

# Automate pour les récurrentes à gauche du modèle du tas de sable sur les bandes $\mathbb{Z} \times [1, H]$

Henri Derycke

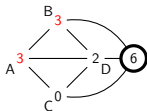
LaBRI

Journées ALEA - 16 mars 2018



université  
de **BORDEAUX**

# Le modèle du tas de sable

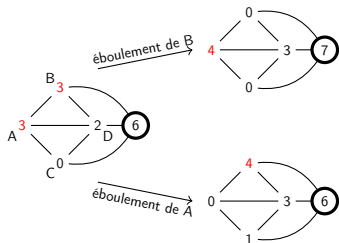


## Définition du tas de sable

$G = (V, E)$  simple connexe avec un sommet distingué appelé *puits*

- ▶ Configuration : distribution  $u : V \rightarrow \mathbf{N}$  de grains sur les sommets
- ▶ Un sommet est *instable* s'il a au moins autant de grains que de voisins
- ▶ Éboulement : un sommet donne un grain à chaque voisin
- ▶ Stabilisation : Tant qu'il existe un sommet instable, l'ébouler. On note le résultat  $u \mapsto \text{stab}(u)$

# Le modèle du tas de sable

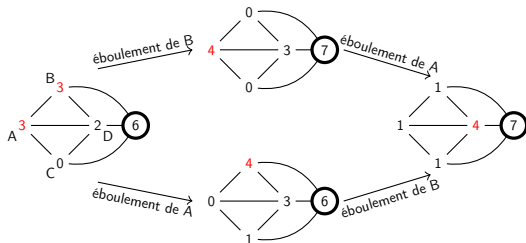


## Définition du tas de sable

$G = (V, E)$  simple connexe avec un sommet distingué appelé *puits*

- ▶ Configuration : distribution  $u : V \rightarrow \mathbf{N}$  de grains sur les sommets
- ▶ Un sommet est *instable* s'il a au moins autant de grains que de voisins
- ▶ Éboulement : un sommet donne un grain à chaque voisin
- ▶ Stabilisation : Tant qu'il existe un sommet instable, l'ébouler. On note le résultat  $u \mapsto \text{stab}(u)$

# Le modèle du tas de sable

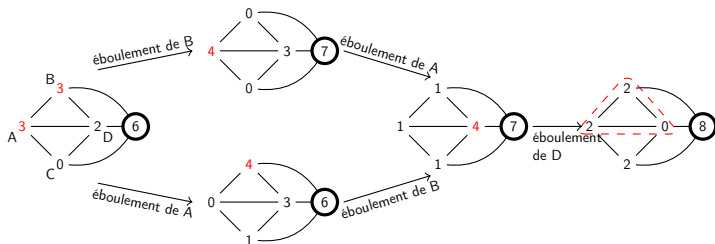


## Définition du tas de sable

$G = (V, E)$  simple connexe avec un sommet distingué appelé *puits*

- ▶ Configuration : distribution  $u : V \rightarrow \mathbf{N}$  de grains sur les sommets
- ▶ Un sommet est *instable* s'il a au moins autant de grains que de voisins
- ▶ Éboulement : un sommet donne un grain à chaque voisin
- ▶ Stabilisation : Tant qu'il existe un sommet instable, l'ébouler. On note le résultat  $u \mapsto \text{stab}(u)$

# Le modèle du tas de sable



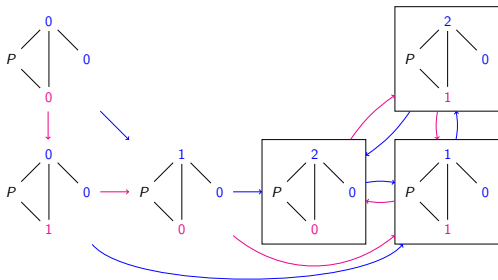
## Définition du tas de sable

$G = (V, E)$  simple connexe avec un sommet distingué appelé *puits*

- ▶ Configuration : distribution  $u : V \rightarrow \mathbf{N}$  de grains sur les sommets
- ▶ Un sommet est *instable* s'il a au moins autant de grains que de voisins
- ▶ Éboulement : un sommet donne un grain à chaque voisin
- ▶ Stabilisation : Tant qu'il existe un sommet instable, l'ébouler. On note le résultat  $u \mapsto \text{stab}(u)$

# Chaîne de Markov pour $G = (V, E)$

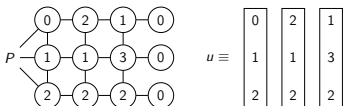
- ▶ État : configuration stable de  $G$
- ▶ Transition : prendre un grain du puits, l'ajouter à un sommet aléatoire (uniforme) puis stabiliser



- ▶ Les configurations récurrentes sont les états récurrents
- ▶ Mesure stationnaire uniforme sur les états récurrents

**Critère de Dhar** Une configuration stable est récurrente ssi ajouter un grain à chaque voisin du puits puis stabiliser aboutit à la même configuration.

# Cas des facteurs de récurrentes gauches

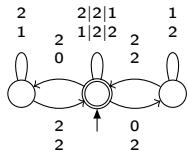


Une configuration  $u$  peut être vue comme un mot de taille  $W$  sur l'alphabet des colonnes.

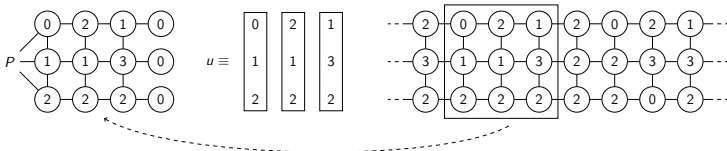
Járai, Lyons 07

Les configurations récurrentes sur les rectangles enracinés à gauche sont reconnues par un automate fini sur les colonnes.

Dans le cas de la hauteur 2, ils obtiennent l'automate suivant.



# Cas des facteurs de récurrentes gauches

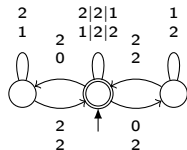


Une configuration  $u$  peut être vue comme un mot de taille  $W$  sur l'alphabet des colonnes.

Járai, Lyons 07

Les configurations récurrentes sur les rectangles enracinés à gauche sont reconnues par un automate fini sur les colonnes.

Dans le cas de la hauteur 2, ils obtiennent l'automate suivant.





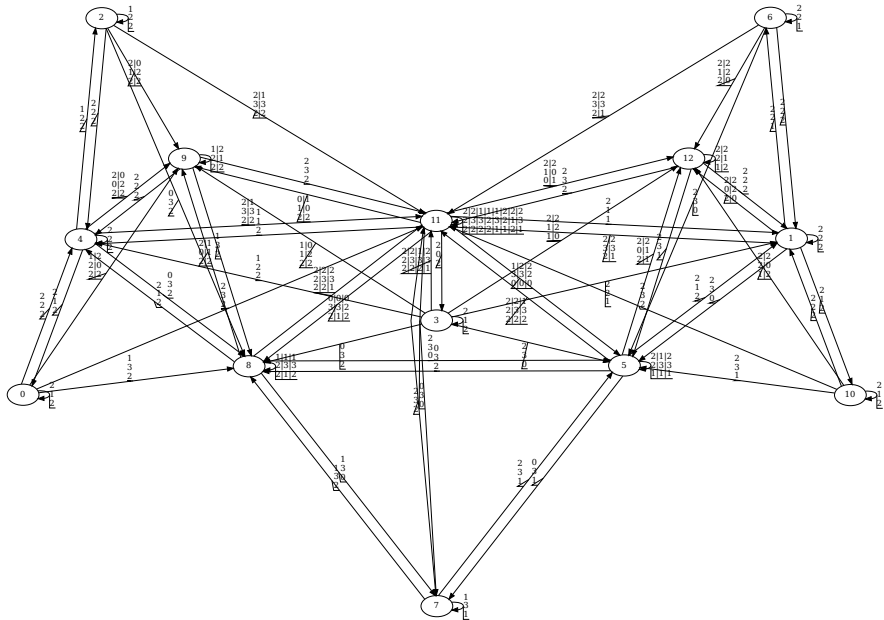
D'après Járai et Lyons, le nombre d'états nécessaires est borné par  $(2^H)^{2^H}$ .

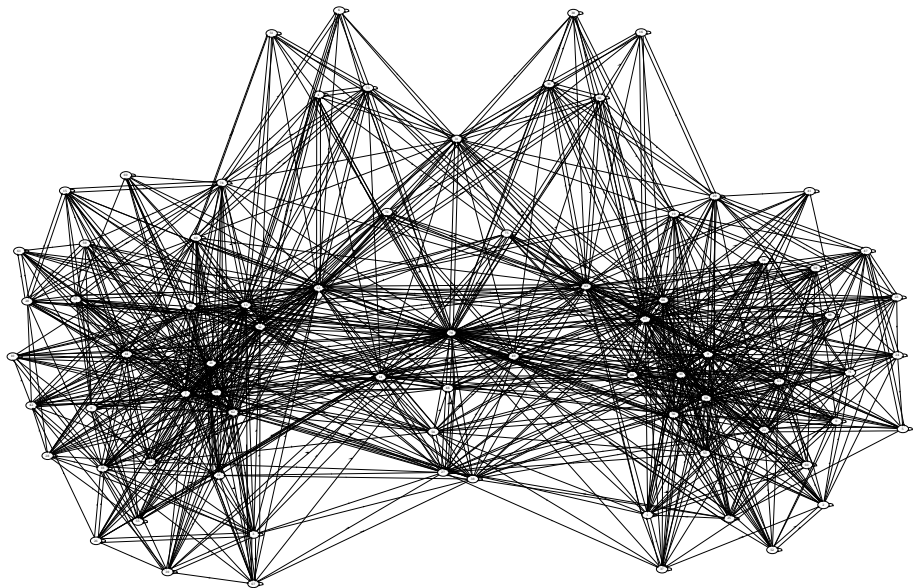
**Conjecture de Gamlin (Thèse 2015)**  $\exp cH$  états pourraient suffire.

Similaire aux arbres couvrants (eg. pavage par dominos) mais optimiste sur la transformation non locale aux configurations récurrentes.

## Mes résultats

- ▶ Construction algorithmique d'un automate.
- ▶ Entre  $\alpha^H$  et  $\beta^{H \log H}$  états dans cet automate.
- ▶ (La borne inférieure provient d'un sous-ensemble d'états en bijection avec les permutations séparables.)
- ▶ Automates explicites pour les hauteurs 3 et 4





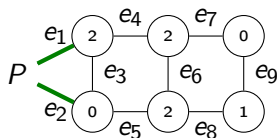
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2, e_7, e_8, v_6, e_9, v_5$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

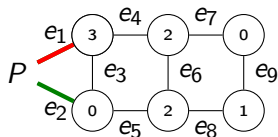
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1$ ,



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

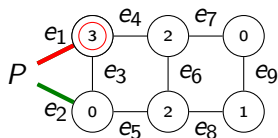
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1$ ,



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

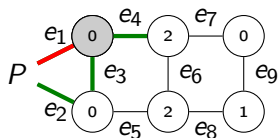
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

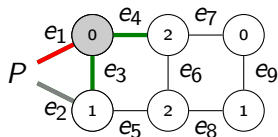
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.



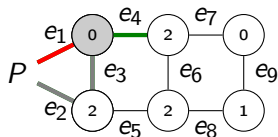
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

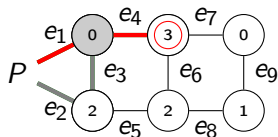
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

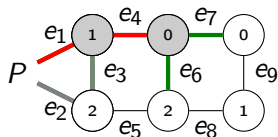
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

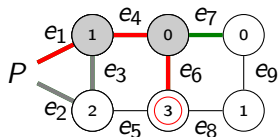
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

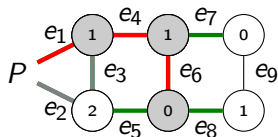
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

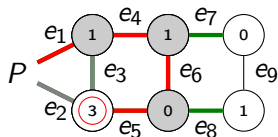
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

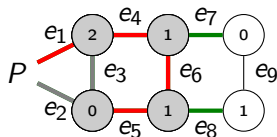
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

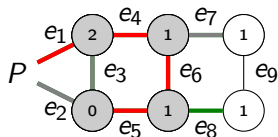
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2, e_7,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.



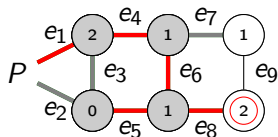
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2, e_7, e_8,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

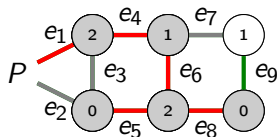
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2, e_7, e_8, v_6,$



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

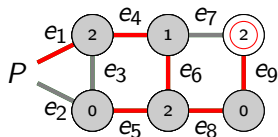
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2, e_7, e_8, v_6, e_9$ ,



Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'ébouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.

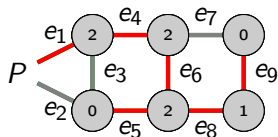
# Bijections avec les arbres couvrants

Plusieurs bijections : Dhar/Majumdar 92, Cori/Le Borgne 03, Bernardi 06...

On se fixe un ordre sur les arêtes, ici, de gauche à droite et de haut en bas.

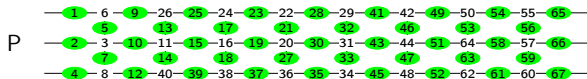
**Bijection CLB** : (ici partant d'une configuration récurrente)

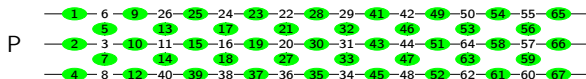
Ordre de parcours :  $e_1, v_1, e_2, e_3, e_4, v_3, e_6, v_4, e_5, v_2, e_7, e_8, v_6, e_9, v_5$



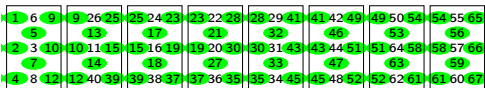
Ajouter les arêtes incidentes au puits aux arêtes pendantes.  
 Tant qu'il y a une arête pendante  
 Prendre la plus petite arête pendante  
 Faire arriver le(s) grain(s)  
 Si le sommet est instable, l'écrouler et ajouter ses  
 arêtes incidentes non traitées aux arêtes pendantes.

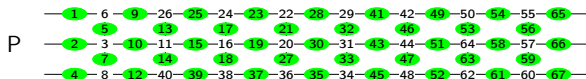
- ▶ L'arbre couvrant est codé par les arêtes (rouges) qui précèdent les sommets dans le parcours arêtes-sommets.
- ▶ Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet traitées après ce dernier est égale au nombre de grains dans la configuration récurrente.



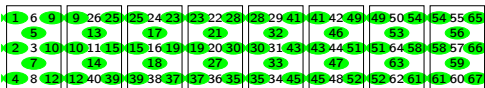


- Décomposition



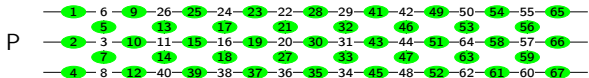


- Décomposition

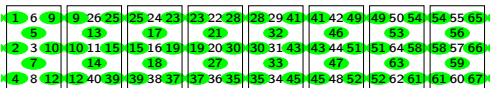


- Normalisation





- Décomposition



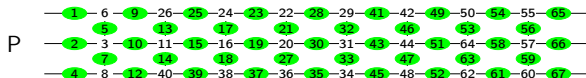
- Normalisation



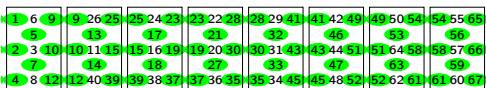
## Proposition

Les ordres de parcours sommets-arêtes sont en bijection avec leurs décompositions normalisées (en ordres *induits*).

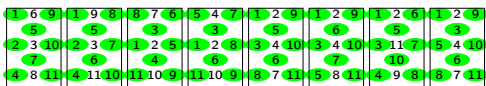




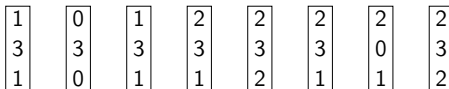
- Décomposition



- Normalisation



- Extraction de la configuration



## Proposition

Les ordres de parcours sommets-arêtes sont en bijection avec leurs décompositions normalisées (en ordres *induits*).



Une décomposition est un mot sur l'alphabet des ordres induits.

- $e_1$   $v_1$   $e_6$  ▶ Ordre induit initial :  $e_1(v_1?)e_2(v_2?)e_3(v_3?)\dots$
- $e_4$  ▶ Suite d'ordres induits compatibles par paire d'ordres  $(o, o')$  successifs  $T(o, o')$
- $e_2$   $v_2$   $e_7$
- $e_5$
- $e_3$   $v_3$   $e_8$  ▶ Ordre induit final :  $\dots e_6 e_7 e_8$

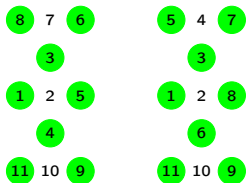
Automate sur les ordres induits

- ▶ États : les ordres induits
- ▶ Alphabet : les ordres induits
- ▶ Transition :  $o \xrightarrow{o'} o'$  ssi  $o'$  est compatible à droite avec  $o$

**Prop**  $\# \text{états} \leq (4H - 1)!$

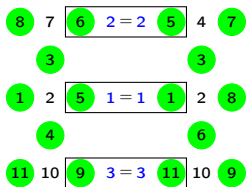
Donne directement un automate sur les configurations récurrentes

# Relation de compatibilité



## Conditions nécessaires

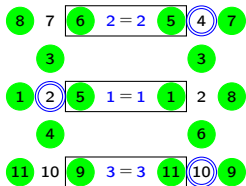
# Relation de compatibilité



## Conditions nécessaires

- ▶ ordres des arêtes communes identiques

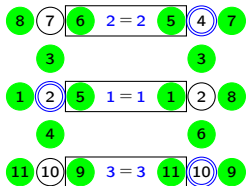
# Relation de compatibilité



## Conditions nécessaires

- ▶ ordres des arêtes communes identiques
- ▶ horizontale pas avant les extrémités

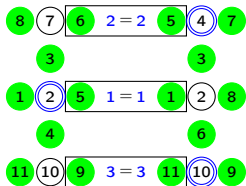
# Relation de compatibilité



## Conditions nécessaires

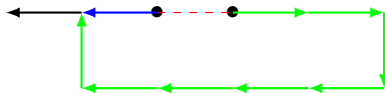
- ▶ ordres des arêtes communes identiques
- ▶ horizontale pas avant les extrémités
- ▶ horizontale pas après les deux extrémités : l'arête maximale de tout cycle est verticale

# Relation de compatibilité

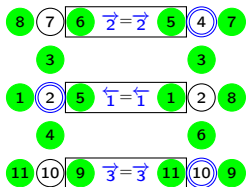


## Conditions nécessaires

- ▶ ordres des arêtes communes identiques
- ▶ horizontale pas avant les extrémités
- ▶ horizontale pas après les deux extrémités : l'arête maximale de tout cycle est verticale

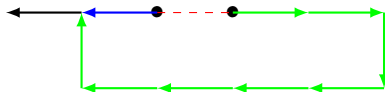


# Relation de compatibilité



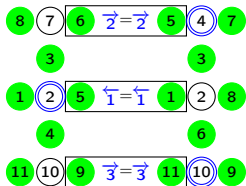
## Conditions nécessaires

- ▶ ordres des arêtes communes identiques
- ▶ horizontale pas avant les extrémités
- ▶ horizontale pas après les deux extrémités : l'arête maximale de tout cycle est verticale





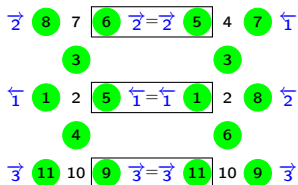
# Relation de compatibilité



## Conditions nécessaires et suffisantes

- ▶ ordres des arêtes communes identiques
- ▶ horizontale pas avant les extrémités
- ▶ horizontale pas après les deux extrémités : l'arête maximale de tout cycle est verticale

# Relation de compatibilité



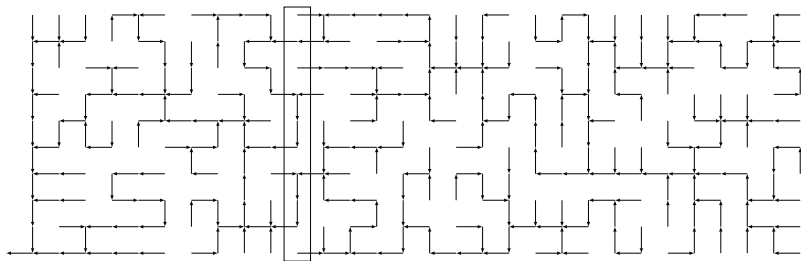
## Conditions nécessaires et suffisantes

- ▶ ordres des arêtes communes identiques
- ▶ horizontale pas avant les extrémités
- ▶ horizontale pas après les deux extrémités : l'arête maximale de tout cycle est verticale

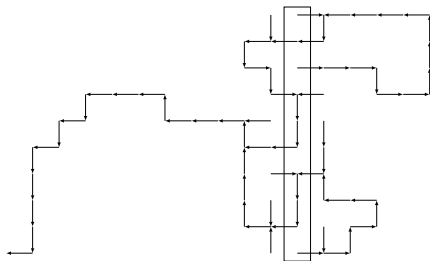
Simplification des états : permutations et orientations des arêtes droites

- ▶  $\# \text{états} \leq 2^H \cdot H!$
- ▶ les transitions sont les ordres induits

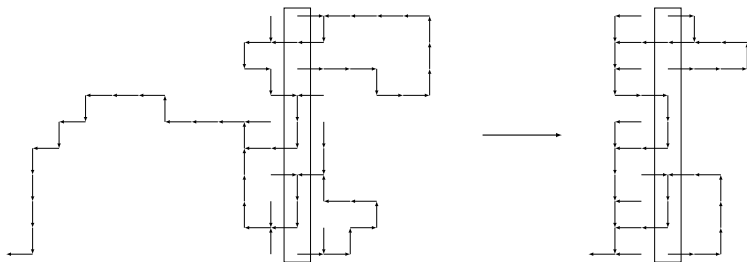
**Proposition** Tout ordre induit apparaît dans la décomposition normalisée d'une configuration récurrente de  $[1, W] \times [1, H]$  pour  $W = 2H + 1$



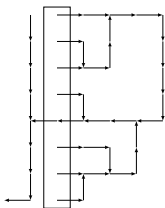
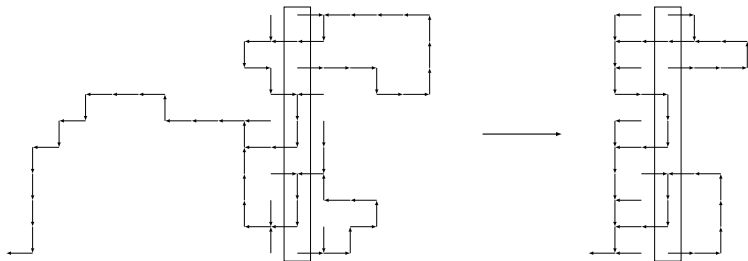
**Proposition** Tout ordre induit apparaît dans la décomposition normalisée d'une configuration récurrente de  $[1, W] \times [1, H]$  pour  $W = 2H + 1$



**Proposition** Tout ordre induit apparaît dans la décomposition normalisée d'une configuration récurrente de  $[1, W] \times [1, H]$  pour  $W = 2H + 1$



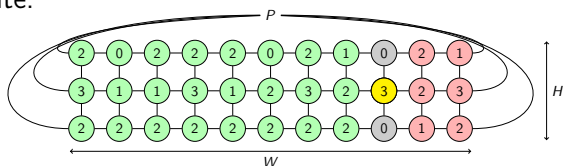
**Proposition** Tout ordre induit apparaît dans la décomposition normalisée d'une configuration récurrente de  $[1, W] \times [1, H]$  pour  $W = 2H + 1$



- ▶ Ordre des arêtes droites : 5, 4, 7, 8, 6, 1, 3, 2
- ▶ Arbres binaires  $\Rightarrow$  Permutations séparables (motifs 2413 et 3142 interdits)
- ▶ Borne inférieure exponentielle sur le nombre d'états

# Vers la bande (Járai, Lyons 07)

Approximation de  $\mathbf{Z} \times [1, H]$  par des rectangles enracinés au puits à gauche et à droite.



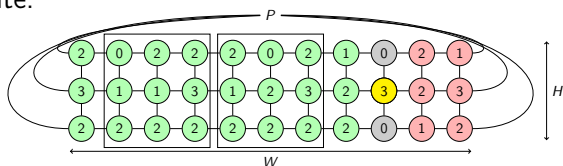
- ▶ sommets qui s'éboulent par la gauche (vert et jaune)
- ▶ sommets qui s'éboulent par la droite (rouge et jaune)
- ▶ les autres

Une configuration récurrente à gauche est une configuration verte et jaune.  
Découpage en blocs récurrents à gauche.

Automate sur un alphabet plus riche que les colonnes  $\Rightarrow$  Mesure de Parry  $\Rightarrow$   
Mesure uniforme sur les configurations récurrentes à gauche de  $\mathbf{Z} \times [1, H]$

# Vers la bande (Járai, Lyons 07)

Approximation de  $\mathbf{Z} \times [1, H]$  par des rectangles enracinés au puits à gauche et à droite.



- ▶ sommets qui s'éboulent par la gauche (vert et jaune)
- ▶ sommets qui s'éboulent par la droite (rouge et jaune)
- ▶ les autres

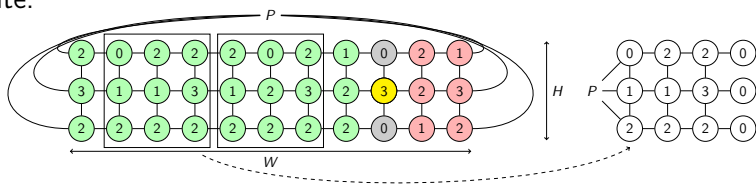
Une configuration récurrente à gauche est une configuration verte et jaune.  
Découpage en blocs récurrents à gauche.

Automate sur un alphabet plus riche que les colonnes  $\Rightarrow$  Mesure de Parry  $\Rightarrow$   
Mesure uniforme sur les configurations récurrentes à gauche de  $\mathbf{Z} \times [1, H]$



# Vers la bande (Járai, Lyons 07)

Approximation de  $\mathbf{Z} \times [1, H]$  par des rectangles enracinés au puits à gauche et à droite.



- ▶ sommets qui s'éboulent par la gauche (vert et jaune)
- ▶ sommets qui s'éboulent par la droite (rouge et jaune)
- ▶ les autres

Une configuration récurrente à gauche est une configuration verte et jaune.  
Découpage en blocs récurrents à gauche.

Automate sur un alphabet plus riche que les colonnes  $\Rightarrow$  Mesure de Parry  $\Rightarrow$   
Mesure uniforme sur les configurations récurrentes à gauche de  $\mathbf{Z} \times [1, H]$

MERCI

