Automates cellulaires et perturbations aléatoires

Irène Marcovici

Institut Élie Cartan de Lorraine,
Université de Lorraine, Nancy

Journées ALEA, Lundi 12 mars 2018, CIRM

Plan de l'exposé

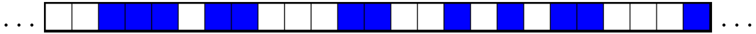
1. Introduction aux automates cellulaires
2. Automates cellulaires bruités
3. Correction d'erreurs dans une configuration

Plan de l'exposé

1. **Introduction aux automates cellulaires**
2. Automates cellulaires bruités
3. Correction d'erreurs dans une configuration

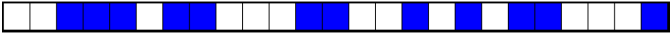
Configurations

- Configurations **de dimension 1** :
  Ruban **infini** divisé en **cellules** régulières, qu'on colorie chacune d'une couleur, parmi une palette finie de couleurs

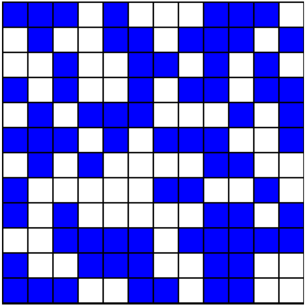


Configurations

- Configurations **de dimension 1** :
  Ruban **infini** divisé en **cellules** régulières, qu'on colorie chacune d'une couleur, parmi une palette finie de couleurs

. . .  . . .

- Configurations **de dimension 2** :

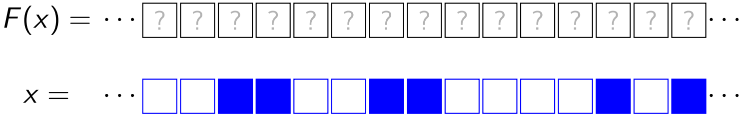


- On part d'une **configuration**
- Simultanément, chaque cellule décide de changer de couleur, en observant les couleurs de ses voisines et en choisissant une nouvelle couleur en fonction de cette observation

Si toutes les cellules appliquent la même règle de changement de couleur, cette étape de mise-à-jour est précisément ce qu'on appelle un **automate cellulaire**.

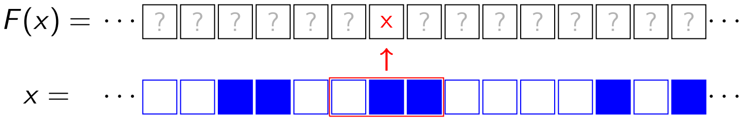
L'automate cellulaire de la majorité

Chaque cellule regarde sa propre couleur, la couleur de sa voisine de gauche, la couleur de sa voisine de droite, et choisit comme nouvelle couleur la couleur **majoritaire** parmi ces trois couleurs.



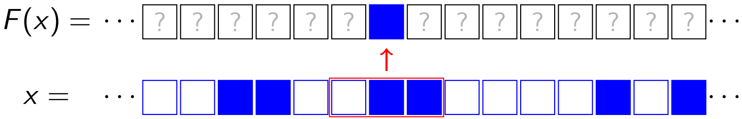
L'automate cellulaire de la majorité

Chaque cellule regarde sa propre couleur, la couleur de sa voisine de gauche, la couleur de sa voisine de droite, et choisit comme nouvelle couleur la couleur **majoritaire** parmi ces trois couleurs.



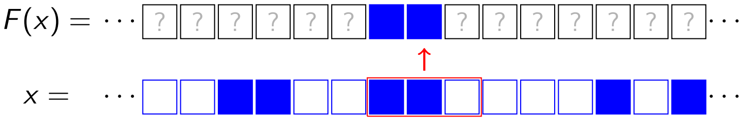
L'automate cellulaire de la majorité

Chaque cellule regarde sa propre couleur, la couleur de sa voisine de gauche, la couleur de sa voisine de droite, et choisit comme nouvelle couleur la couleur **majoritaire** parmi ces trois couleurs.



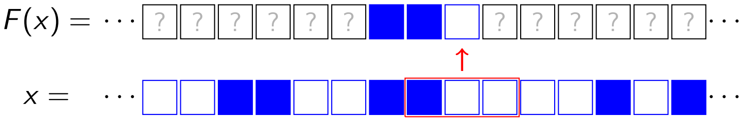
L'automate cellulaire de la majorité

Chaque cellule regarde sa propre couleur, la couleur de sa voisine de gauche, la couleur de sa voisine de droite, et choisit comme nouvelle couleur la couleur **majoritaire** parmi ces trois couleurs.



L'automate cellulaire de la majorité

Chaque cellule regarde sa propre couleur, la couleur de sa voisine de gauche, la couleur de sa voisine de droite, et choisit comme nouvelle couleur la couleur **majoritaire** parmi ces trois couleurs.



L'automate cellulaire de la parité (XOR)

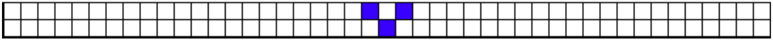
Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.

L'automate cellulaire de la parité (XOR)

Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.

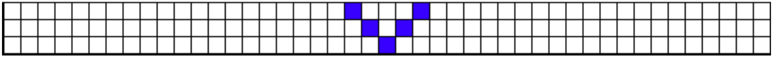
L'automate cellulaire de la parité (XOR)

Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.



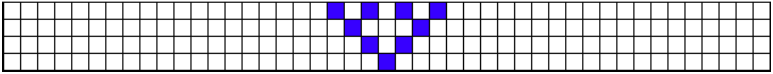
L'automate cellulaire de la parité (XOR)

Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.



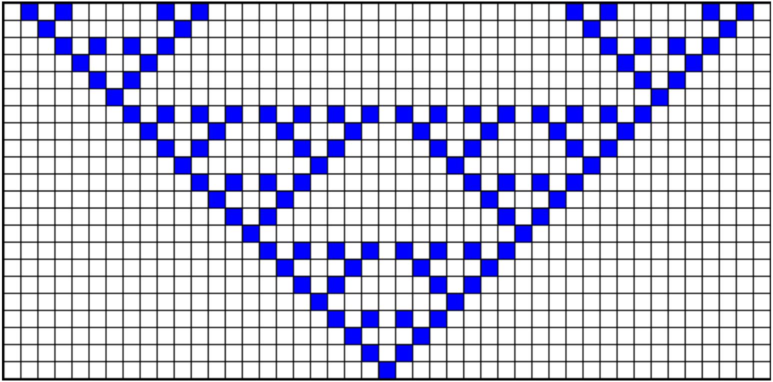
L'automate cellulaire de la parité (XOR)

Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.



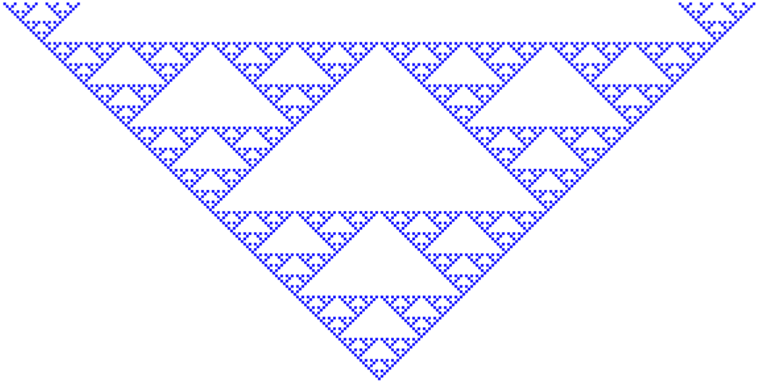
L'automate cellulaire de la parité (XOR)

Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.



L'automate cellulaire de la parité (XOR)

Une cellule est coloriée en bleu si au temps précédent, il y a exactement une cellule bleue à sa gauche ou à sa droite.



Applications

Modélisation de **systèmes complexes**, constitués d'un grand nombre d'entités qui évoluent au cours du temps, et dont le comportement ne dépend que de ce qu'elles peuvent observer dans un rayon fini autour d'elles.

Modélisation de **systèmes complexes**, constitués d'un grand nombre d'entités qui évoluent au cours du temps, et dont le comportement ne dépend que de ce qu'elles peuvent observer dans un rayon fini autour d'elles.

Exemples :

- Tissus cellulaires
- Réseaux informatiques
- Trafic routier
- Formation d'essaims d'oiseaux

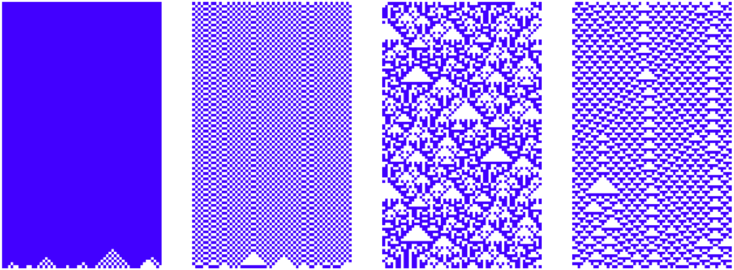
Complexité

Automates cellulaires : **définition très simple** mais **grande complexité des évolutions** qu'ils engendrent !

Automates cellulaires : **définition très simple** mais **grande complexité des évolutions** qu'ils engendrent !

Classification de Wolfram (1981)

classe I — classe II — classe III — classe IV



250_{w} homogène — 50_{w} périodique — 90_{w} chaotique — 54_{w} complexe

Image : N. Fatès

Définition mathématique

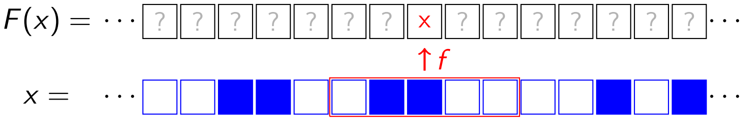
Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de symboles, appelé l'**alphabet**.

On note $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des configurations possibles avec les symboles de l'alphabet $\mathcal{A}$.
Un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, avec $x_k \in \mathcal{A}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Définition

Une application $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un **automate cellulaire** s'il existe un **rayon** $r \geq 0$ et une **fonction locale** $f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{A}$ telle que :

$$F(x)_k = f(x_{k-r}, \dots, x_{k+r-1}, x_{k+r}).$$



$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\}$, $r = 2$

Définition mathématique

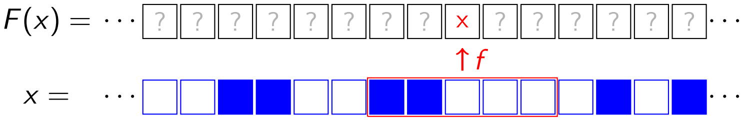
Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de symboles, appelé l'**alphabet**.

On note $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des configurations possibles avec les symboles de l'alphabet $\mathcal{A}$.
Un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, avec $x_k \in \mathcal{A}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Définition

Une application $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un **automate cellulaire** s'il existe un **rayon** $r \geq 0$ et une **fonction locale** $f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{A}$ telle que :

$$F(x)_k = f(x_{k-r}, \ldots, x_{k+r-1}, x_{k+r}).$$



$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\}$, $r = 2$

Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

Théorème [Curtis-Hedlund-Lyndon 1969]

$F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si F est une fonction **continue** qui commute avec le **décalage** σ.

Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

Théorème [Curtis-Hedlund-Lyndon 1969]

$F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si F est une fonction **continue** qui commute avec le **décalage** σ.

Décalage : $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini par $\forall k \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_k = x_{k-1}$.

Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

Théorème [Curtis-Hedlund-Lyndon 1969]

$F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si F est une fonction **continue** qui commute avec le **décalage** σ.

Décalage : $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini par $\forall k \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_k = x_{k-1}$.

Distance sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$: $d(x,y) = 2^{-\min\{|k|\,;\, x_k \neq y_k\}}$.

Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

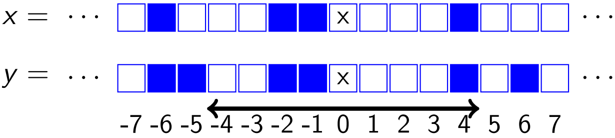
Théorème [Curtis-Hedlund-Lyndon 1969]

$F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si F est une fonction **continue** qui commute avec le **décalage** σ.

Décalage : $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini par $\forall k \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_k = x_{k-1}$.

Distance sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$: $d(x,y) = 2^{-\min\{|k|\,;\, x_k \neq y_k\}}$.

Exemple :
$d(x,y) = 2^{-5}$.



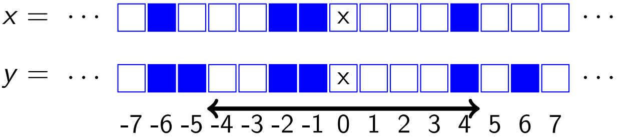
Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

Théorème [Curtis-Hedlund-Lyndon 1969]

$F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si F est une fonction **continue** qui commute avec le **décalage** σ.

Décalage : $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini par $\forall k \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_k = x_{k-1}$.

Distance sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$: $d(x,y) = 2^{-\min\{|k|\,;\, x_k \neq y_k\}}$.



Exemple :
$d(x,y) = 2^{-5}$.

Continuité d'un AC : $d(x,y) < 2^{-n-r} \implies d(F(x), F(y)) < 2^{-n}$.

Plan de l'exposé

1. Introduction aux automates cellulaires
2. Automates cellulaires bruités
3. Correction d'erreurs dans une configuration

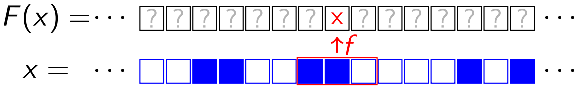
Plan de l'exposé

1. Introduction aux automates cellulaires
2. **Automates cellulaires bruités**
3. Correction d'erreurs dans une configuration

Automates cellulaires probabilistes

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de $\mathcal{A}^{2r+1}$, la probabilité de chaque symbole.

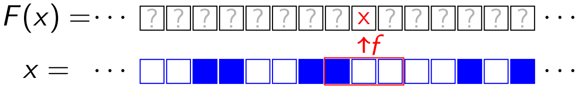
$$f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$$



Automates cellulaires probabilistes

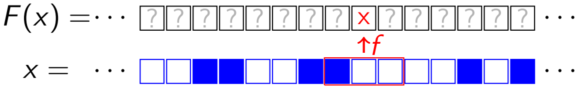
Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de $\mathcal{A}^{2r+1}$, la probabilité de chaque symbole.

$$f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$$



Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de $\mathcal{A}^{2r+1}$, la probabilité de chaque symbole.

$$f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{M}(\mathcal{A}) \qquad F : \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$$



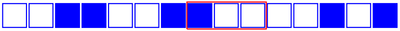
Automates cellulaires probabilistes

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de $\mathcal{A}^{2r+1}$, la probabilité de chaque symbole.

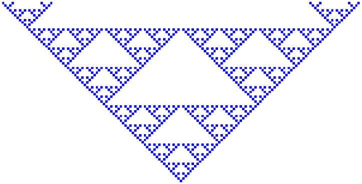
$f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ $\quad F : \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$

$F(x) = \cdots$? ? ? ? ? ? ? ? x ? ? ? ? ? ? ? $\cdots$

$\uparrow f$

$x = \cdots$  $\cdots$

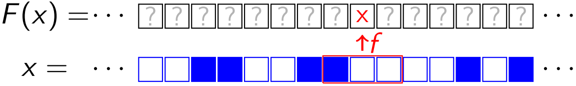
Exemple : AC de la parité avec une probabilité ε d'erreur.



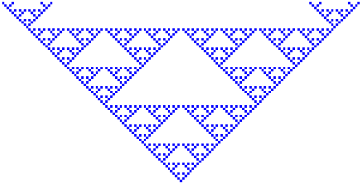
$\varepsilon = 0$ $\qquad \varepsilon = 0.01$

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de $\mathcal{A}^{2r+1}$, la probabilité de chaque symbole.

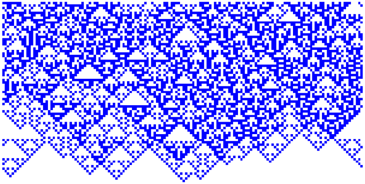
$$f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{M}(\mathcal{A}) \qquad F : \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$$



Exemple : AC de la parité avec une probabilité ε d'erreur.



$\varepsilon = 0$



$\varepsilon = 0.01$

Automates cellulaires probabilistes

Pour un AC déterministe F, on note F_ε l'ACP consistant à :

- appliquer la règle locale de F avec probabilité $1-\varepsilon$,
- choisir uniformément un symbole au hasard avec probabilité ε.

Automates cellulaires probabilistes

Pour un AC déterministe F, on note F_ε l'ACP consistant à :

- appliquer la règle locale de F avec probabilité $1 - \varepsilon$,
- choisir uniformément un symbole au hasard avec probabilité ε.

La plupart des AC **bruités** oublient leur configuration initiale au cours de leur évolution : on parle d'**ergodicité**.

Automates cellulaires probabilistes

Pour un AC déterministe F, on note F_ε l'ACP consistant à :

- appliquer la règle locale de F avec probabilité $1 - \varepsilon$,
- choisir uniformément un symbole au hasard avec probabilité ε.

La plupart des AC **bruités** oublient leur configuration initiale au cours de leur évolution : on parle d'**ergodicité**.

Même pour l'AC de la majorité avec une probabilité ε d'erreur ?

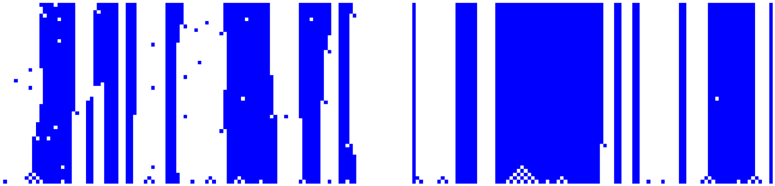
Automates cellulaires probabilistes

Pour un AC déterministe F, on note F_ε l'ACP consistant à :

- appliquer la règle locale de F avec probabilité $1-\varepsilon$,
- choisir uniformément un symbole au hasard avec probabilité ε.

La plupart des AC **bruités** oublient leur configuration initiale au cours de leur évolution : on parle d'**ergodicité**.

Même pour l'AC de la majorité avec une probabilité ε d'erreur ?



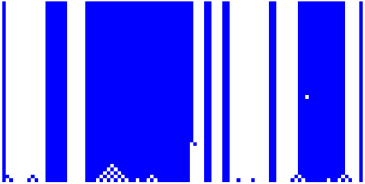
$\varepsilon = 0.01$ $\varepsilon = 0.001$

Pour un AC déterministe F, on note F_ε l'ACP consistant à :

- appliquer la règle locale de F avec probabilité $1 - \varepsilon$,
- choisir uniformément un symbole au hasard avec probabilité ε.

La plupart des AC **bruités** oublient leur configuration initiale au cours de leur évolution : on parle d'**ergodicité**.

Même pour l'AC de la majorité avec une probabilité ε d'erreur ?



$\varepsilon = 0.01$ $\varepsilon = 0.001$

Conjecture qui a émergé à la fin des années 1960 : en dimension 1, tous les AC à **taux positifs** sont ergodiques...

Ergodicité

Un ACP F est **ergodique** si :

- il existe une **unique distribution de probabilité invariante** $\pi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, telle que $F\pi = \pi$,
- pour toute distribution initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, la suite $(F^n\mu)_{n\geq 0}$ **converge** vers π.

Ergodicité

Un ACP F est **ergodique** si :

- il existe une **unique distribution de probabilité invariante** $\pi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, telle que $F\pi = \pi$,
- pour toute distribution initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, la suite $(F^n\mu)_{n\geq 0}$ **converge** vers π.

On part d'un AC déterministe F, qu'on bruite (uniformément) :

Ergodicité

Un ACP F est **ergodique** si :

- il existe une **unique distribution de probabilité invariante** $\pi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, telle que $F\pi = \pi$,
- pour toute distribution initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, la suite $(F^n\mu)_{n\geq 0}$ **converge** vers π.

On part d'un AC déterministe F, qu'on bruite (uniformément) :

- pour ε suffisamment grand, l'ergodicité de l'AC bruité F_ε est facile à démontrer (couplage probabiliste),

Ergodicité

Un ACP F est **ergodique** si :

- il existe une **unique distribution de probabilité invariante** $\pi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, telle que $F\pi = \pi$,
- pour toute distribution initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$, la suite $(F^n\mu)_{n\geq 0}$ **converge** vers π.

On part d'un AC déterministe F, qu'on bruite (uniformément) :

- pour ε suffisamment grand, l'ergodicité de l'AC bruité F_ε est facile à démontrer (couplage probabiliste),
- par contre, pour ε petit, il n'y a pas de technique générale, et l'ergodicité de F_ε est souvent difficile à démontrer, même dans les cas où cela semble clair sur les simulations !

AC nilpotent bruité

L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante.
Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\Longleftrightarrow$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

AC nilpotent bruité

L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante.
Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\Longleftrightarrow$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Si ε est suffisamment petit, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

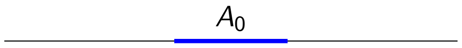
L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante.
Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\Longleftrightarrow$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Si ε est suffisamment petit, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

$t = 0$



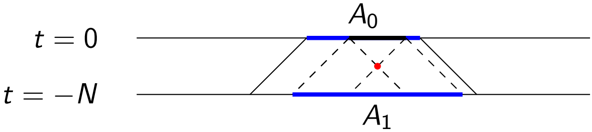
AC nilpotent bruité

L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante.
Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\Longleftrightarrow$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Si ε est suffisamment petit, l'ACP bruité F_ε est ergodique.



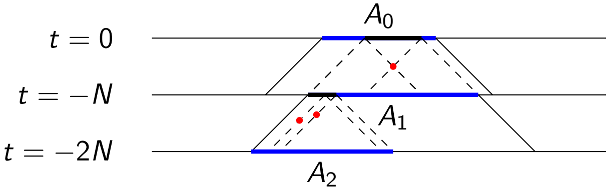
AC nilpotent bruité

L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante.
Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\Longleftrightarrow$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Si ε est suffisamment petit, l'ACP bruité F_ε est ergodique.



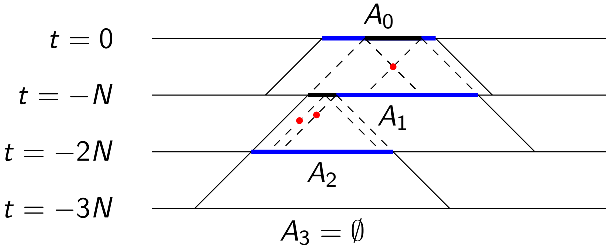
AC nilpotent bruité

L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante. Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\iff$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Si ε est suffisamment petit, l'ACP bruité F_ε est ergodique.



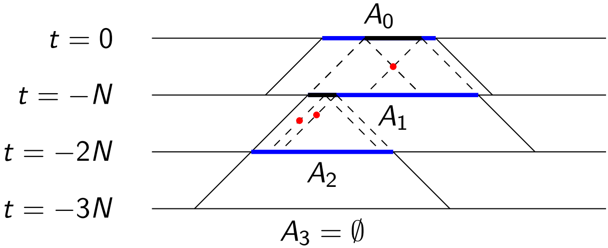
AC nilpotent bruité

L'AC F est **nilpotent** s'il existe $N \geq 1$ tel que F^N est constante.
Il y a alors un symbole $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^N(x) = \alpha^{\mathbb{Z}}$.

AC déterministes : ergodicité $\Longleftrightarrow$ nilpotence
[Bušić-Mairesse-M. 2011]

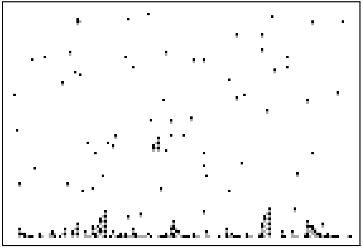
Proposition [M.-Sablik-Taati]

Si ε est suffisamment petit, l'ACP bruité F_ε est ergodique.



Encore vrai pour un bruit plus général...

$\varepsilon = 0$



$\varepsilon = 0.01$

$$F^{12}(x) = 0^{\mathbb{Z}} \text{ pour tout } x \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$$

AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \;\text{ pour un }\; i \in \{-r, \ldots, r\}) \quad \Longrightarrow \quad F(x)_k = \alpha.$

AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \text{ pour un } i \in \{-r, \ldots, r\}) \implies F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \text{ pour un } i \in \{-r, \dots, r\}) \implies F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

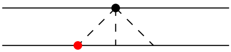
$t = 0$

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \;\text{ pour un }\; i \in \{-r, \ldots, r\}) \quad \Longrightarrow \quad F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

$t = 0$
$t = -1$



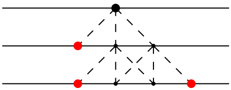
AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \;\text{ pour un }\; i \in \{-r, \ldots, r\}) \quad \Longrightarrow \quad F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

$t = 0$
$t = -1$
$t = -2$

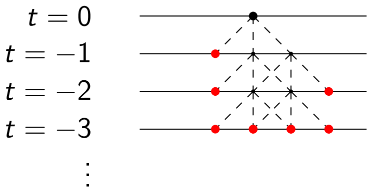


AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \text{ pour un } i \in \{-r, \ldots, r\}) \implies F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

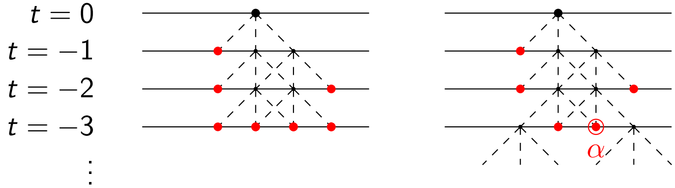


AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \ \text{ pour un } \ i \in \{-r, \dots, r\}) \quad \Longrightarrow \quad F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

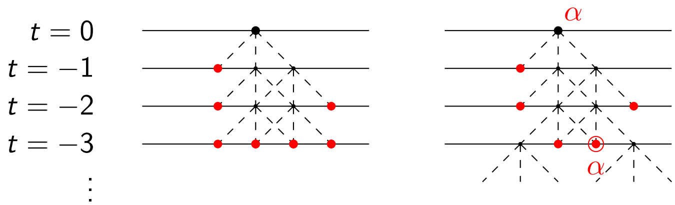


AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \ \text{ pour un } \ i \in \{-r, \ldots, r\}) \quad \Longrightarrow \quad F(x)_k = \alpha.$

Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.

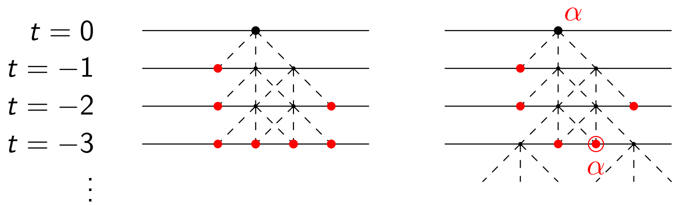


AC avec un état envahissant

La lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ est un état **envahissant** de F si :
$(x_{k+i} = \alpha \;\text{ pour un }\; i \in \{-r, \ldots, r\}) \quad \Longrightarrow \quad F(x)_k = \alpha.$

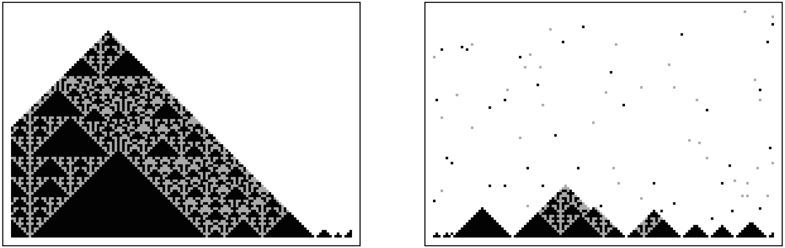
Proposition [M.-Sablik-Taati]

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ACP bruité F_ε est ergodique.



Pour ε petit, vrai aussi pour un bruit plus général (autre preuve)...

AC avec un état envahissant

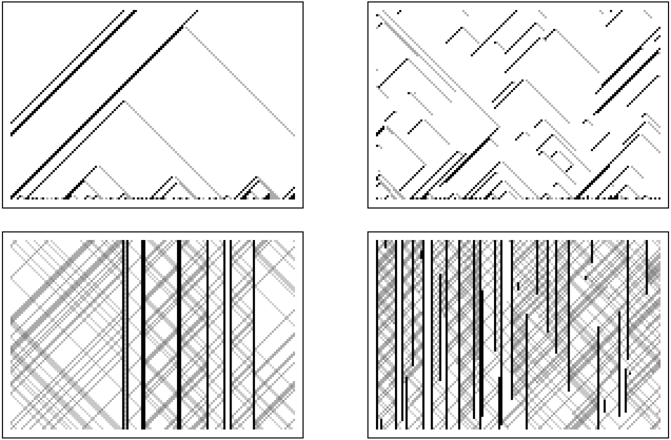


$\varepsilon = 0$ $\varepsilon = 0.01$

$$F(x)_i = x_{i-1}x_ix_{i+1} \mod 3$$

AC balistique

Résultats de même nature pour les AC balistiques...



$\varepsilon = 0$ $\varepsilon = 0.01$

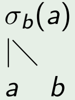
AC permutif

Un AC F de voisinage $\{0,1\}$ est **permutif** si :
$\forall b \in \mathcal{A},\ \exists \sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}),\ \forall a \in \mathcal{A},\ f(a,b) = \sigma_b(a)$.

$$\begin{array}{ll} \sigma_b(a) & \\ \mid\ \diagdown & \\ a & b \end{array}$$

AC permutif

Un AC F de voisinage $\{0,1\}$ est **permutif** si :
$\forall b \in \mathcal{A},\ \exists \sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}),\ \forall a \in \mathcal{A},\ f(a,b) = \sigma_b(a).$



Exemple : $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $f(a,b) = a + b$.

AC permutif

Un AC F de voisinage $\{0,1\}$ est **permutif** si :
$\forall b \in \mathcal{A},\ \exists \sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}),\ \forall a \in \mathcal{A},\ f(a,b) = \sigma_b(a)$.

$$\begin{array}{cc} \sigma_b(a) & \\ a & b \end{array}$$

Exemple : $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $f(a,b) = a + b$.

Proposition

Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, l'ACP F_ε est ergodique.

Un AC F de voisinage $\{0,1\}$ est **permutif** si :
$\forall b \in \mathcal{A},\ \exists \sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}),\ \forall a \in \mathcal{A},\ f(a,b) = \sigma_b(a)$.

$$\begin{array}{cc} \sigma_b(a) & \\ a & b \end{array}$$

Exemple : $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $f(a,b) = a + b$.

Proposition

Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, l'ACP F_ε est ergodique.

Ici, besoin que le bruit soit uniforme !

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \dots x_n,\ \bullet\ )$.

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\left(x_1 \dots x_n, \bullet\right)$.

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$.

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$:
$\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \dots x_n, \bullet\,)$.

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & b \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$.

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\left(x_1 \dots x_n, \bullet\right)$.

$$\begin{array}{lccccc} t=2 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_n & \\ t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & b \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$.

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \dots x_n, \bullet\,)$.

$$\begin{array}{lccccc} t=2 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_n & b \\ t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & b \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$.

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \ldots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \ldots x_n, \bullet\,)$.

$$\begin{array}{lccccc} t=3 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ t=2 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_n & b \\ t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & b \\ t=0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$.

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \dots x_n,\ \bullet\ )$.

$$\begin{array}{lccccc} t=3 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & b \\ t=2 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_n & b \\ t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & b \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$.

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \dots x_n,\ \bullet\ )$.

$$\begin{array}{lccccc} t=3 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & b \\ t=2 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_n & b \\ t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & b \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$. Vrai pour chaque $b \in \mathcal{A}$!

AC permutif

Pour F, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit une permutation $\sigma_b \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}^n)$:

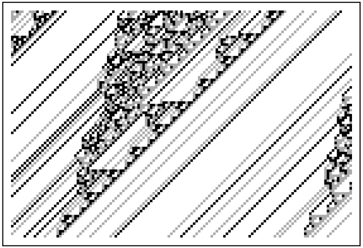
$$\begin{array}{lccccc} t=1 & y_1 & y_2 & \dots & y_n & \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & b \end{array}$$

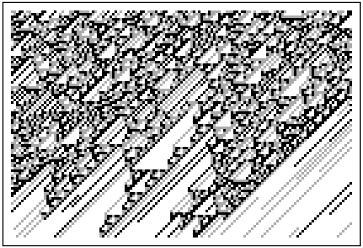
Pour F_ε, chaque $b \in \mathcal{A}$ induit un noyau de transition P_b sur $\mathcal{A}^n$: $\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_n \sim P_b\,(x_1 \dots x_n, \bullet\,)$.

$$\begin{array}{lccccc} t=3 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \color{red}{b_4} \\ t=2 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_n & \color{red}{b_3} \\ t=1 & \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \cdots & \tilde{y}_n & \color{red}{b_2} \\ t=0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \color{red}{b_1} \end{array}$$

P_b est irreductible et apériodique, et sa mesure invariante est la **mesure uniforme** sur $\mathcal{A}^n$. Vrai pour chaque $b \in \mathcal{A}$!

AC permutif





$\varepsilon = 0$ $\varepsilon = 0.01$

$$F(x)_i = x_{i-1} + x_i x_{i+1} \mod 3$$

On note σ l'application de décalage.

Théorème [M.-Sablik-Taati]

Si F est **surjectif**, alors pour tout $\varepsilon > 0$, et pour toute distribution initiale σ-invariante μ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $(F_\varepsilon^n \mu)_{n\geq 0}$ converge vers la mesure uniforme λ.

Remarque : λ est invariante par F donc par F_ε (bruit uniforme).

Automates cellulaires surjectifs

On note σ l'application de décalage.

Théorème [M.-Sablik-Taati]

Si F est **surjectif**, alors pour tout $\varepsilon > 0$, et pour toute distribution initiale σ-invariante μ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $(F_\varepsilon^n \mu)_{n \geq 0}$ converge vers la mesure uniforme λ.

Remarque : λ est invariante par F donc par F_ε (bruit uniforme).

Idée de la démonstration :

- Un AC surjectif préserve l'entropie par site des distributions σ-invariantes
- Le bruit uniforme augmente strictement l'entropie (à moins que la distribution soit déjà d'entropie maximale)

On note σ l'application de décalage.

Théorème [M.-Sablik-Taati]

Si F est **surjectif**, alors pour tout $\varepsilon > 0$, et pour toute distribution initiale σ-invariante μ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $(F_\varepsilon^n \mu)_{n \geq 0}$ converge vers la mesure uniforme λ.

Remarque : λ est invariante par F donc par F_ε (bruit uniforme).

Idée de la démonstration :

- Un AC surjectif préserve l'entropie par site des distributions σ-invariantes
- Le bruit uniforme augmente strictement l'entropie (à moins que la distribution soit déjà d'entropie maximale)

Difficulté : besoin de contrôler l'incrément d'entropie...

Plan de l'exposé

1. Introduction aux automates cellulaires
2. Automates cellulaires bruités
3. Correction d'erreurs dans une configuration

Plan de l'exposé

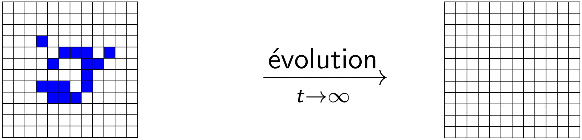
1. Introduction aux automates cellulaires
2. Automates cellulaires bruités
3. **Correction d'erreurs dans une configuration**

Érosion

Un AC a la **propriété d'érosion** si :

- à partir d'une configuration avec un nombre fini de cellules bleues, au bout d'un certain temps, plus aucune cellule bleue,
- à partir d'une configuration avec un nombre fini de cellules blanches, au bout d'un certain temps, plus aucune cellule blanche.

Objectif : savoir **corriger** des anomalies qui apparaîtraient en nombre fini sur une configuration toute blanche ou toute bleue.

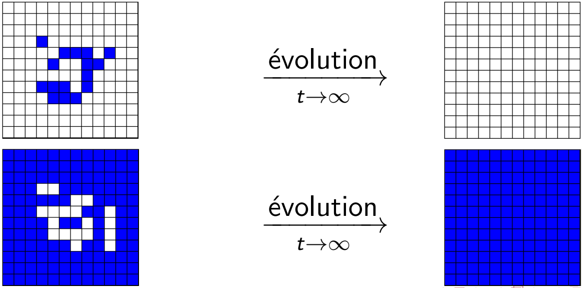


Érosion

Un AC a la **propriété d'érosion** si :

- à partir d'une configuration avec un nombre fini de cellules bleues, au bout d'un certain temps, plus aucune cellule bleue,
- à partir d'une configuration avec un nombre fini de cellules blanches, au bout d'un certain temps, plus aucune cellule blanche.

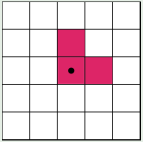
Objectif : savoir **corriger** des anomalies qui apparaîtraient en nombre fini sur une configuration toute blanche ou toute bleue.



Automate cellulaire de Toom

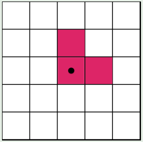
Proposition

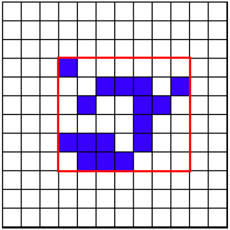
L'automate cellulaire de la **majorité sur le voisinage de Toom** possède la propriété d'érosion.



Proposition

L'automate cellulaire de la **majorité sur le voisinage de Toom** possède la propriété d'érosion.

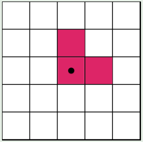


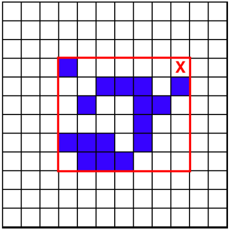


Automate cellulaire de Toom

Proposition

L'automate cellulaire de la **majorité sur le voisinage de Toom** possède la propriété d'érosion.

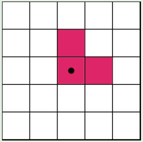


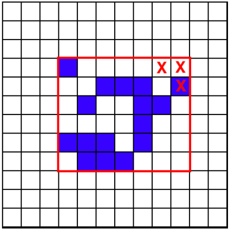


Rectangle de taille $m \times n$: cellules bleues effacées en au plus $m + n$ étapes.

Proposition

L'automate cellulaire de la **majorité sur le voisinage de Toom** possède la propriété d'érosion.



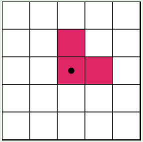


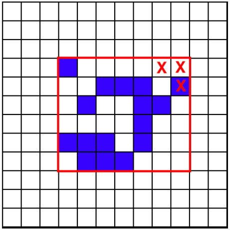
Rectangle de taille $m \times n$: cellules bleues effacées en au plus $m + n$ étapes.

Automate cellulaire de Toom

Proposition

L'automate cellulaire de la **majorité sur le voisinage de Toom** possède la propriété d'érosion.





Rectangle de taille $m \times n$: cellules bleues effacées en au plus $m + n$ étapes.

En dimension 1...

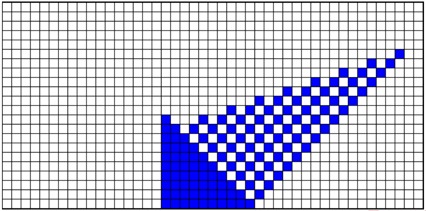
En dimension 1, il existe aussi des automates cellulaires qui possèdent la propriété d'érosion.

Un des plus simples est l'**automate cellulaire GKL**, proposé en 1978 par Gacs, Kurdyumov, et Levin.

En dimension 1, il existe aussi des automates cellulaires qui possèdent la propriété d'érosion.

Un des plus simples est l'**automate cellulaire GKL**, proposé en 1978 par Gacs, Kurdyumov, et Levin.

- Si une cellule (d'indice n) est blanche, sa nouvelle couleur est celle qui est majoritaire parmi les couleurs des cellules $n-3, n-1, n$.
- Si une cellule (d'indice n) est bleue, sa nouvelle couleur est celle qui est majoritaire parmi les couleurs des cellules $n, n+1, n+3$.



Corriger un bruit aléatoire

Certains automates cellulaires ont la propriété de nettoyer les configurations où toutes les cellules sont de la même couleur, sauf un nombre **fini** de cellules coloriées de la "mauvaise" couleur.

Corriger un bruit aléatoire

Certains automates cellulaires ont la propriété de nettoyer les configurations où toutes les cellules sont de la même couleur, sauf un nombre **fini** de cellules coloriées de la "mauvaise" couleur.

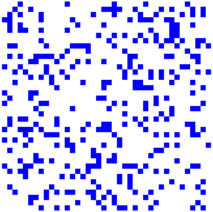
Si on part d'une configuration où chaque cellule est initialement coloriée de la "mauvaise" couleur **avec une certaine probabilité** $p < 1/2$, est-il toujours possible de nettoyer la configuration à l'aide d'un automate cellulaire ?

Corriger un bruit aléatoire

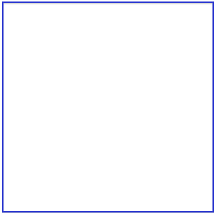
Certains automates cellulaires ont la propriété de nettoyer les configurations où toutes les cellules sont de la même couleur, sauf un nombre **fini** de cellules coloriées de la “mauvaise” couleur.

Si on part d'une configuration où chaque cellule est initialement coloriée de la “mauvaise” couleur **avec une certaine probabilité** $p < 1/2$, est-il toujours possible de nettoyer la configuration à l'aide d'un automate cellulaire ?
On dit qu'un tel automate cellulaire **classifie la densité**.

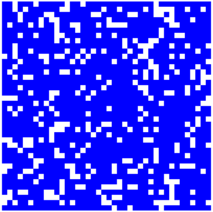
Corriger un bruit aléatoire



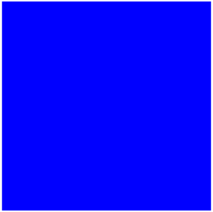
$$\xrightarrow[t\to\infty]{\text{évolution}}$$



p=0.2



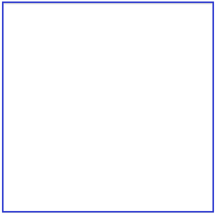
$$\xrightarrow[t\to\infty]{\text{évolution}}$$



p=0.8

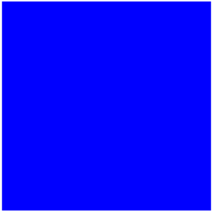
Corriger un bruit aléatoire

$$\xrightarrow[t\to\infty]{\text{évolution}}$$



p=0.49

$$\xrightarrow[t\to\infty]{\text{évolution}}$$



p=0.51

Réseaux distribués : dans les grands réseaux informatiques actuels, il n'y a souvent pas d'autorité centrale pour contrôler et réguler le fonctionnement !

Motivations

Réseaux distribués : dans les grands réseaux informatiques actuels, il n'y a souvent pas d'autorité centrale pour contrôler et réguler le fonctionnement !

Problème de **recherche de consensus** dans un réseau distribué : comment faire **émerger** une information globale en collectant seulement une information locale à chaque étape ?

Motivations

Réseaux distribués : dans les grands réseaux informatiques actuels, il n'y a souvent pas d'autorité centrale pour contrôler et réguler le fonctionnement !

Problème de **recherche de consensus** dans un réseau distribué : comment faire **émerger** une information globale en collectant seulement une information locale à chaque étape ?

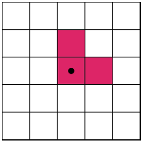
Difficultés :

- il n'est pas possible de centraliser l'information (les cellules sont indistinguables),
- il n'est pas possible d'utiliser des techniques de comptage classique (les cellules peuvent seulement mémoriser leur couleur).

Théorème

Théorème [Bušić-Fatès-Mairesse-M. 2012]

L'automate cellulaire de la majorité sur le voisinage de Toom classifie la densité.



Ébauche de démonstration

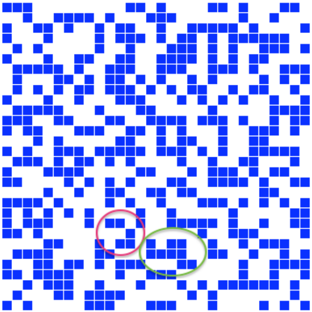
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).

Ébauche de démonstration

On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.

Ébauche de démonstration

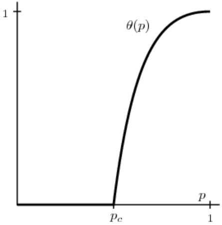
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !

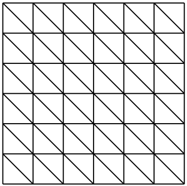


$t = 0$

$p =$ proportion de sites bleus
$\theta(p) =$ probabilité que l'origine appartienne à un amas infini

$$p < p_c \implies \theta(p) = 0$$
$$p > p_c \implies \theta(p) > 0$$

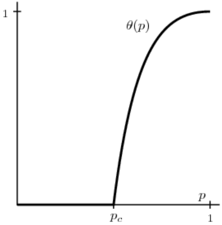


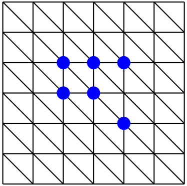


Théorie de la percolation

$p =$ proportion de sites bleus
$\theta(p) =$ probabilité que l'origine appartienne à un amas infini

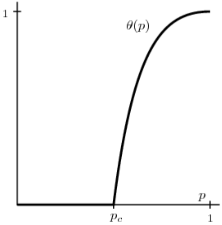
$$p < p_c \implies \theta(p) = 0$$
$$p > p_c \implies \theta(p) > 0$$

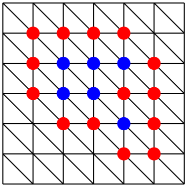




$p =$ proportion de sites bleus
$\theta(p) =$ probabilité que l'origine appartienne à un amas infini

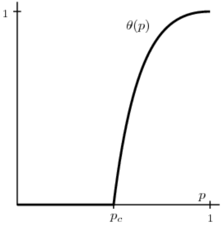
$$p < p_c \implies \theta(p) = 0$$
$$p > p_c \implies \theta(p) > 0$$

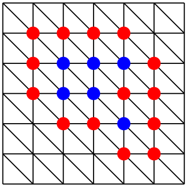




$p =$ proportion de sites bleus
$\theta(p) =$ probabilité que l'origine appartienne à un amas infini

$$p < p_c \implies \theta(p) = 0$$
$$p > p_c \implies \theta(p) > 0$$



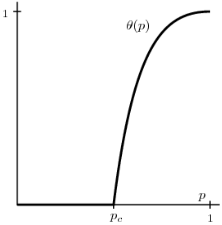


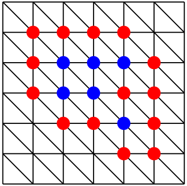
Idée : $p < p_c \iff 1 - p > p_c$. D'où $p_c = 1/2$.

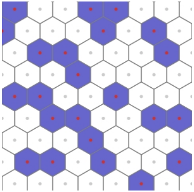
Théorie de la percolation

$p =$ proportion de sites bleus
$\theta(p) =$ probabilité que l'origine appartienne à un amas infini

$$p < p_c \implies \theta(p) = 0$$
$$p > p_c \implies \theta(p) > 0$$





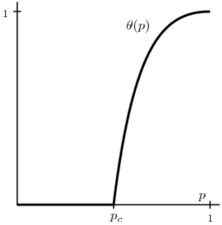


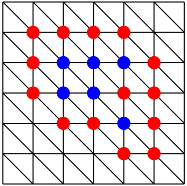
Idée : $p < p_c \iff 1 - p > p_c$. D'où $p_c = 1/2$.

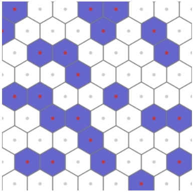
Théorie de la percolation

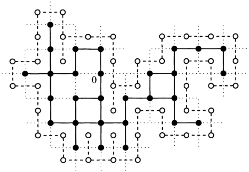
$p =$ proportion de sites bleus
$\theta(p) =$ probabilité que l'origine appartienne à un amas infini

$$p < p_c \implies \theta(p) = 0$$
$$p > p_c \implies \theta(p) > 0$$



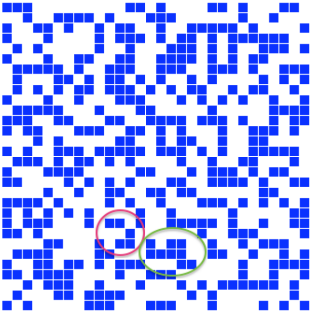






Idée : $p < p_c \iff 1 - p > p_c$. D'où $p_c = 1/2$.

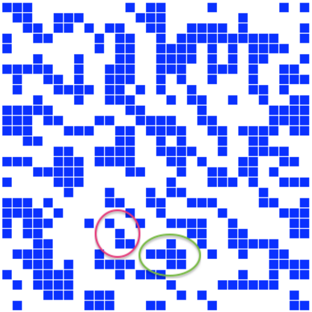
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 0$

Retour à la démonstration...

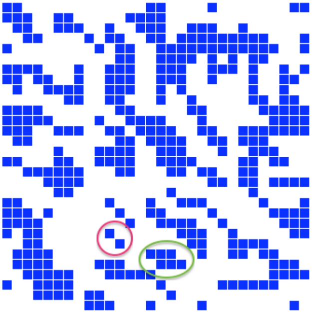
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 1$

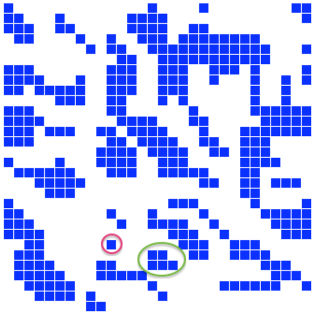
Retour à la démonstration...

On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 2$

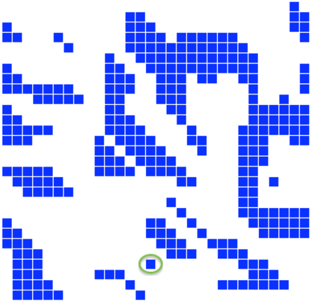
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 3$

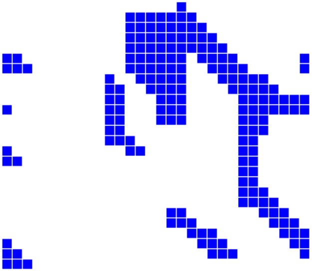
Retour à la démonstration...

On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 5$

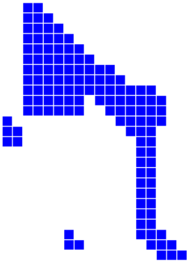
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 10$

Retour à la démonstration...

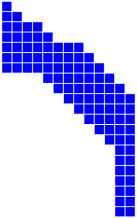
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 15$

Retour à la démonstration...

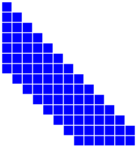
On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



$t = 20$

Retour à la démonstration...

On suppose $p < 1/2$ (exemple : $p = 0.45$).
On part d'une cellule bleue et on se déplace d'un pas vers le Nord, l'Est, le Sud, l'Ouest, ou en diagonale vers le N-O ou le S-E.
La théorie de la **percolation** nous dit que si on veut ne rester que sur des cellules bleues au cours du parcours, on ne peut atteindre qu'un nombre fini de cellules bleues !



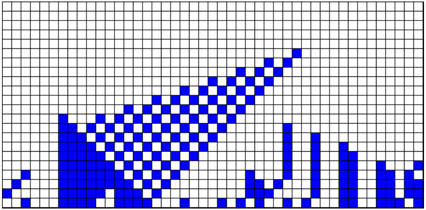
$t = 30$

Et en dimension 1 ?

En dimension 1, c'est un **problème ouvert** de savoir s'il existe un automate cellulaire qui classifie la densité.

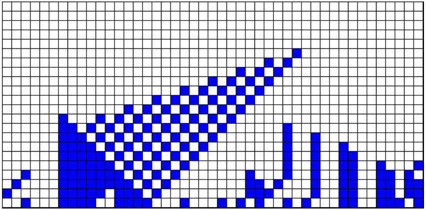
Et en dimension 1 ?

En dimension 1, c'est un **problème ouvert** de savoir s'il existe un automate cellulaire qui classifie la densité.
En particulier, on ne sait pas si GKL a cette propriété.



Et en dimension 1 ?

En dimension 1, c'est un **problème ouvert** de savoir s'il existe un automate cellulaire qui classifie la densité.
En particulier, on ne sait pas si GKL a cette propriété.



On sait seulement que GKL a la propriété de corriger les configurations pour lesquelles la probabilité d'erreur satisfait $p < 0.0017...$ [Taati 2015].

On peut faire le parallèle avec la difficulté de trouver un AC qui **résiste au bruit**.

Lien avec l'ergocité

On peut faire le parallèle avec la difficulté de trouver un AC qui **résiste au bruit**.

En dimension 2, on peut montrer que l'AC de Toom résiste au bruit : si on fait des erreurs avec une probabilité ε suffisamment petite, l'AC probabiliste obtenu n'est **pas ergodique**.

Lien avec l'ergocité

On peut faire le parallèle avec la difficulté de trouver un AC qui **résiste au bruit**.

En dimension 2, on peut montrer que l'AC de Toom résiste au bruit : si on fait des erreurs avec une probabilité ε suffisamment petite, l'AC probabiliste obtenu n'est **pas ergodique**.

En dimension 1, on ne connaît pas d'exemple simple d'AC qui résiste au bruit ! En particulier, on ne sait pas si c'est le cas de la règle GKL. L'exemple le plus simple connu, proposé par Gács en 2001, est très compliqué...

Correction de pavages

On colorie les cellules de $\mathbb{Z}^d$ avec un nombre fini de couleurs, avec la contrainte que certaines paires de couleurs ne sont pas autorisées pour des cellules adjacentes.
On note Σ l'ensemble des configurations autorisées.
On dit que Σ est un **sous-décalage de type fini**.

Correction de pavages

On colorie les cellules de $\mathbb{Z}^d$ avec un nombre fini de couleurs, avec la contrainte que certaines paires de couleurs ne sont pas autorisées pour des cellules adjacentes.
On note Σ l'ensemble des configurations autorisées.
On dit que Σ est un **sous-décalage de type fini**.

Est-il possible de construire un AC F qui corrige les erreurs sur les configurations de Σ?

On colorie les cellules de $\mathbb{Z}^d$ avec un nombre fini de couleurs, avec la contrainte que certaines paires de couleurs ne sont pas autorisées pour des cellules adjacentes.
On note Σ l'ensemble des configurations autorisées.
On dit que Σ est un **sous-décalage de type fini**.

Est-il possible de construire un AC F qui corrige les erreurs sur les configurations de Σ?

On veut que F soit tel que :

- pour tout $x \in \Sigma$, $F(x) = x$,
- pour toute configuration $\tilde{x}$ obtenue en partant d'une configuration $x \in \Sigma$ et en modifiant un nombre fini de cellules, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F^n(\tilde{x}) \in \Sigma$.

Motivations

Motivations

- Explorer la frontière entre **local** / **non-local**.

Motivations

- Explorer la frontière entre **local** / **non-local**.
- Si F corrige en temps linéaire les configurations de Σ avec un nombre **fini** d'erreurs, alors F corrige les configurations pour lesquelles des erreurs ont été introduites **avec probabilité** ε **suffisamment petite** (méthode de Taati).

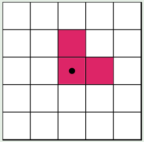
Motivations

- Explorer la frontière entre **local** / **non-local**.
- Si F corrige en temps linéaire les configurations de Σ avec un nombre **fini** d'erreurs, alors F corrige les configurations pour lesquelles des erreurs ont été introduites **avec probabilité** ε **suffisamment petite** (méthode de Taati).
- Les F_ε pourraient donner d'autres exemples intéressants d'ACP non-ergodiques à taux positifs ?

Ensembles finis

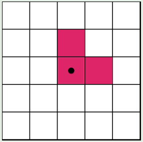
L'AC suivant corrige les damiers :

$$F(x)_{i,j} = \begin{cases} 1 - x_{i,j} \ \text{si} x_{i,j} = x_{i+1,j} = x_{i,j+1}, \\ x_{i,j} \ \text{sinon.} \end{cases}$$



L'AC suivant corrige les damiers :

$$F(x)_{i,j} = \begin{cases} 1 - x_{i,j} \text{ si} x_{i,j} = x_{i+1,j} = x_{i,j+1}, \\ x_{i,j} \text{ sinon.} \end{cases}$$

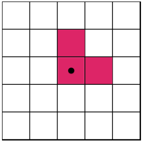


Proposition

Si Σ ne contient qu'un nombre fini de configurations, on peut corriger Σ à l'aide d'un AC.

Un pavage Σ est NE-déterministe s'il existe $f : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$, telle que :

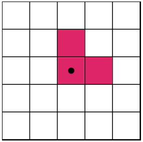
$$\forall x \in \Sigma, \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2, x_{i,j} = f(x_{i+1,j}, x_{i,j+1}).$$



Pavages Nord-Est déterministes

Un pavage Σ est NE-déterministe s'il existe
$f : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$, telle que :

$$\forall x \in \Sigma, \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2, x_{i,j} = f(x_{i+1,j}, x_{i,j+1}).$$

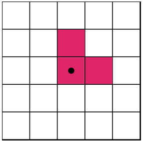


Remarque : il existes des pavages apériodiques NE-déterministes.

Pavages Nord-Est déterministes

Un pavage Σ est NE-déterministe s'il existe $f : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$, telle que :

$$\forall x \in \Sigma, \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2, x_{i,j} = f(x_{i+1,j}, x_{i,j+1}).$$



Remarque : il existes des pavages apériodiques NE-déterministes.

Proposition

On peut corriger les pavages NE-déterministes à l'aide d'un AC.

k-coloriages

k-coloriages

- $k = 2$: déjà vu (damiers)

k-coloriages

- $k = 2$: déjà vu (damiers)
- $k \geq 5$: facile

k-coloriages

- $k = 2$: déjà vu (damiers)
- $k \geq 5$: facile
- $k = 4$: pas trop difficile

k-coloriages

- $k = 2$: déjà vu (damiers)
- $k \geq 5$: facile
- $k = 4$: pas trop difficile
- $k = 3$: difficile

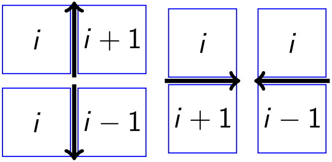
k-coloriages

- $k = 2$: déjà vu (damiers)
- $k \geq 5$: facile
- $k = 4$: pas trop difficile
- $k = 3$: difficile

1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0

k-coloriages

- $k = 2$: déjà vu (damiers)
- $k \geq 5$: facile
- $k = 4$: pas trop difficile
- $k = 3$: difficile



1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0

- $k = 2$: déjà vu (damiers)
- $k \geq 5$: facile
- $k = 4$: pas trop difficile
- $k = 3$: difficile