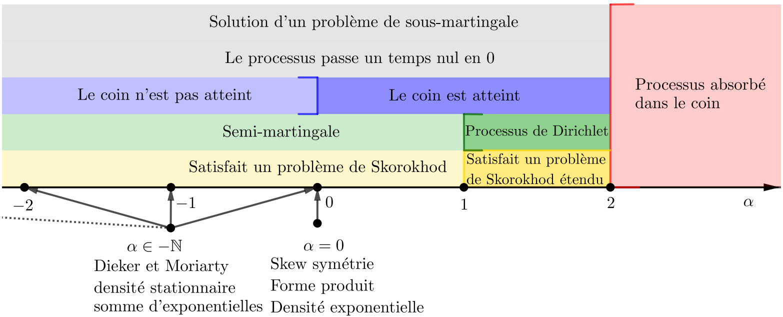
Introduction : un paramètre clé

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



Introduction : un paramètre clé

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



- **Résultat :** Si $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ alors la transformée de Laplace de la distribution stationnaire du processus est différentiellement algébrique et on détermine une formule explicite sans intégrale.

Méthodes :

- Étendre au cadre continu la méthode analytique développée pour les marches par Malyshev dans les années 70 ;
- Appliquer la méthode des invariants de Tutte développée pour dénombrer des triangulations coloriées dans les années 70-80 ;

Introduction

Méthodes :

- Étendre au cadre continu la méthode analytique développée pour les marches par Malyshev dans les années 70 ;
- Appliquer la méthode des invariants de Tutte développée pour dénombrer des triangulations coloriées dans les années 70-80 ;

Outils :

- Problèmes frontière de Riemann et Carleman ;
- Invariants conformes ;
- Fonctions de découplage ;

Méthodes :

- Étendre au cadre continu la méthode analytique développée pour les marches par Malyshev dans les années 70 ;
- Appliquer la méthode des invariants de Tutte développée pour dénombrer des triangulations coloriées dans les années 70-80 ;

Outils :

- Problèmes frontière de Riemann et Carleman ;
- Invariants conformes ;
- Fonctions de découplage ;

Objectifs :

- **Calculer explicitement** (et sans intégrale) la transformée de Laplace de la **distribution stationnaire** ;
- **Étudier la nature algébrique** de la transformée de Laplace.

Plan

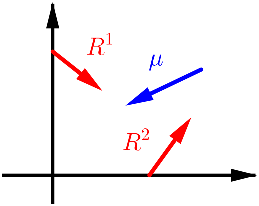
1. Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant
   - Critères d'existence et de récurrence
   - Distribution stationnaire
   - Équation fonctionnelle
2. Approche analytique et invariants de Tutte
   - Un exemple simple
   - Problème frontière
   - Invariants et fonctions de découplage
3. Résultats
   - Expression explicite
   - Nature algébrique
   - Quelques cas particuliers

Plan

1. Mouvement brownien réfléchi obliquement dans le quadrant
   - Critères d'existence et de récurrence
   - Distribution stationnaire
   - Équation fonctionnelle
2. Approche analytique et invariants de Tutte
   - Un exemple simple
   - Problème frontière
   - Invariants et fonctions de découplage
3. Résultats
   - Expression explicite
   - Nature algébrique
   - Quelques cas particuliers

Soient

$$\begin{cases} (W_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ un brownien plan de covariance } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \\ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ une dérive} \\ R = (R_1, R_2) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ une matrice de réflexion} \end{cases}$$



Définition

On définit le mouvement brownien avec dérive réfléchi dans $\mathbb{R}_+^2$ *par*

$$B_t = B_0 + W_t + \mu t + RL_t \ \in \mathbb{R}_+^2$$

où L_t^i *est un processus continu et croissant, qui s'accroît uniquement lorsque le processus touche un axe et où* $B_0 \in \mathbb{R}_+^2$.

$\hookrightarrow$ L_t est le **temps local** sur les axes $\hookrightarrow$ Problème de **Skorokhod**

Brownien avec dérive réfléchi obliquement dans $\mathbb{R}_+^2$

Définition

On définit le mouvement brownien avec dérive réfléchi dans $\mathbb{R}_+^2$ *par*

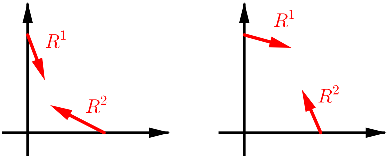
$$B_t = B_0 + W_t + \mu t + RL_t \quad \in \mathbb{R}_+^2$$

où L_t^i *est un processus continu et croissant, qui s'accroît uniquement lorsque le processus touche un axe et où* $B_0 \in \mathbb{R}_+^2$.

$\hookrightarrow$ L_t est le **temps local** sur les axes $\hookrightarrow$ Problème de **Skorokhod**

Théorème (Reiman, Taylor, Williams, 1988 et 1993)

Un tel processus **existe** ssi $r_{11} > 0$, $r_{22} > 0$ et $(r_{12}, r_{21} > 0$ ou $r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0)$.



Pas d'existence Existence

Définition

B_t *est* **récurrent positif** *si pour tout voisinage de zéro* $V \subset \mathbb{R}_+^2$ *on a* $\mathbb{E}[\tau_V] < \infty$ *où* $\tau_V = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in V\}$.

Proposition (D. Hobson et L. Rogers, 1993)

La distribution stationnaire du processus existe *et est unique ssi :*

$$r_{11} > 0, \quad r_{22} > 0, \quad r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0,$$

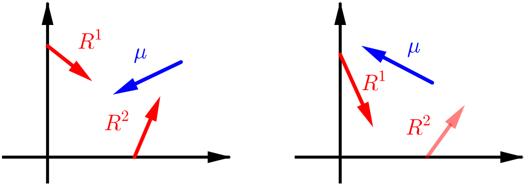
$$r_{22}\mu_1 - r_{12}\mu_2 < 0, \quad r_{11}\mu_2 - r_{21}\mu_1 < 0.$$

$\hookrightarrow$ **Compétition entre la dérive et les vecteurs de rebond**

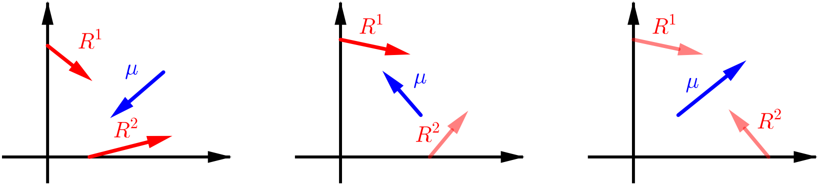
Critère de récurrence

$$r_{11} > 0,\ r_{22} > 0,\ r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0,\ r_{22}\mu_1 - r_{12}\mu_2 < 0,\ r_{11}\mu_2 - r_{21}\mu_1 < 0.$$

Cas récurrents



Cas tran-
sients



Distribution stationnaire et frontières

Soit π la distribution stationnaire (ou mesure invariante) sur $\mathbb{R}_+^2$.

- Les théorèmes ergodiques disent que la mesure invariante de $A \in \mathbb{R}_+^2$ est la proportion moyenne du temps passé en A :

$$\pi(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(B_u)\mathrm{d}u]$$

- Qu'en est-il sur les frontières ?

Distribution stationnaire et frontières

Soit π la distribution stationnaire (ou mesure invariante) sur $\mathbb{R}^2_+$.

- Les théorèmes ergodiques disent que la mesure invariante de $A \in \mathbb{R}^2_+$ est la proportion moyenne du temps passé en A :

$$\pi(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(B_u)\mathrm{d}u]$$

- Qu'en est-il sur les frontières ? On définit ν_1 une mesure sur le bord, pour $A \in \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$\nu_1(A) = \mathbb{E}_\pi[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(B_u)\mathrm{d}L^1_u].$$

De même on définit ν_2. Ce sont des *distributions stationnaires (mesures invariantes) sur les frontières*.

Transformées de Laplace de la distribution stationnaire

Cas discret : la fonction génératrice de la distribution stationnaire $\pi_{i,j}$ sur $\mathbb{Z}_+^2$ est la **série génératrice** $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} \pi_{i,j} x^i y^j$.

Transformées de Laplace de la distribution stationnaire

Cas discret : la fonction génératrice de la distribution stationnaire $\pi_{i,j}$ sur $\mathbb{Z}_+^2$ est la **série génératrice** $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} \pi_{i,j} x^i y^j$.

- **Cas continu :** la fonction génératrice est la **transformée de Laplace**,

$$\phi(x, y) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{xz_1 + yz_2} \pi(z_1, z_2) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2.$$

Transformées de Laplace de la distribution stationnaire

Cas discret : la fonction génératrice de la distribution stationnaire $\pi_{i,j}$ sur $\mathbb{Z}_+^2$ est la **série génératrice** $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} \pi_{i,j} x^i y^j$.

- **Cas continu :** la fonction génératrice est la **transformée de Laplace**,

$$\phi(x,y) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{xz_1+yz_2} \pi(z_1,z_2) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2.$$

- Sur les *frontières* on définit de manière analogue les fonctions génératrices :

$$\phi_2(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{xz_1} \nu_2(z_1) \mathrm{d}z_1,$$

$$\phi_1(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{yz_2} \nu_1(z_2) \mathrm{d}z_2.$$

Équation fonctionnelle

Cette équation relie les transformées de Laplace.

Théorème

$$\gamma(x,y)\phi(\theta) = \gamma_1(x,y)\phi_1(y) + \gamma_2(x,y)\phi_2(x)$$

où

$$\begin{cases} \gamma(x,y) = -\frac{1}{2}(\sigma_{11}x^2 + \sigma_{22}y^2 + 2\sigma_{12}xy) - (\mu_1 x + \mu_2 y), \\ \gamma_1(x,y) = \langle R^1 | \theta \rangle = r_{11}x + r_{21}y, \\ \gamma_2(x,y) = \langle R^2 | \theta \rangle = r_{12}x + r_{22}y. \end{cases}$$

Cette équation connecte ce qui se passe dans le quart de plan et sur ses frontières.

La fonction γ est appelée le noyau.

Preuve de l'équation fonctionnelle

Remarque : Les relations suivantes caractérisent la distribution stationnaire dans différents cas :

- $\pi(P - I) = 0$ pour les chaînes de Markov,
- $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu,
- $\int \mathcal{G} f d\pi = 0$ pour les processus de Markov où $\mathcal{G}$ est le générateur. ⚠domaine du générateur !

Preuve de l'équation fonctionnelle

Remarque : Les relations suivantes caractérisent la distribution stationnaire dans différents cas :

- $\pi(P - I) = 0$ pour les chaînes de Markov,
- $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu,
- $\int \mathcal{G} f d\pi = 0$ pour les processus de Markov où $\mathcal{G}$ est le générateur. ⚠domaine du générateur !

La relation analogue pour le mouvement brownien réfléchi dans le quadrant est la "**basic adjoint relationship**" :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^2) \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{G} f(z)\pi(\mathrm{d}z) + \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}_+^2} D_i f(z)\nu_i(\mathrm{d}z) = 0$$

Preuve de l'équation fonctionnelle

où le générateur "dans" le quadrant est

$$\mathcal{G}f(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

et pour $i = 1, 2$ les générateurs "sur les frontières" sont

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

Preuve de l'équation fonctionnelle

où le générateur "dans" le quadrant est

$$\mathcal{G}f(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

et pour $i = 1, 2$ les générateurs "sur les frontières" sont

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

$\hookrightarrow$ On doit juste prendre $f = e^{\langle (x,y)|.\rangle}$ dans la *basic adjoint relationship* pour obtenir l'équation fonctionnelle. En effet

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{G} e^{\langle (x,y)|z\rangle} \pi(\mathrm{d}z) + \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}_+^2} D_i e^{\langle (x,y)|z\rangle} \nu_i(\mathrm{d}z) = 0$$

donne

$$\gamma(x,y)\phi(x,y) = \gamma_1(x,y)\phi_1(y) + \gamma_2(x,y)\phi_2(x).$$

Plan

Qu'est-ce qu'un problème frontière avec *shift* ?

Un problème frontière avec *shift* (*a boundary value problem with shift, BVP*) est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un certain ensemble
- une **condition frontière** avec *shift*

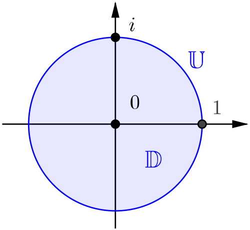
Qu'est-ce qu'un problème frontière avec *shift* ?

Un problème frontière avec *shift* (*a boundary value problem with shift, BVP*) est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un certain ensemble
- une **condition frontière** avec *shift*

Exemple :

1. I est méromorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ et a un seul pôle, d'ordre un en 0
2. $I(\bar{x}) = I(x)$ pour $x \in \mathbb{U}$ le cercle unité



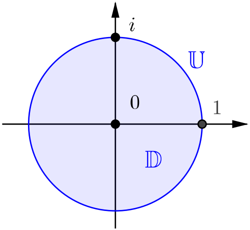
Qu'est-ce qu'un problème frontière avec *shift* ?

Un problème frontière avec *shift* (*a boundary value problem with shift, BVP*) est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un certain ensemble
- une **condition frontière** avec *shift*

Exemple :

1. I est méromorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ et a un seul pôle, d'ordre un en 0
2. $I(\bar{x}) = I(x)$ pour $x \in \mathbb{U}$ le cercle unité



La solution (aux constantes près) est $\boxed{I(x) = x + \frac{1}{x}}$.

I est une **fonction de collage conforme** qui réunit les parties supérieure et inférieure de $\mathbb{U}$.

I est un **invariant pour la conjugaison** sur le bord $\mathbb{U}$.

Méthode des invariants de Tutte

Exemple

Les fractions rationnelles J telles que $J(x) = J(\frac{1}{x})$ sont de la forme $J(x) = E(x + \frac{1}{x})$ pour E une fraction rationnelle.

Méthode des invariants de Tutte

Exemple

Les fractions rationnelles J telles que $J(x) = J(\frac{1}{x})$ sont de la forme $J(x) = E(x + \frac{1}{x})$ pour E une fraction rationnelle.

Preuve algébrique.

$$y^2 - y(x + 1/x) + 1 = 0$$

$$Y_0(x) = x \text{ et } Y_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$J(x) = \boxed{J(Y_0) = J(Y_1)} = \frac{1}{2}(J(Y_0) + J(Y_1))$$

Fraction rationnelle symétrique des racines.
$\hookrightarrow$ J est une fraction rationnelle des coefficients et donc de $I(x) = (x + \frac{1}{x})$. □

- $J(x)$ est l'**invariant inconnu**
- $I(x) = (x + \frac{1}{x})$ est l'**invariant canonique** ou la fonction de collage conforme
- $J(x)$ est une **fraction rationnelle** en $I(x)$

Méthode des invariants de Tutte

Exemple

Les fractions rationnelles J telles que $J(x) = J(\frac{1}{x})$ sont de la forme $J(x) = E(x + \frac{1}{x})$ pour E une fraction rationnelle.

Preuve analytique.

$$\begin{array}{ccccc} I & : & \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus [-2,2] \\ & & x & \mapsto & (x + 1/x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{application} \\ \text{conforme.} \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{U}$ $I(x) = I(\overline{x}) \in [-2,2]$ et $J(x) = J(\overline{x})$.
$J \circ I^{-1}$ bien définie et continue en $[-2,2]$.
$J \circ I^{-1}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$, a un nombre fini de pôles et une croissance bornée à l'infini.
$\hookrightarrow$ $J \circ I^{-1}$ est donc une fraction rationnelle. $\square$

- $J(x)$ est l'**invariant inconnu**

- $I(x) = (x + \frac{1}{x})$ est l'**invariant canonique** ou la fonction de collage conforme

- $J(x)$ est une **fraction rationnelle** en $I(x)$

Étapes clés

Méthode analytique des invariants de Tutte

- Trouver une **équation fonctionnelle** ;
- Étudier le **noyau** et les différentes branches $X^{\pm}$ et $Y^{\pm}$;
- Établir un **problème frontière** ;
- Déterminer deux invariants :
  - un **invariant canonique** tel que $I(Y^+) = I(Y^-)$,
  - un **invariant dépendant des fonctions inconnues** J ;
- Trouver des **fonctions de découplage** pour déterminer J ;
- Utiliser un **lemme des invariants** pour exprimer J comme une fraction rationnelle en I.

Résultats

- Formules explicites
- Nature algébrique

Noyau

- Le **noyau** γ peut s'écrire $\gamma(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$. Les deux branches sont données par

$$Y^{\pm}(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{d(x)}}{2a(x)},$$

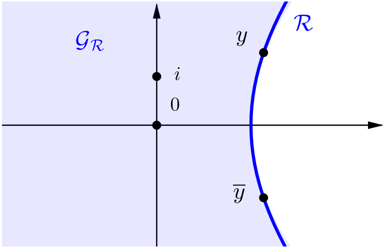
où $d(x) = b^2(x) - 4a(x)c(x)$ est le discriminant. On a

$$\gamma(x, Y^{\pm}(x)) = 0.$$

- Le polynôme d a deux racines, notées $x^{\pm}$ qui sont les points de branchement de Y.
- On remarque que d est négatif sur $(-\infty, x^-) \cup (x^+, \infty)$. Les branches $Y^{\pm}$ prennent des valeurs complexes conjuguées sur cet ensemble.

Frontière du BVP

$$\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{C} : \gamma(x,y) = 0 \text{ pour un } x \in (-\infty, x^-)\} = Y^{\pm}((-\infty, x^-)).$$



- la courbe $\mathcal{R}$ est une **hyperbole** symétrique par rapport à l'axe des abscisses (et $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ est le domaine bleu)
- si $y \in \mathcal{R}$ et $\gamma(x,y) = 0$ alors $\gamma(x,\bar{y}) = 0$

Énoncé du problème frontière

Lemme (F. 2017)

La fonction ϕ_1 satisfait le problème frontière suivant :

1. ϕ_1 *est méromorphe sur* $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ *avec au plus un pôle* p *d'ordre* 1, *et est bornée à l'infini ;*
2. ϕ_1 *est continue sur* $\overline{\mathcal{G}_{\mathcal{R}}} \setminus \{p\}$ *et*

$$\boxed{\phi_1(\overline{y}) = G(y)\phi_1(y), \qquad \forall y \in \mathcal{R}.}$$

Énoncé du problème frontière

Lemme (F. 2017)

La fonction ϕ_1 satisfait le problème frontière suivant :

1. ϕ_1 *est méromorphe sur* $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ *avec au plus un pôle* p *d'ordre* 1, *et est bornée à l'infini ;*
2. ϕ_1 *est continue sur* $\overline{\mathcal{G}_{\mathcal{R}}} \setminus \{p\}$ *et*

$$\boxed{\phi_1(\overline{y}) = G(y)\phi_1(y), \qquad \forall y \in \mathcal{R}.}$$

où on a défini pour $y \in \mathcal{R}$

$$G(y) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(X^-(y), y)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(X^-(y), \overline{y}),$$

et où X^- est la fonction algébrique définie par $\gamma(X^-(y), y) = 0$.

Preuve de la condition frontière

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, Y^+(x))$ et en $(x, Y^-(x))$ pour annuler le noyau. On obtient

$$0 = \gamma_1(x, Y^+(x))\phi_1(Y^+(x)) + \gamma_2(x, Y^+(x))\phi_2(x)$$

$$0 = \gamma_1(x, Y^-(x))\phi_1(Y^-(x)) + \gamma_2(x, Y^-(x))\phi_2(x)$$

Preuve de la condition frontière

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, Y^+(x))$ et en $(x, Y^-(x))$ pour annuler le noyau. On obtient

$$0 = \gamma_1(x, Y^+(x))\phi_1(Y^+(x)) + \gamma_2(x, Y^+(x))\phi_2(x)$$

$$0 = \gamma_1(x, Y^-(x))\phi_1(Y^-(x)) + \gamma_2(x, Y^-(x))\phi_2(x)$$

On élimine $\phi_2(x)$ et on déduit que

$$\Rightarrow \quad \phi_1(Y^+(x))) = \underbrace{\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^-(x))}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^+(x))}}_{G} \phi_1(Y^-(x))).$$

Preuve de la condition frontière

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, Y^+(x))$ et en $(x, Y^-(x))$ pour annuler le noyau. On obtient

$$0 = \gamma_1(x, Y^+(x))\phi_1(Y^+(x)) + \gamma_2(x, Y^+(x))\phi_2(x)$$

$$0 = \gamma_1(x, Y^-(x))\phi_1(Y^-(x)) + \gamma_2(x, Y^-(x))\phi_2(x)$$

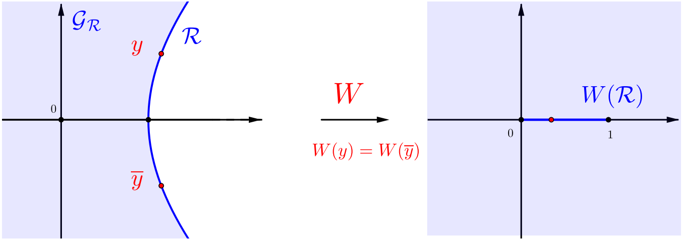
On élimine $\phi_2(x)$ et on déduit que

$$\Rightarrow \quad \phi_1(Y^+(x))) = \underbrace{\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^-(x))}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^+(x))}}_{G} \phi_1(Y^-(x))).$$

En prenant $x \in (-\infty, x^-)$ et $y = Y^-(x)$ on obtient

$$\phi_1(\overline{y}) = G(y)\phi_1(y), \ \forall y \in \mathcal{R}.$$

- L'invariant canonique est la fonction de collage conforme w qui réunit les parties supérieure et inférieure de l'hyperbole $\mathcal{R}$



$$w(y) = T_{\frac{\pi}{\beta}}\left(-\frac{2y-(y^{+}+y^{-})}{y^{+}-y^{-}}\right),$$

où β est l'angle du cône et où $T_{\frac{\pi}{\beta}}$ est le **polynôme de Tchebychev généralisé** :

$$T_{\frac{\pi}{\beta}}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{\beta}\arccos(x)\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\beta}}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\beta}}\right\}$$

Découplage (version analytique)

Condition frontière $\forall y \in \mathcal{R}$:

$$\phi_1(\overline{y}) = G(y)\phi_1(y).$$

Définition (analytique)

Une **fonction de découplage** F *est une fraction rationnelle telle que* $\forall y \in \mathcal{R}$,

$$G(y) = \frac{F(y)}{F(\overline{y})}.$$

Découplage (version analytique)

Condition frontière $\forall y \in \mathcal{R}$:

$$\phi_1(\overline{y}) = G(y)\phi_1(y).$$

Définition (analytique)

Une **fonction de découplage** F *est une fraction rationnelle telle que* $\forall y \in \mathcal{R}$,

$$G(y) = \frac{F(y)}{F(\overline{y})}.$$

On peut alors reformuler la condition frontière $\forall y \in \mathcal{R}$:

$$(F \cdot \phi_1)(\overline{y}) = (F \cdot \phi_1)(y).$$

- Donc $F \cdot \phi_1$ est un invariant (inconnu).

Découplage (version algébrique)

La condition frontière provient de l'équation

$$\phi_1(Y^+(x))) = \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^-(x))}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^+(x))}\phi_1(Y^-(x))).$$

La définition suivante est équivalente à la définition "analytique".

Définition (algébrique)

Une **fonction de découplage** F *est une fraction rationnelle telle que*

$$\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^-(x))}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^+(x))} = \frac{F(Y^-(x))}{F(Y^+(x))}.$$

Découplage (version algébrique)

La condition frontière provient de l'équation

$$\phi_1(Y^+(x))) = \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^-(x))}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^+(x))}\phi_1(Y^-(x))).$$

La définition suivante est équivalente à la définition "analytique".

Définition (algébrique)

Une **fonction de découplage** *F est une fraction rationnelle telle que*

$$\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^-(x))}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(x, Y^+(x))} = \frac{F(Y^-(x))}{F(Y^+(x))}.$$

On a alors

$$(F \cdot \phi_1)(Y^+(x)) = (F \cdot \phi_1)(Y^-(x)).$$

- On retrouve que $F \cdot \phi_1$ est un invariant (inconnu).

Lemme des invariants

En résumé :

- la fonction de collage conforme w est un invariant canonique,
- si F est une fonction de découplage alors $F \cdot \phi_1$ est un invariant inconnu.

En fait il existe **"peu d'invariants"**.

Lemme des invariants

En résumé :

- la fonction de collage conforme w est un invariant canonique,
- si F est une fonction de découplage alors $F \cdot \phi_1$ est un invariant inconnu.

En fait il existe **“peu d’invariants”**.

Lemme des invariants

L’invariant $F \cdot \phi_1$ s’exprime en fonction de w et il existe une fraction rationnelle E telle que

$$(F \cdot \phi_1)(y) = E(w(y)).$$

$\hookrightarrow$ L’étude des pôles et des zéros de $F \cdot \phi_1$ permet de déterminer E.

Plan

Expression explicite

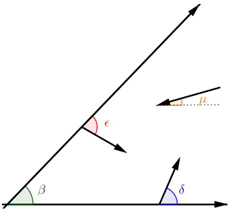
Théorème (Bousquet-Mélou, Price, F., Hardouin, Raschel, 2019)

Une fonction de découplage **existe** *ssi*

$$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}.$$

On peut la déterminer explicitement en fonction des paramètres.

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



Expression explicite

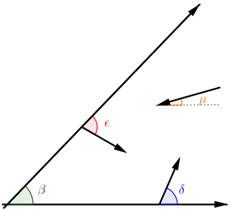
Théorème (Bousquet-Mélou, Price, F., Hardouin, Raschel, 2019)

Une fonction de découplage **existe** *ssi*

$$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}.$$

On peut la déterminer explicitement en fonction des paramètres.

$$\alpha = \frac{\epsilon + \delta - \pi}{\beta}$$



Théorème (Bousquet-Mélou, Price, F., Hardouin, Raschel, 2019)

Si $\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$*, alors il existe un fraction rationnelle* $A \in \mathbb{C}(X, Y)$ *(qui peut être explicitée) telle que la transformée de Laplace* ϕ_1 *vaut*

$$\phi_1(y) = A(y, w(y)),$$

où w *est la fonction de collage conforme.*

Nature algébrique

La nature algébrique de ϕ_1 dépend donc fortement de celle de w.

Théorème (Bousquet-Mélou, Price, F., Hardouin, Raschel, 2019)

Nature de ϕ_1	*Condition nécessaire et suffisante*
Differentiellement algébrique	$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ *ou* $\beta/\pi \in \mathbb{Q}$
Algébrique	$(\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ *et* $\frac{\beta}{\pi} \in \mathbb{Q})$ *ou* $\alpha \in -\mathbb{N}$
Rationnelle	$\alpha \in -\mathbb{N}$

Nature algébrique

La nature algébrique de ϕ_1 dépend donc fortement de celle de w.

Théorème (Bousquet-Mélou, Price, F., Hardouin, Raschel, 2019)

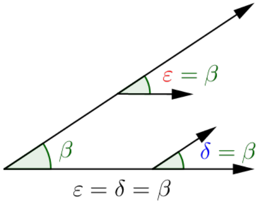
Nature de ϕ_1	*Condition nécessaire et suffisante*
Differentiellement algébrique	$\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ *ou* $\beta/\pi \in \mathbb{Q}$
Algébrique	$(\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ *et* $\frac{\beta}{\pi} \in \mathbb{Q})$ *ou* $\alpha \in -\mathbb{N}$
Rationnelle	$\alpha \in -\mathbb{N}$

La méthode des invariants de Tutte a permis de montrer la condition suffisante. Pour montrer la condition nécessaire on fait appel à la théorie des équations aux q-différences.

Cas de la réflexion orthogonale

Dans le cas de la **réflexion orthogonale** $\alpha = 2 - \frac{\pi}{\beta}$ et G se découple donc et vaut

$$G(y) = \frac{\overline{y}}{y}.$$



On obtient :

Théorème (F. 2016)

Dans le cas orthogonal la transformée de Laplace ϕ_1 vaut

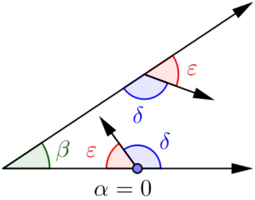
$$\phi_1(y) = \frac{-\mu_1 w'(0)}{w(y) - w(0)} y,$$

où w est la fonction de collage conforme.

Cas de la *skew* symétrie

La **skew symétrie** est le cas où $\alpha = 0$ (les rebonds sont symétriques par rapport à la normale). Pour un certain $a \in \mathbb{R}$ on peut découpler G sous la forme

$$G(y) = \frac{a - y}{a - \overline{y}}.$$



Théorème (*Skew* symétrie)

Dans le cas de la skew symétrie la transformée de Laplace ϕ_1 vaut

$$\phi_1(y) = \frac{C}{a - y},$$

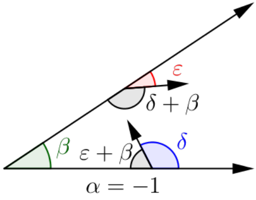
pour une constante C dépendant des paramètres. La distribution stationnaire a une **forme produit** *sur $\mathbb{R}^2$ et est* **exponentielle***.*

On retrouve un résultat classique.

Le cas de **Dieker-Moriarty** est lorsque $\alpha \in -\mathbb{N}$. On peut découpler G sous la forme

$$G(y) = \frac{P(y)}{P(\overline{y})}$$

pour un certain polynôme P.



Théorème (Dieker-Moriarty)

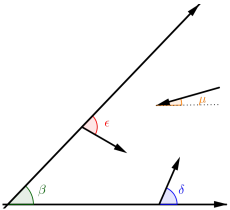
Dans le cas de **Dieker-Moriarty** *la transformée de Laplace* ϕ_1 *vaut*

$$\phi_1(y) = \frac{C}{P(y)},$$

pour une constante C dépendant des paramètres. La distribution stationnaire est alors une **somme d'exponentielles**.

Cas général

- Dans le **cas général** il est aussi possible de résoudre le problème frontière (sans fonction de découplage) et de trouver ϕ_1 en terme d'intégrale de Cauchy et de la fonction de collage :



Théorème (F. 2017)

$$\phi_1(y) = \nu_1(\mathbb{R}_+) \left(\frac{w(0) - w(p)}{w(y) - w(p)} \right)^{-\chi}$$
$$\exp \left\{ \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}^-} \log G(t) \left[\frac{w'(t)}{w(t) - w(y)} - \frac{w'(t)}{w(t) - w(0)} \right] \mathrm{d}t \right\}$$

Merci pour votre attention !

M. BOUSQUET-MELOU, A. ELVEY PRICE, S. FRANCESCHI, C. HARDOUIN AND K. RASCHEL - "Algebraic nature of the SRBM Laplace transform", *prépublication*, (2019+).

A. DIEKER AND J. MORIARTY - "Reflected Brownian motion in a wedge : sum-of-exponential stationary densities.", *Electron. Commun. Probab.*, 14 :1–16, (2009).

G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI AND V. MALYSHEV - *Random walks in the quarter-plane,* Application of Mathematics (New York), vol. 40, Springer, (1999).

S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - "Tutte's invariant approach for Brownian motion reflected in the quadrant", *ESAIM Probab. Stat.*, (2017).

S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - "Integral expression for the stationary distribution of reflected Brownian motion in a wedge", *Bernoulli*, (2019).

W. TUTTE - "Chromatic sums revisited.", *Aequationes Math.*, 50(1-2) :95–134 (1995).

R. J. WILLIAMS - "Semimartingale reflecting Brownian motions in the orthant.", *Stochastic Networks,* **13** (1995).