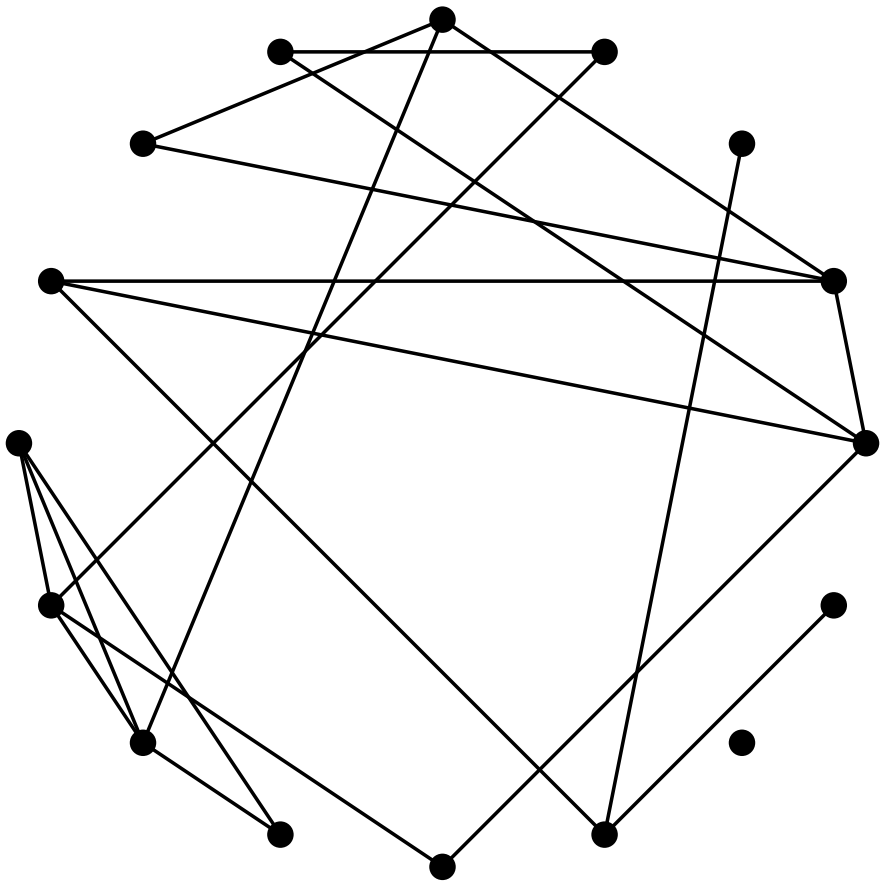
Graphes cubiques et triangulations sur une surface orientable

Wenjie Fang, Institut de Mathématiques Discrètes, TU Graz
Avec Mihyun Kang, Michael Moßhammer, Philipp Sprüssel

15 mars 2018, CIRM

Graphes aléatoires

Modèle Erdős–Rényi $G(n, M)$: n sommet, M arêtes prises au hasard

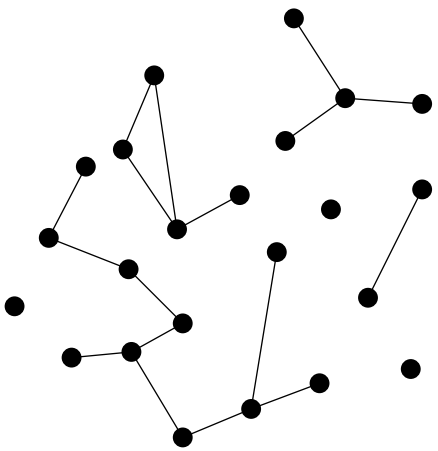


Beaucoup d'étude sur les transitions de phase

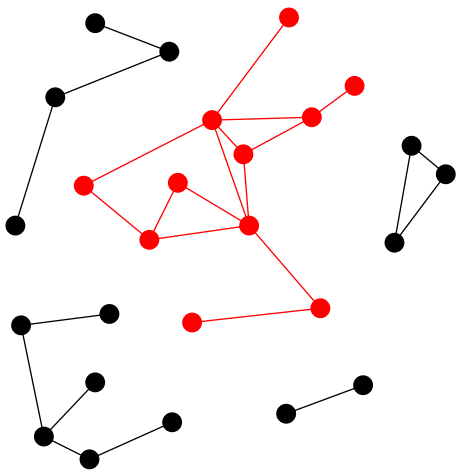
Émergence de la composante géante

Composante géante : celle contenant une fraction de tous les sommets

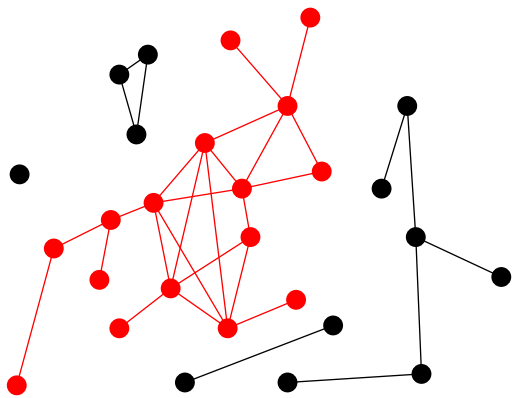
Transition de phase : $M = n/2$, fenêtre $O(n^{2/3})$ (Erdős–Rényi 1960)



$M - n/2 \ll -n^{2/3}$



$M - n/2 = \lambda n^{2/3}$



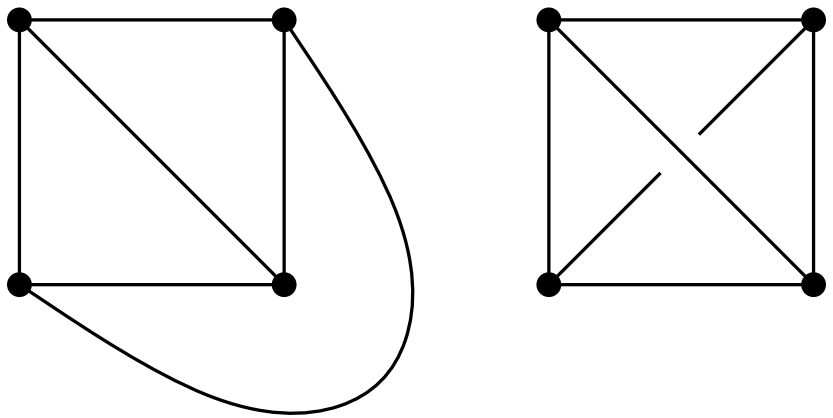
$M - n/2 \gg n^{2/3}$

Aussi autres transitions de phase et étude sur la structure fine

Sur une surface ...

$\mathbb{S}_g$: surface de genre g (ayant g "trous")

Un graphe connexe G est **plongeable** dans $\mathbb{S}_g$ si on peut le dessiner sur $\mathbb{S}_g$.



Les graphes non connexes sont traités comme l'union de ses composantes.

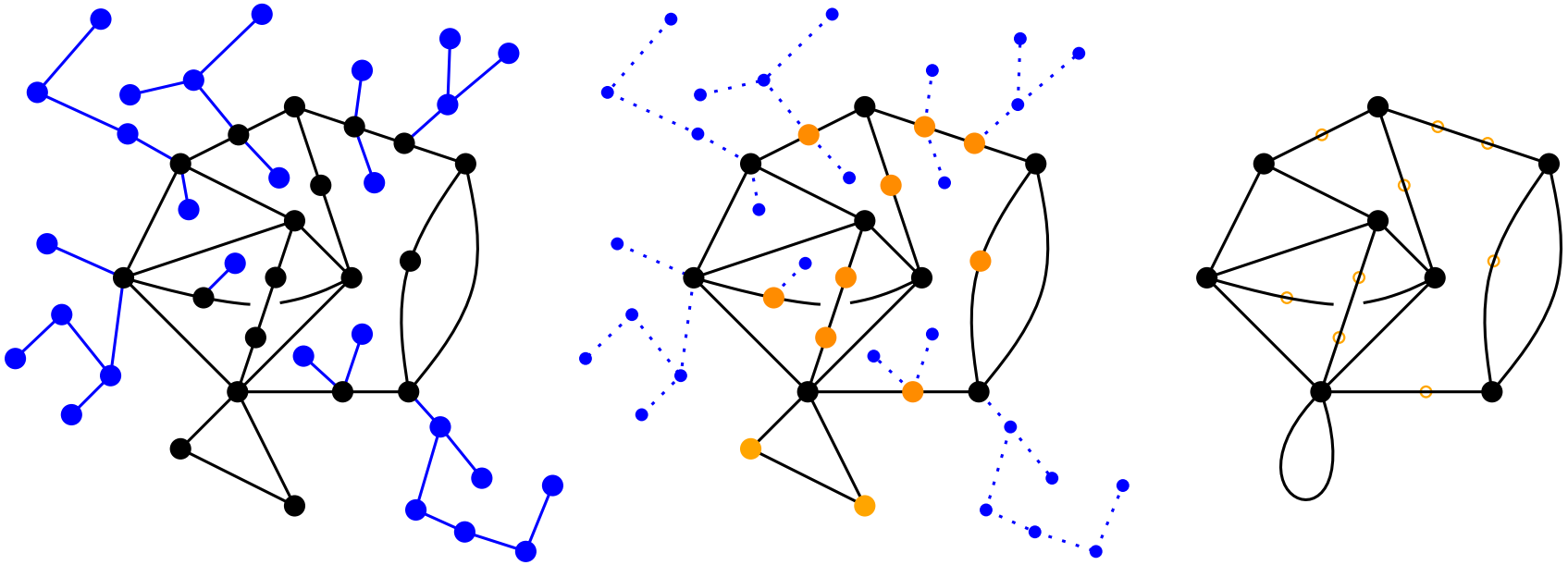
Question : Comment comportent-ils les graphes aléatoires plongeables dans $\mathbb{S}_g$?

Graphes aléatoires dans les surfaces

- $G(n, \mu n)$ est a.a.s. planaire pour $\mu < 1/2$ (Erdős et Rényi, 1960), et est a.a.s. non-planaire pour $\mu > 1/2$ (Janson, Knuth, Luczak et Pittel 1993), avec une fenêtre $O(n^{2/3})$.
- Kang et Luczak : Modèle de graphe aléatoire planaire $P(n, M)$
  - Émergence de composante géante : toujours à $M = n/2 + O(n^{2/3})$;
  - Changement de croissance : $M = n + O(n^{3/5})$.

Notre but ultime : Analyser les graphes aléatoires plongeables dans $\mathbb{S}_g$

Le core et le kernel d'un graphe



Théorème (Luczak–Pittel–Wierman 1994)

Pour $M = n/2 + O(n^{2/3})$, le kernel du graphe aléatoire $G(n, M)$ est asymptotiquement presque sûrement cubique.

Notre but courant : Compter les multigraphes cubiques plongeable dans $\mathbb{S}_g$

... avec un certain poids qui nous arrange.

Résultats connus de comptage

Comptons les multigraphes avec n sommets étiquetés.

- Giménez et Noy (2009) : cas planaires
  - Asymptotique : $\sim \boxed{c \cdot n^{-7/2} \gamma^n n!}$;
  - Lois du nombre d'arêtes ;
  - Asymptotique des graphes ayant μn arêtes pour $1 < \mu < 3$.
- Chapuy, Fusy, Giménez, Mohar et Noy (2011) et Bender et Gao (2011) : cas genre g quelconque
  - Asymptotique : $\sim \boxed{c^{(g)} \cdot n^{5(g-1)/2-1} \gamma^n n!}$ (le même γ !).
  - Lois du nombre d'arêtes ;
  - Asymptotique des graphes ayant μn arêtes pour $1 < \mu < 3$.

Nos résultats

Poids : $1/2$ sur chaque boucle et arête double

Théorème (F., Kang, Moßhammer, Sprüssel 2018)

Pour $g \geq 0$, la somme pondérée $w_g(n)$ des multigraphes cubiques à $2n$ sommets avec étiquetage plongeable dans $\mathbb{S}_g$ s'écrit

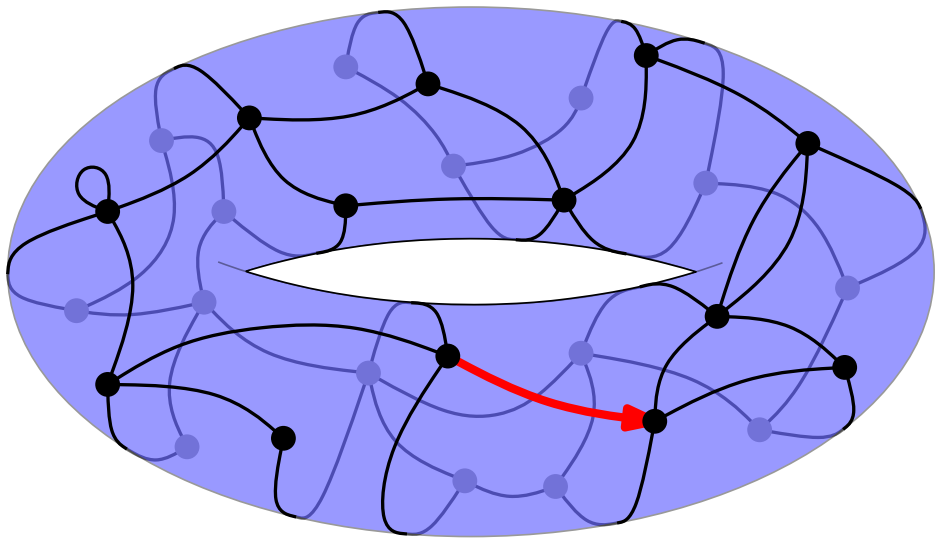
$$w_g(n) = \left(1 + O(n^{1/4})\right) e_g n^{5/2(g-1)-1} \gamma_w^{2n} (2n)!.$$

Ici, $\gamma_w = 79^{3/4} 54^{-1/2} \approx 3.606$, et e_g ne dépend que de g.

Nous avons aussi la version sans poids et la version simple.

Cartes

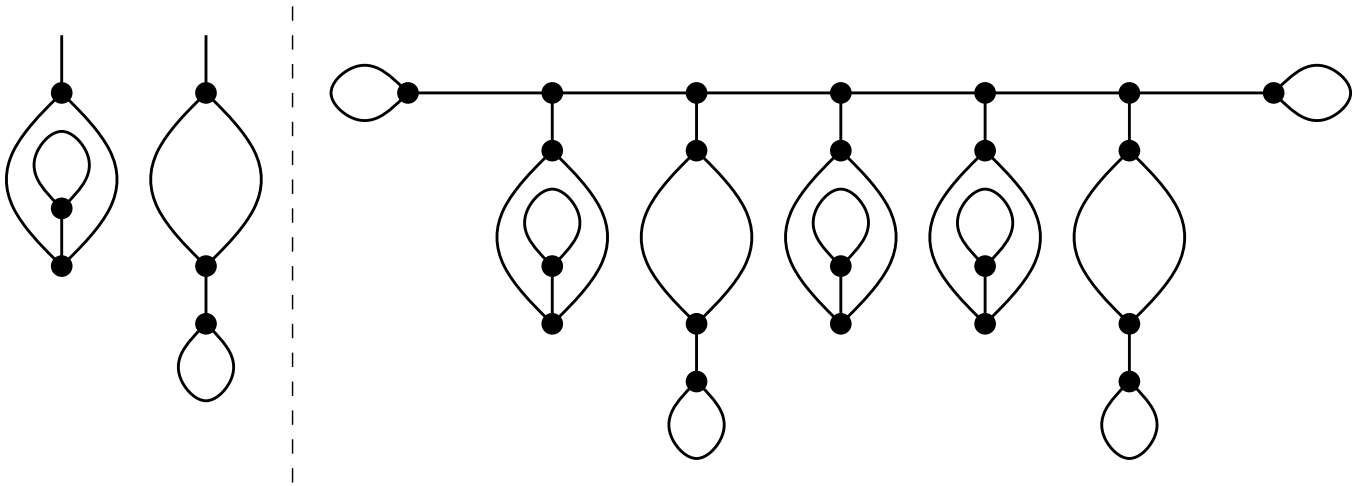
Une carte est un plongement fort d'un graphe, à petite variation près. On enracine les cartes en marquant une arête (racine) avec un orientation.



L'énumération des cartes est beaucoup plus avancée.

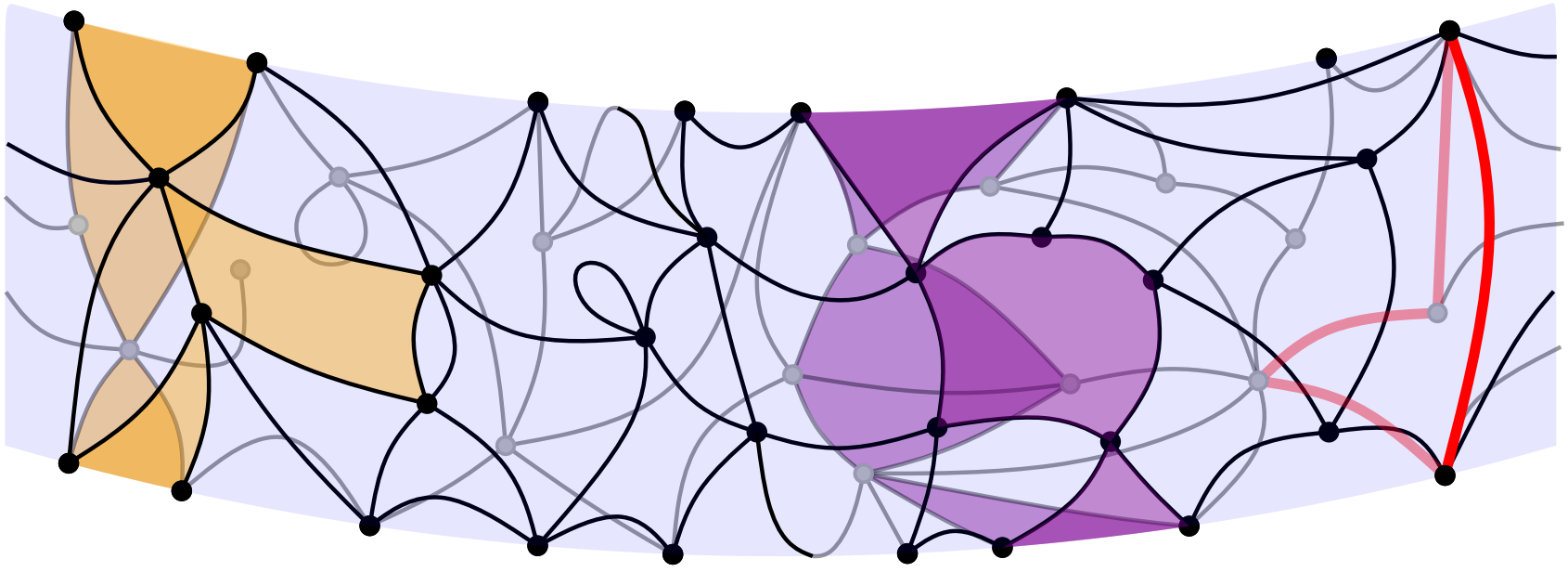
Idée : utiliser les cartes à énumérer les graphes ?

Une première approche ...



Pas de plongement unique en général !

Les largeurs diverses



Pour une carte M,

- Edgewidth $\mathrm{ew}(M)$: longueur minimum cycle non contractible ;
- Facewidth $\mathrm{fw}(M)$: nombre minimum de sous-ensemble de faces contenant un cycle non contractible.

M planaire $\Leftrightarrow \mathrm{ew}(M) = \mathrm{fw}(M) = \infty$.

Plongement unique

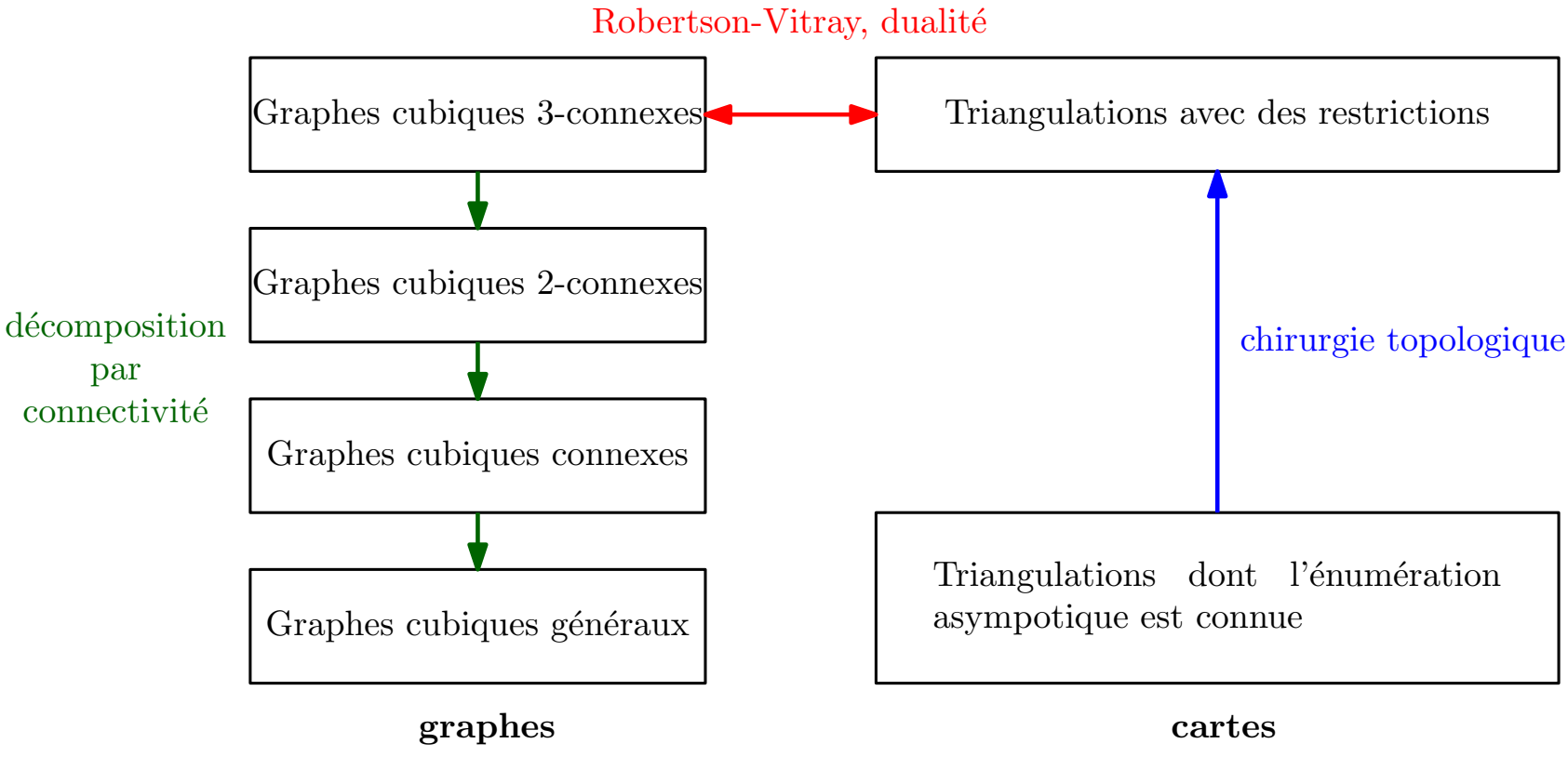
Théorème (Robertson–Vitray 1990)

Soit G un graphe 3-connexe plongeable dans $\mathbb{S}_g$, et M un tel plongement. Si $\mathrm{fw}(M) \geq 2g+3$, alors M est unique (modulo orientation).

Un graphe est **k-connexe** s'il reste connexe à toute suppression de $k-1$ sommets.

$g = 0 \Rightarrow$ unique plongement planaire pour tout graphe planaire 3-connexe

Stratégie



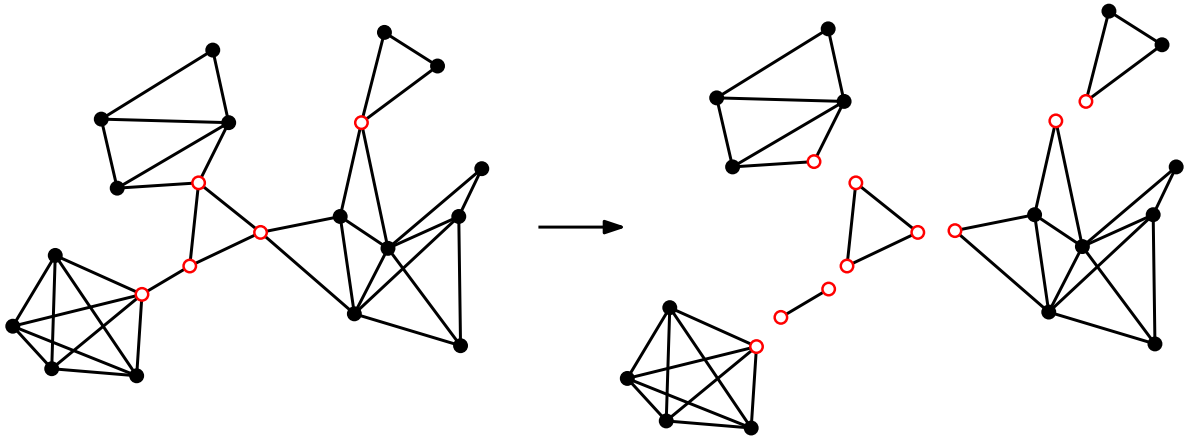
Les graphes sont toujours étiquetés sur les sommets. (Séries exp.)

Les cartes sont toujours enracinées. (Séries ord.)

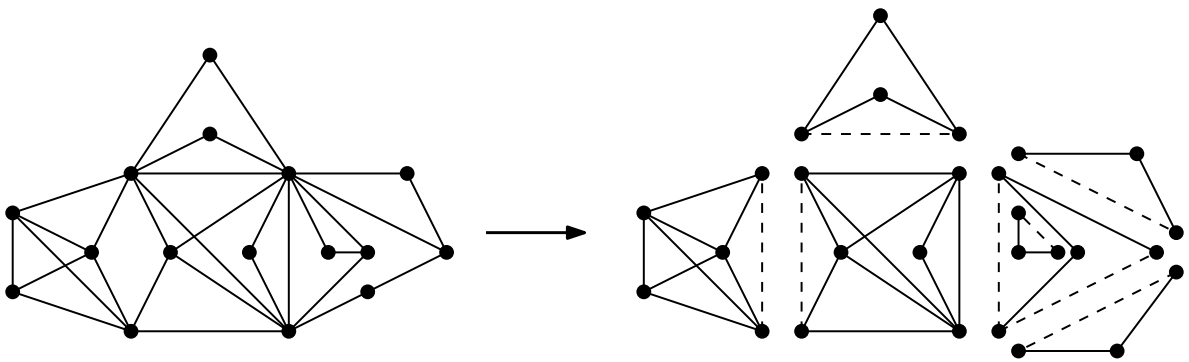
Décomposition par connexité

Général $\Rightarrow$ 1-connexe : général = ensemble de connexes

1-connexe $\Rightarrow$ 2-connexe :



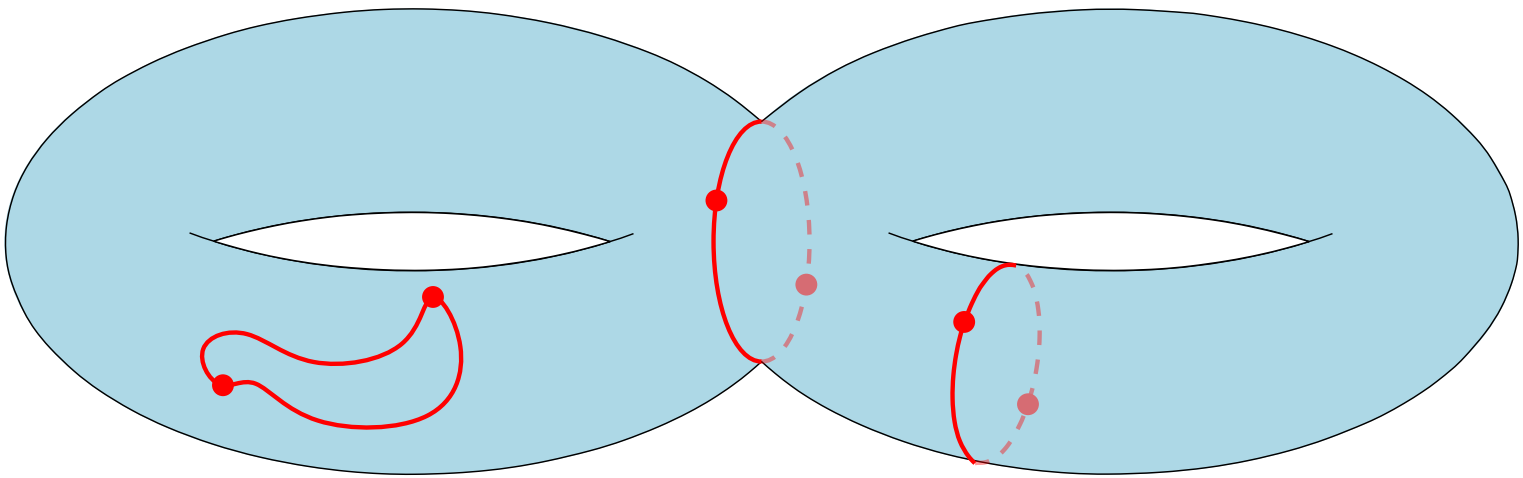
2-connexe $\Rightarrow$ 3-connexe :



Les cycles sur une surface

Trois types de cycles :

- Planaire ;
- Non-planaire séparant ;
- Non-séparant ;



Ce que l'on cherche

Notre but temporaire : Énumérer les cartes cubiques 3-connexes sur $\mathbb{S}_g$

Proposition

Le dual d'une carte cubique 3-connexe est une triangulation sans boucle séparante, ni paire de boucle séparante, ni arête double séparante.

Nouveau but : Énumérer les triangulations sur $\mathbb{S}_g$ avec quelques contraintes

Du connu à l'inconnu

	boucles		arêtes double	
	séparant	non-séparant	séparant	non-séparant
$\mathcal{M}_g$	Non	Parfois	Non	Oui
$\hat{\mathcal{S}}_g$	Non	Oui	Non	Oui
$\mathcal{S}_g$	Non	Non	Non	Non

On a $\mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{M}_g \subseteq \hat{\mathcal{S}}_g$.

$\mathcal{S}_g$: triangulation simple (connue)
$\hat{\mathcal{S}}_g$: triangulation sans boucle ou arête double séparante (à travailler)
$\mathcal{M}_g$: notre but

Ce que l'on sait

La variable t marque le nombre d'arêtes.

Les séries des cartes sont ordinaires.

$\mathcal{S}_g$: triangulations simples (connue)

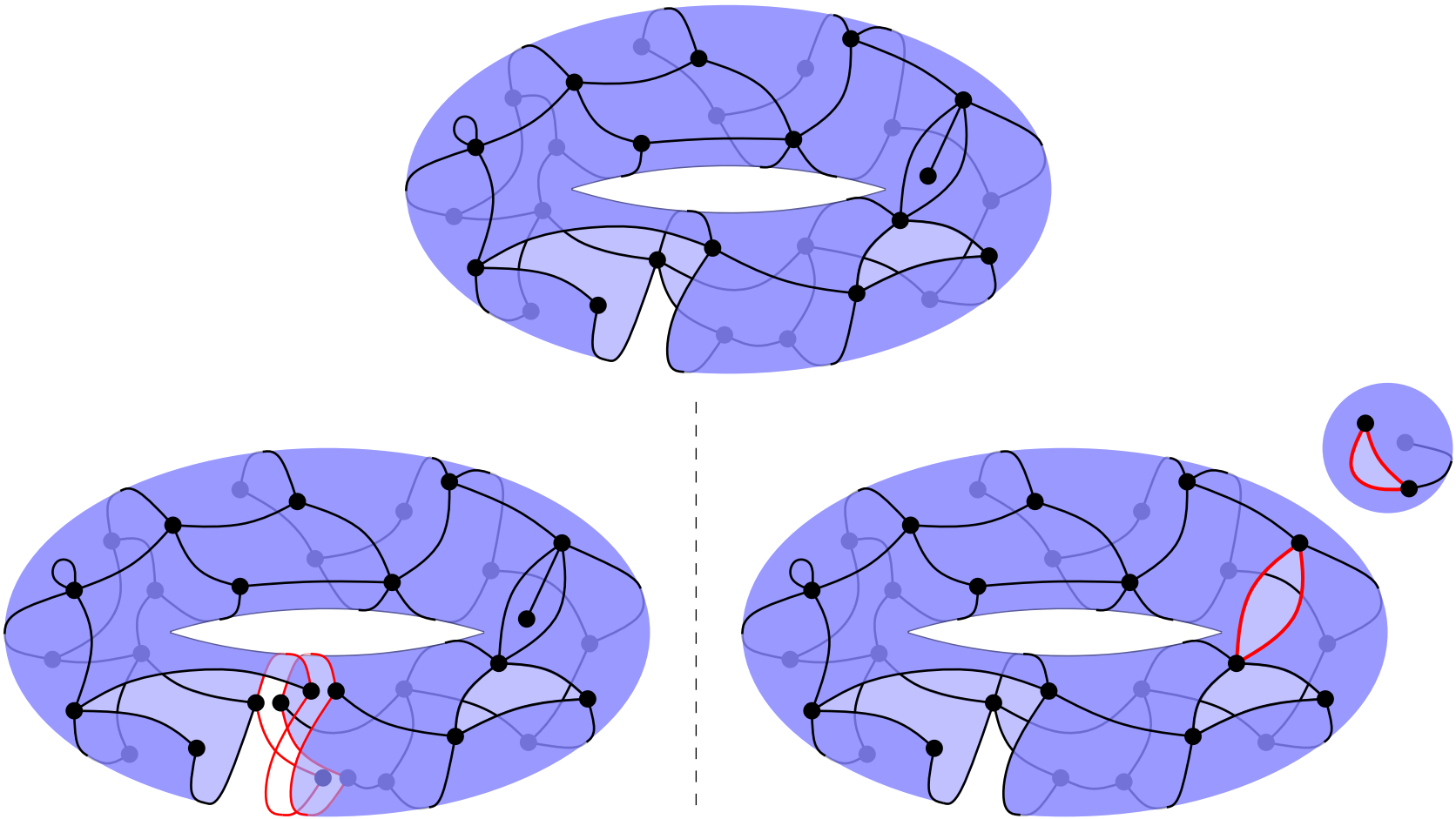
$$S_0(t) = s(1-2s), \quad \text{where } t^3 = s(1-s)^3;$$
$$S_g(t) = c_g(1-\rho_S^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1}\left(1+O\left((1-\rho_S^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

On peut tout calculer sur la série planaire.

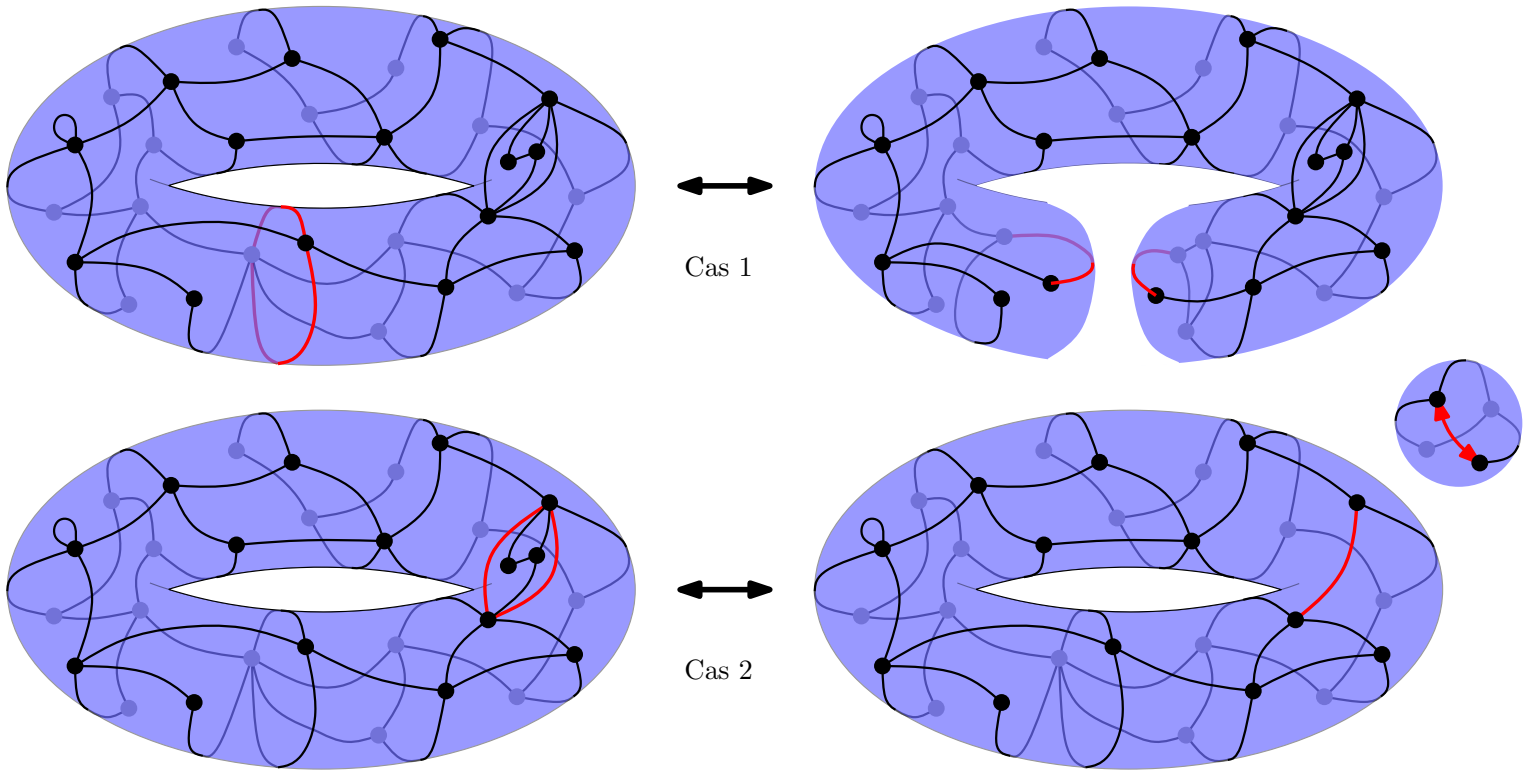
(sous le tapis : Δ-analytique)

Chirurgie

On peut traiter les cartes à bords.



Chirurgie sur les arêtes doubles



Cas 1 (non séparant) : une carte de genre $g-1$, avec 2 arêtes marquées

Cas 2 (séparant) : deux cartes de genre $g_1+g_2=g$, avec une arête marquée sur celle qui contient la racine

Couper les cycles

On est dans le premier cas de la chirurgie.

Idée : la sous-famille des cartes avec au moins une arête double non-séparant ou non-planaire séparant est sous-dominante.

Asymptotique des cartes en genre g : $\boxed{d_g \cdot n^{5(g-1)/2} \rho^n}$.

Couper une arête double non-séparant $\Rightarrow$ une carte de genre $g-1$ avec deux marquages

Couper une arête double non-planaire séparant $\Rightarrow$ deux cartes dont les genres somme à g avec un marquages de plus

L'exposant diminue par $1/2$! Donc sous-dominant.

Bien sûr la réalité est un peu plus compliquée ...

Énumération asymptotique

Proposition

Pour $g \geq 1$, les séries $\hat{S}_g(t)$ et $M_g(t)$ se comporte comme $S_g(t)$:

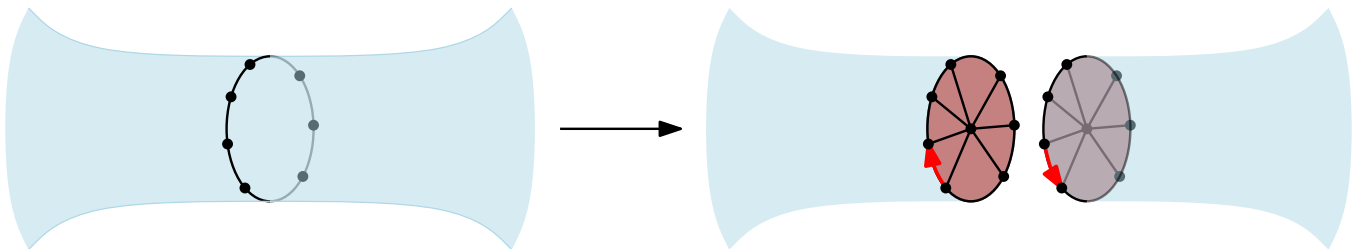
$$M_g(t) \cong \hat{S}_g(t) \cong S_g(t) = c_g(1-\rho_S^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1}\left(1+O\left((1-\rho_S^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

Contrôle de l'edgewidth

Proposition

Soit M une carte cubique et M^* sa triangulation duale, alors $\mathrm{fw}(M) = \mathrm{ew}(M)$.

Les triangulations avec une edgewidth constante sont sous-dominante.



Proposition

Pour $g, k \geq 1$, la série $M_g^{\mathrm{fw}\geq k}(t)$ comporte le même que $M_g(t)$:

$$M_g^{\mathrm{fw}\geq k}(t) = c_g(1-\rho_S^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1}\left(1+O\left((1-\rho_S^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

Les séries des graphes

Introduisons les variables :

- x : nombre de sommets ;
- y : nombre d'arêtes simples ;
- z : nombre d'arêtes doubles ;
- w : nombre de boucles.

On définit les séries exp des graphes cubiques plongeables dans $\mathbb{S}_g$:

- $C_g(x, y, z, w)$: graphes cubiques connexes ;
- $B_g(x, y, z)$: graphes cubiques bi-connexes ;
- $D_g(x, y)$: graphes cubiques *drei*-connexes (3-connexes).

Leurs variantes $F(v)$ sont définies par

$$F(v) = F\left(v^{1/4}, v^{1/6}, \frac{v^{1/3}}{2}, \frac{v^{1/6}}{2}\right).$$

v : nombre de sommets / 2

De cartes aux graphes

Robertson-Vitray :
graphe G 3-conn plongeable dans $\mathbb{S}_g$ avec $\mathrm{fw}(G) \geq 2g+3$
$=$ carte en genre g avec racine oubliée

Or, $M_g(t) \cong M_g^{\mathrm{fw}\geq 2g+3}(t)$ asymptotiquement.

Donc

$$D_g(v) \cong \frac{1}{2} \int_0^{v^{1/3}} t^{-1} M_g(t) dt.$$

On connaît alors le comportement asymptotique de $D_g(v)$.

Sous le tapis : Δ-analytique

Décomposition par connexité

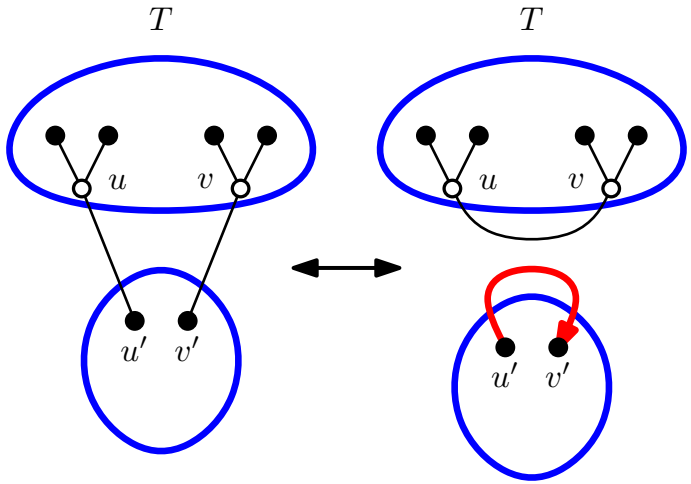
Proposition (Robertson-Vitray 1990)

Soit $g > 0$ et G un graphe connexe plongeable dans $\mathbb{S}_g$.

1. *Si G est 2-conn avec $\mathrm{fw}_g(G) \geq 3$,*
   alors $G =$ une comp. 3-conn non-planaire portant le genre et la facewidth + des autres comp. planaires.
2. *Si G est conn avec $\mathrm{fw}_g(G) \geq 2$,*
   alors $G =$ une comp. 2-conn non-planaire portant le genre et la facewidth + des autres comp. planaires.

De 3-connexe à 2-connexe

Prenons l'unique composante 3-connexe portant le genre



Un **réseau** est un graphe cubique planaire 2-connexe enraciné. Notons $N^\circ(x, y, z)$ sa série exponentielle.

Un graphe cubique 2-connexe avec facewidth $\geq 3 \cong$ Un graphe cubique 3-connexe avec un réseau sur chaque arête

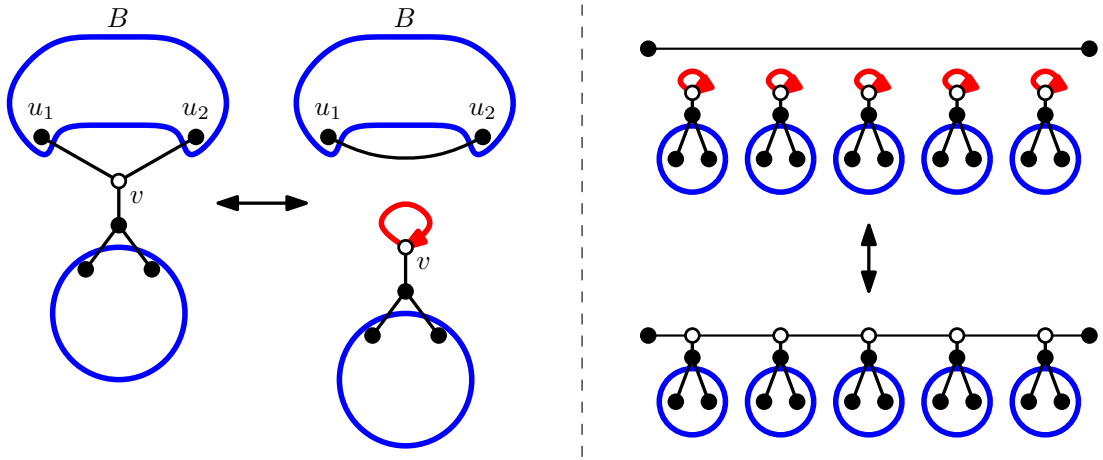
Proposition

On a $B_g^{\mathrm{fw}\geq 3}(x, y, z) \cong D^{\mathrm{fw}\geq 3}(x, \bar{y})$, *où* $\bar{y} = y(1 + N^\circ(x, y, z))$.

Sous le tapis : un graphe peut être compté plusieurs fois

De 2-connexe à connexe

Prenons l'unique composante 2-connexe portant le genre



Q : série des graphes cubiques planaires avec une boucle marquée

Proposition

$$C_g^{\mathrm{fw}\geq 2}(x,y,z,w) \cong B^{\mathrm{fw}\geq 2}(x,\bar{y},\bar{z}),$$

où

$$\bar{y} = \frac{y}{1-Q(x,y,z,w)}, \quad \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1-Q(x,y,z,w)}\right)^2 - \frac{y^2}{2} + z.$$

Un système ...

La série $Q(x, y, z, w)$ satisfait le système suivant :

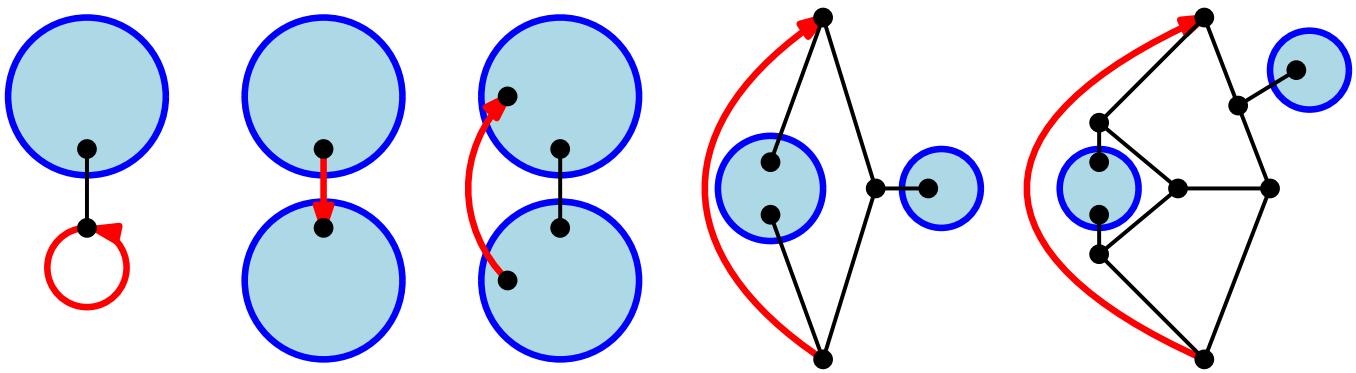
$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{x^2y^3}{2}(A + \overline{Q}) + \frac{Q^2}{2} + x^2y^2w, \\
A &= Q + S + P + H, \\
S &= \frac{A^2}{A+1}, \\
P &= \frac{x^2y^3}{2}A^2 + x^2y^3A + x^2yz, \\
2(1+A)H &= U(1-2U) - U(1-U)^3, \\
x^2y^3A^3 &= U(1-U)^3,
\end{aligned}
$$

avec A, S, P, H, U des série en x, y, z, w. $\overline{Q}$ est une facteur des poids.

La série $N^\circ(x, y, z)$ satisfait un système beaucoup plus simple.

... basé sur une décomposition

Variant de Bodirsky–Kang–Löffler–McDiarmid (2006) :



On sait tout calculer en asymptotique ($D \to B \to C$).

Asymptotique

Proposition

Pour tout $g \geq 1$, la singularité dominante de $C_g(v)$ est $\rho = \frac{54}{79^{3/2}}$. De plus,

$$C_1(v) \cong c_1 \log(1 - \rho^{-1}v) + O\left((1 - \rho^{-1}v)^{1/4}\right),$$

$$C_g(v) \cong c_g(1 - \rho^{-1}v)^{-5(g-1)/2}\left(1 + O\left((1 - \rho^{-1}v)^{1/4}\right)\right), \ \forall g \geq 2.$$

les graphes généraux en genre $g \cong$ les graphes connexes en genre g.

Version nombre par le théorème de transfert.

Conclusion

- Étude probabiliste : Kang, Moßhammer, Sprüssel (2018+)
  - Émergence de composante géante à $n/2 + O(n^{2/3})$ arêtes
  - Atténuation de composante géante à $n + O(n^{5/3})$ arêtes
  - Évolutions précises
- Énumération de sous-structure en modifiant les grammaires ?

Merci de votre attention !