

Vérification probabiliste Numérique ou statistique ?

Claudine Picaronny

LSV, ENS Cachan-Paris-Saclay & CNRS & INRIA

21 Mars 2017

Plan

- 1 Vérification formelle
- 2 Vérification probabiliste
- 3 Le cas des événements rares
- 4 Conclusion

Plan

1 Vérification formelle

2 Vérification probabiliste

- Model checking stochastique
- Model checking numérique/Model checking statistique

3 Le cas des événements rares

- Problématique
- État de l'art
- Réduction à variance garantie
- Méthode
- Autres domaines d'application de la méthode
- Expérimentation avec l'outil Cosmos
- Implémentation de la méthode
- Exemples

4 Conclusion

Problématique



Problématique

Problématique

- Réponse oui/non

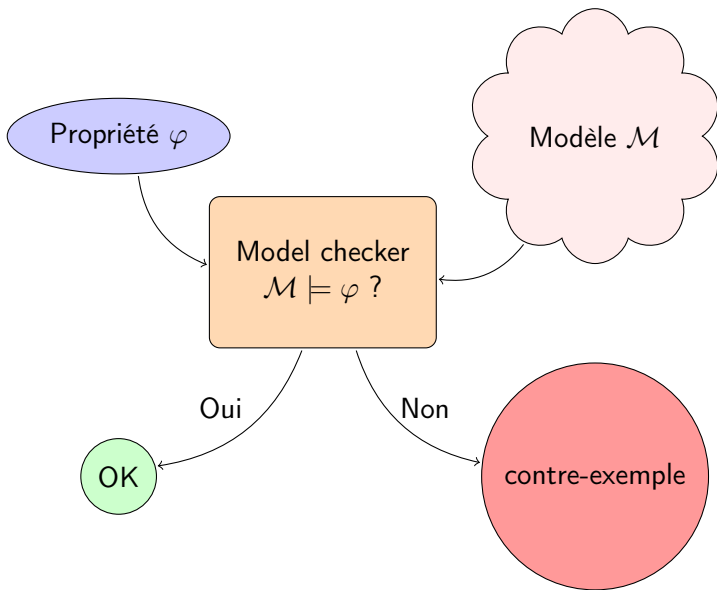
Problématique

- Réponse oui/non
- Vérification d'un système en regard du comportement souhaité

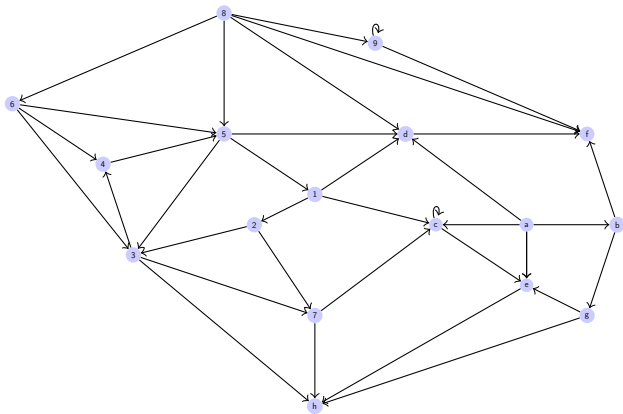
Problématique

- Réponse oui/non
- Vérification d'un système en regard du comportement souhaité
- Procédé automatique

Model checking



Modèles : système de transitions



Modèles :

Modèles :

- Modèle mathématique (abstrait) : système de transitions

Modèles :

- Modèle mathématique (abstrait) : système de transitions
- Représentation finie de l'ensemble des états (abstraction)

Modèles :

- Modèle mathématique (abstrait) : système de transitions
- Représentation finie de l'ensemble des états (abstraction)
- Exploration exhaustive

Modèles :

- Modèle mathématique (abstrait) : système de transitions
- Représentation finie de l'ensemble des états (abstraction)
- Exploration exhaustive

Par exemple

Automates finis, réseaux de Petri ...

Propriétés logiques

Propriétés logiques

- LTL (Linear time logic)

Propriétés logiques

- LTL (Linear time logic)
- CTL (Computation tree logic)

Propriétés logiques

- LTL (Linear time logic)
- CTL (Computation tree logic)
- CTL* ...

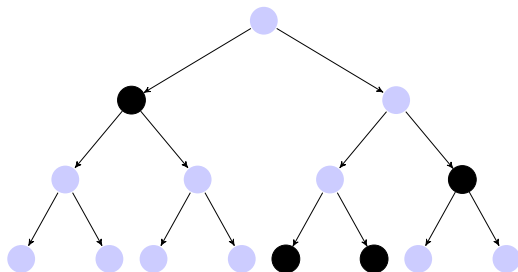
Propriétés logiques

- LTL (Linear time logic)
- CTL (Computation tree logic)
- CTL* ...

CTL

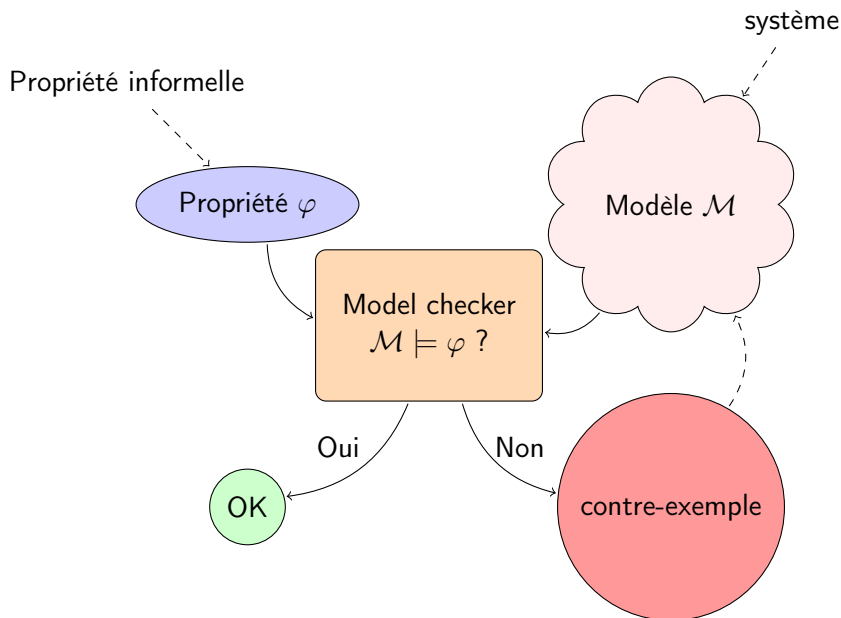
$$\top \mid \perp \mid p \mid \neg \varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi$$
$$AX\varphi \mid EX\varphi \mid AF\varphi \mid EF\varphi \mid AG\varphi \mid EG\varphi \mid A[\varphi U \psi] \mid E[\varphi U \psi]$$

Propriétés logiques

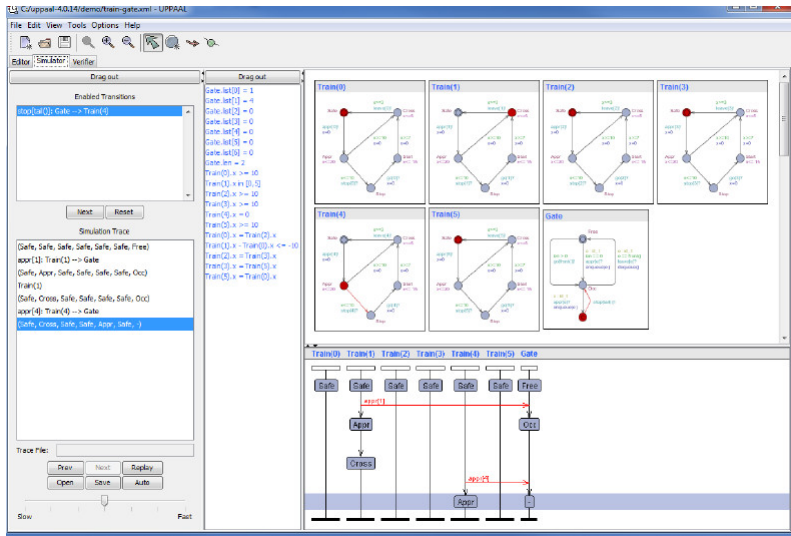


AF noir

Model checking : outil de débogage



Outils



Plan

1 Vérification formelle

2 Vérification probabiliste

- Model checking stochastique
- Model checking numérique/Model checking statistique

3 Le cas des événements rares

- Problématique
- État de l'art
- Réduction à variance garantie
- Méthode
- Autres domaines d'application de la méthode
- Expérimentation avec l'outil Cosmos
- Implémentation de la méthode
- Exemples

4 Conclusion

Motivation

Motivation

- Probabilités inhérentes au système

Motivation

- Probabilités inhérentes au système
 - ▶ Garantir l'équité dans les systèmes distribués

Motivation

- Probabilités inhérentes au système
 - ▶ Garantir l'équité dans les systèmes distribués
 - ▶ Eviter des collisions dans les protocoles de communication

- Probabilités inhérentes au système
 - ▶ Garantir l'équité dans les systèmes distribués
 - ▶ Eviter des collisions dans les protocoles de communication
 - ▶ Garantir la fraîcheur dans les protocoles cryptographiques

Motivation

- Probabilités inhérentes au système
 - ▶ Garantir l'équité dans les systèmes distribués
 - ▶ Eviter des collisions dans les protocoles de communication
 - ▶ Garantir la fraîcheur dans les protocoles cryptographiques
- Evaluation de performances (quantitative)

Motivation

- Probabilités inhérentes au système
 - ▶ Garantir l'équité dans les systèmes distribués
 - ▶ Eviter des collisions dans les protocoles de communication
 - ▶ Garantir la fraîcheur dans les protocoles cryptographiques
- Evaluation de performances (quantitative)
- Modéliser l'interaction avec l'environnement

Modèle mathématique

- chaîne de Markov discrète (DTMC)

Modèle mathématique

- chaîne de Markov discrète (DTMC)
- processus de décision markovien (PDM)

Modèle mathématique

- chaîne de Markov discrète (DTMC)
- processus de décision markovien (PDM)
- chaîne de Markov continue (CTMC)

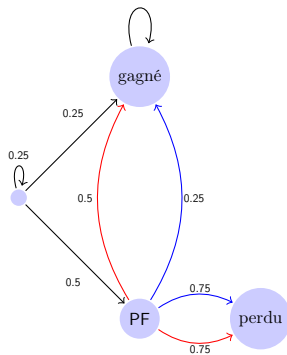
Modèle mathématique

- chaîne de Markov discrète (DTMC)
- processus de décision markovien (PDM)
- chaîne de Markov continue (CTMC)

Par exemple

Automates probabilistes finis, réseaux de Petri stochastiques...

Processus de décision markovien



Par exemple,

L'algorithme termine avec probabilité 1

Après un envoi, la probabilité que le message soit reçu en au plus 30 secondes est ≥ 0.97

Quelle est la probabilité que le message soit reçu en au plus 30 secondes ?

Par exemple,

L'algorithme termine avec probabilité 1

Après un envoi, la probabilité que le message soit reçu en au plus 30 secondes est ≥ 0.97

Quelle est la probabilité que le message soit reçu en au plus 30 secondes ?

Ajout d'un opérateur P

$$P_{\geq 1}(F(\text{terminaison}))$$

$$\text{sent} \Rightarrow P_{\geq 0.97}(F^{\leq 30}(\text{reception}))$$

$$P_?(F^{\leq 30}(\text{reception}))$$

Logiques

Par exemple,

L'algorithme termine avec probabilité 1

Après un envoi, la probabilité que le message soit reçu en au plus 30 secondes est ≥ 0.97

Quelle est la probabilité que le message soit reçu en au plus 30 secondes ?

Ajout d'un opérateur P

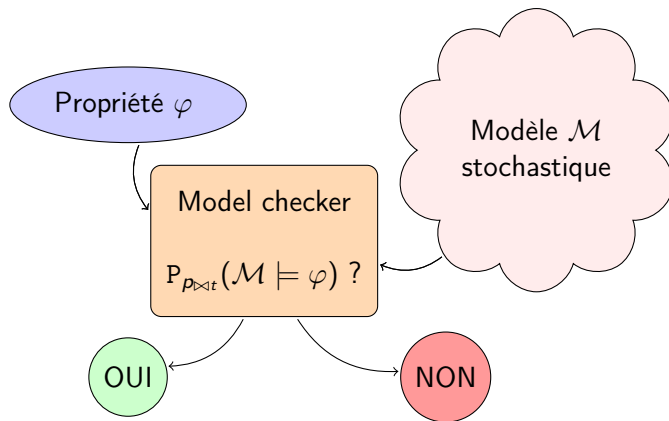
$$P_{\geq 1}(F(\text{terminaison}))$$

$$\text{sent} \Rightarrow P_{\geq 0.97}(F^{\leq 30}(\text{reception}))$$

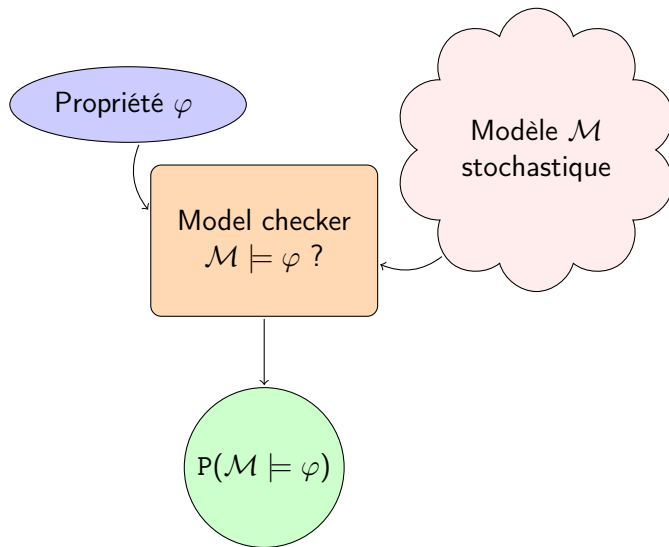
$$P_?(F^{\leq 30}(\text{reception}))$$

PCTL, PCTL*, HASL,...

Model checking probabiliste



Model checking probabiliste



Coûts ou récompenses

Ajout d'un coût à chaque transition

temps, prix, consommation d'énergie,

Ajout d'un coût à chaque transition

Chaque exécution a une probabilité et un coût

Coûts ou récompenses

Ajout d'un coût à chaque transition

temps, prix, consommation d'énergie,

Ajout d'un coût à chaque transition

Chaque exécution a une probabilité et un coût

Ajout d'un coût à chaque transition

Calcul de coût moyen, de coût moyen minimal (ou de récompense moyenne maximale)

Model checking numérique/Model checking statistique

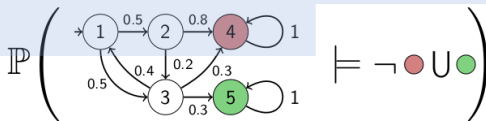
On veut calculer la probabilité qu'une trajectoire soit valide dans un système probabiliste.

Model checking numérique

Les calculs des probabilités ou espérances reposent sur des résolutions de systèmes linéaires (ou optimisation linéaire). Aux erreurs dues au calcul numérique, on obtient une valeur "exacte".

Model checking statistique

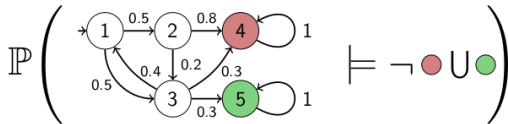
On estime les probabilités par la méthode de Monte-Carlo. On obtient un intervalle de confiance.



Numerical Model Checking

$$\begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0 & -1 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \\
 x_1 = 0.2368$$



Statistical Model Checking

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ✖
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ ✔
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ✖
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ✖
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ ✔
 ...

$\Downarrow$
 $x_1 \in [0.19, 0.26]$

Bilan

- Approche numérique (basée sur la logique CTL):
 - ▶ Résultat précis
 - ▶ Implémenté efficacement pour une grande variété de modèles et de logiques (PRISM, MRMC, GreatSPN)
 - ▶ Consommation de mémoire proportionnelle au nombre de transitions du système
 - ▶ Fortes hypothèses sur les modèles.

- Approche numérique (basée sur la logique CTL):
 - ▶ Résultat précis
 - ▶ Implémenté efficacement pour une grande variété de modèles et de logiques (PRISM, MRMC, GreatSPN)
 - ▶ Consommation de mémoire proportionnelle au nombre de transitions du système
 - ▶ Fortes hypothèses sur les modèles.
- Approche statistique (basée sur la logique LTL):
 - ▶ Espace mémoire nécessaire très faible
 - ▶ Adapté à la programmation parallèle
 - ▶ Hypothèses plus faibles sur les modèles.
 - ▶ Ne calcule qu'un encadrement probabiliste du résultat
 - ▶ Inefficace pour de très faibles probabilités
⇒ Nécessite de recourir à l'accélération d'évènements rares

Plan

- 1 Vérification formelle
- 2 Vérification probabiliste
 - Model checking stochastique
 - Model checking numérique/Model checking statistique
- 3 Le cas des événements rares
 - Problématique
 - État de l'art
 - Réduction à variance garantie
 - Méthode
 - Autres domaines d'application de la méthode
 - Expérimentation avec l'outil Cosmos
 - Implémentation de la méthode
 - Exemples
- 4 Conclusion

Problématique des événements rares

- Système critique
- Composants possiblement défaillants
- Défaillances analysées dans un modèle probabiliste
- La probabilité de la défaillance du système doit être extrêmement petite.

Problématique des événements rares

- On souhaite estimer un événement rare e dont la probabilité est de l'ordre de 10^{-15} .

Problématique des événements rares

- On souhaite estimer un événement rare e dont la probabilité est de l'ordre de 10^{-15} .
- On simule 10^9 trajectoires.

Problématique des événements rares

- On souhaite estimer un événement rare e dont la probabilité est de l'ordre de 10^{-15} .
- On simule 10^9 trajectoires.
- On fixe le niveau de confiance à 0.99.

Problématique des événements rares

- On souhaite estimer un événement rare e dont la probabilité est de l'ordre de 10^{-15} .
- On simule 10^9 trajectoires.
- On fixe le niveau de confiance à 0.99.
- On peut observer :
 - ▶ Aucune trajectoire n'atteint e (avec la probabilité $\approx 1 - 10^{-6}$)
L'intervalle de confiance obtenu avec cette observation est:
 $[0; 7.03 \cdot 10^{-9}]$
 - ▶ Une trajectoire atteint e (avec la probabilité $\leq 10^{-6}$)
L'intervalle de confiance obtenu avec cette observation est:
 $[6.83 \cdot 10^{-9}; 1.69 \cdot 10^{-8}]$
 - ▶ Plusieurs trajectoires atteignent e
L'intervalle de confiance ne contient pas la valeur.

Techniques d'accélération pour le model-checking d'évènements rares

Branchement multi niveaux (splitting)

Idée principale: diviser les trajectoires qui s'approchent de l'objectif. On duplique ou élimine les exécutions engendrées par la simulation selon leur comportement intermédiaire. On introduit un biais qui est ensuite pris en compte dans l'estimation de la probabilité

- Heuristiques (peu de résultats théoriques)
- Dépendance forte du modèle

Techniques d'accélération pour le model-checking d'évènements rares

Branchement multi niveaux (splitting)

Idée principale: diviser les trajectoires qui s'approchent de l'objectif. On duplique ou élimine les exécutions engendrées par la simulation selon leur comportement intermédiaire. On introduit un biais qui est ensuite pris en compte dans l'estimation de la probabilité

- Heuristiques (peu de résultats théoriques)
- Dépendance forte du modèle

Échantillonnage préférentiel (importance sampling)

Idée principale : modifier la distribution. La simulation se fait avec une autre distribution qui permet d'augmenter la probabilité de l'événement observé.

- Résultat optimal théorique.
- Résultats mathématiques pour certaines classes de modèles.

Échantillonnage préférentiel

Échantillonnage préférentiel :

Soit $\mathcal{C} = (S, s_0, \mathbf{P})$ une chaîne de Markov à temps discret avec deux états absorbants s^+ et s^- .

$$p_{s^+} = EV$$

La moyenne pondérée des trajectoires dans la chaîne $\mathcal{C}$ est un estimateur non biaisé de la probabilité d'atteindre s_+ .

Échantillonnage préférentiel

Échantillonnage préférentiel :

Soit $\mathcal{C} = (S, s_0, \mathbf{P})$ une chaîne de Markov à temps discret avec deux états absorbants s^+ et s^- .

$$p_{s^+} = EV$$

La moyenne pondérée des trajectoires dans la chaîne $\mathcal{C}$ est un estimateur non biaisé de la probabilité d'atteindre s_+ .

Propriété

Soit $\mathbf{P}'$ telle que $\mathbf{P}(s, s') > 0 \Rightarrow \mathbf{P}'(s, s') > 0 \vee s = s_-$. On définit une nouvelle variable aléatoire W : on associe à chaque trajectoire

$$s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \dots s_k \rightarrow s_+ \quad \frac{\mathbf{P}(s_0, s_1)}{\mathbf{P}'(s_0, s_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(s_1, s_2)}{\mathbf{P}'(s_1, s_2)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbf{P}(s_k, s_+)}{\mathbf{P}'(s_k, s_+)}.$$

$$p_{s^+} = E(W)$$

Échantillonnage préférentiel optimal

Échantillonnage préférentiel :

Soit $\mathcal{C} = (S, s_0, \mathbf{P})$ une chaîne de Markov à temps discret avec deux états absorbants s^+ et s^- .

Soit $\mathbf{P}'$ telle que $\mathbf{P}(s, s') > 0 \Rightarrow \mathbf{P}'(s, s') > 0 \vee s = s_-$. On définit une nouvelle variable aléatoire W : A chaque trajectoire $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \dots s_k \rightarrow s_+$ on lui associe $\frac{\mathbf{P}(s_0, s_1)}{\mathbf{P}'(s_0, s_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(s_1, s_2)}{\mathbf{P}'(s_1, s_2)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbf{P}(s_k, s_+)}{\mathbf{P}'(s_k, s_+)}.$

$$p_{s^+} = E(W)$$

Échantillonnage préférentiel optimal

Échantillonnage préférentiel :

Soit $\mathcal{C} = (S, s_0, \mathbf{P})$ une chaîne de Markov à temps discret avec deux états absorbants s^+ et s^- .

Soit $\mathbf{P}'$ telle que $\mathbf{P}(s, s') > 0 \Rightarrow \mathbf{P}'(s, s') > 0 \vee s = s_-$. On définit une nouvelle variable aléatoire W : A chaque trajectoire $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \dots s_k \rightarrow s_+$ on lui associe $\frac{\mathbf{P}(s_0, s_1)}{\mathbf{P}'(s_0, s_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(s_1, s_2)}{\mathbf{P}'(s_1, s_2)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbf{P}(s_k, s_+)}{\mathbf{P}'(s_k, s_+)}$.

$$p_{s^+} = E(W)$$

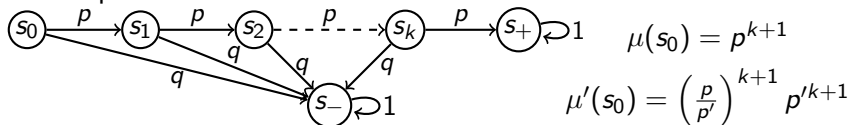
Propriété

Soit $\mu(s)$ la probabilité d'atteindre s_+ à partir de s

Le choix $\mathbf{P}'(s, t) = \frac{\mu(t)}{\mu(s)} \cdot \mathbf{P}(s, t)$ conduit à un estimateur de variance nulle.

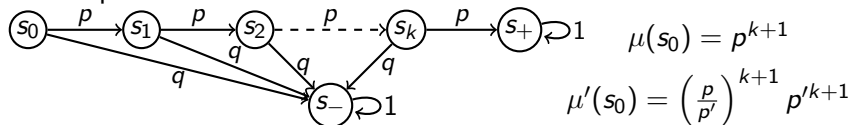
Exemple

- Cas simple:

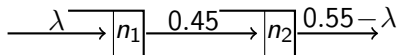


Exemple

- Cas simple:



- Cas plus complexe:

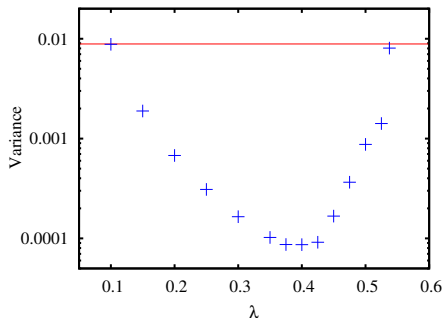


Système d'origine:

$$\lambda = 0.1$$

$$s^+ = \{n_1 + n_2 \geq 5\}$$

$$p_{s^+} = 0.0089$$



État de l'art de l'échantillonnage préférentiel

- Échantillonnage préférentiel optimal pour une classe
(*P. Dupuis, A.D. Sezer, H. Wang 2007*)
- Utilisation d'heuristiques
(*P.E Heegaard, W. Sandmann 2007*)
- Analyse au cas par cas
(*Rubino, Tuffin 2009*)

Ces méthodes fournissent au mieux un intervalle de confiance asymptotique.

Réduction à variance garantie [B. Barbot, S.Haddad, CP]

Model-checking d'événements rares

Cadre pour le traitement (presque) automatique des événements rares

Choix de l'échantillonnage préférentiel

Méthodologie

Réduction à variance garantie [B. Barbot, S.Haddad, CP]

Model-checking d'événements rares

Cadre pour le traitement (presque) automatique des événements rares

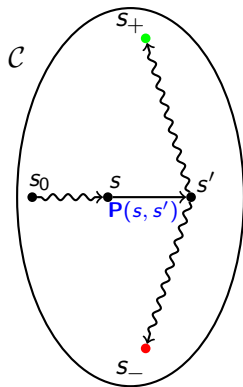
Choix de l'échantillonnage préférentiel

Méthodologie

Implémentation

dans l'outil de model-checking statistique COSMOS [Barbot]

Formalisation



Soit $\mathcal{C}$ la chaîne de Markov
avec ses deux états absorbants s_- , s_+

Si $\sigma = s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_{\pm}$
est une trajectoire $\mathcal{C}$

$$V_s = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma \text{ ends in state } s_+ \\ 0 & \text{if } \sigma \text{ ends in state } s_- \end{cases}$$

Objectif:

Estimer $\Pr(\sigma \text{ atteint } s_+) = \mathbf{E}(V_{s_0})$

Echantillonnage préférentiel optimal

Théorème

Il existe un échantillage préférentiel de variance nulle

Soit $\mu(s) = \mathbf{E}(V_s)$ pour tout état s

Soit $\mathbf{P}'$ défini par $\mathbf{P}'(s, t) = \frac{\mu(t)}{\mu(s)} \cdot \mathbf{P}(s, t)$

$$W_s = \frac{\mathbf{P}(s, s_1)}{\mathbf{P}'(s, s_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(s_1, s_2)}{\mathbf{P}'(s_1, s_2)} \cdots \frac{\mathbf{P}(s_k, s_+)}{\mathbf{P}'(s_k, s_+)} = \frac{\mu(s)}{\mu(s_1)} \cdot \frac{\mu(s_1)}{\mu(s_2)} \cdots \frac{\mu(s_k)}{1} = \mu(s)$$

Donc $\mathbf{V}(W_s) = 0$

Résultat théorique

μ est ce qu'on cherche à estimer!

Stratégie pour le choix de l'échantillonnage préférentiel

Principe: Substituer W_s à V_s avec la même espérance mais une variance moindre.

- 1 Substituer $\mathbf{P}'$ to $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{P}(s, s') > 0 \Rightarrow \mathbf{P}'(s, s') > 0 \vee s = s_-$
- 2 Pour toute trajectoire $\sigma = s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \cdots s_k \rightarrow s_{\pm}$

$$W_s = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}(s, s_1)}{\mathbf{P}'(s, s_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(s_1, s_2)}{\mathbf{P}'(s_1, s_2)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbf{P}(s_k, s_+)}{\mathbf{P}'(s_k, s_+)} & \text{si } \sigma \text{ atteint } s_+ \\ 0 & \text{si } \sigma \text{ atteint } s_- \end{cases}$$

- 3 Estimer $\mathbf{E}(W_{s_0}) = \mathbf{E}(V_{s_0})$

Absence de biais :

$$\forall s \in S, \mathbf{E}(W_s) = \mathbf{E}(V_s)$$

Stratégie pour le choix de l'échantillonnage préférentiel

Principe: Substituer W_s à V_s avec la même espérance mais une variance moindre.

- 1 Substituer $\mathbf{P}'$ to $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{P}(s, s') > 0 \Rightarrow \mathbf{P}'(s, s') > 0 \vee s = s_-$
- 2 Pour toute trajectoire $\sigma = s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \cdots s_k \rightarrow s_{\pm}$

$$W_s = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}(s, s_1)}{\mathbf{P}'(s, s_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(s_1, s_2)}{\mathbf{P}'(s_1, s_2)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbf{P}(s_k, s_+)}{\mathbf{P}'(s_k, s_+)} & \text{si } \sigma \text{ atteint } s_+ \\ 0 & \text{si } \sigma \text{ atteint } s_- \end{cases}$$

- 3 Estimer $\mathbf{E}(W_{s_0}) = \mathbf{E}(V_{s_0})$

Absence de biais :

$$\forall s \in S, \mathbf{E}(W_s) = \mathbf{E}(V_s)$$

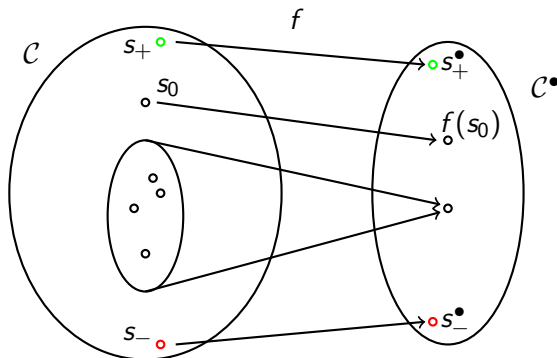
Objectif

$$\mathbf{V}(W_{s_0}) \ll \mathbf{V}(V_{s_0})$$

Stratégie pour le choix de l'échantillonnage préférentiel

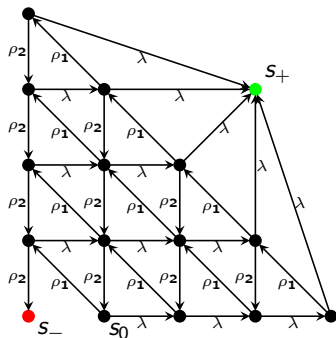
Idée

Abstraire intelligemment le modèle pour le réduire et calculer la distribution optimale sur le modèle réduit.

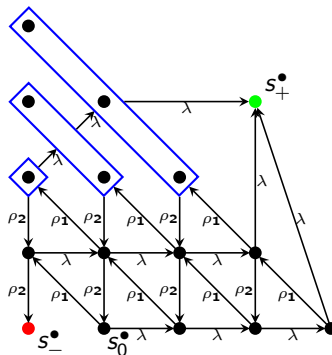


Exemple : files d'attente en tandem

$$f_R(n_1, n_2) = \begin{cases} (n_1, n_2) & \text{si } n_2 \leq R \\ (n_1 + n_2 - R, R) & \text{sinon} \end{cases}$$



DTMC for the tandem queues



DTMC for the chain reduced by f

Le résultat

Conditions nécessaires sur la réduction:

$\mathcal{C}^\bullet$ bornante uniformément : $\forall s \in S, \mu(s) \leq \mu^\bullet(f(s))$

$\forall s \in S, \sum_{s' \in S} \mu^\bullet(f(s')) \cdot \mathbf{P}(s, s') \leq \mu^\bullet(f(s)),$

Définition

On dit qu'une telle fonction de réduction garantit la réduction de la variance.

Théorème

Soient $\mathcal{C}$ une DTMC et $(\mathcal{C}^\bullet, f)$ une réduction de $\mathcal{C}$ qui vérifie la propriété ci-dessus.

L'échantillonnage préférentiel qu'elle définit vérifie :

- Pour tout s tel que $\mu(s) > 0$, W_s est une variable aléatoire bivaluée à valeurs dans $\{0, \mu^\bullet(f(s))\}$.
- $\mu(s) \leq \mu^\bullet(f(s))$.
- Comme la distribution suit une loi binomiale il est possible de calculer

Propriétés structurelles

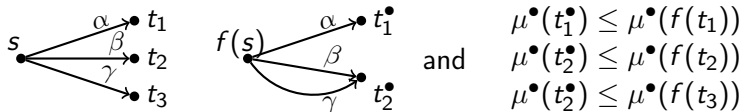
Conditions nécessaires sur la réduction:

On assure la condition $\forall s \in S, \sum_{s' \in S} \mu^\bullet(f(s')) \cdot P(s, s') \leq \mu^\bullet(f(s))$, en exigeant des conditions structurelles plus fortes :

Propriétés structurelles

Conditions nécessaires sur la réduction:

On assure la condition $\forall s \in S, \sum_{s' \in S} \mu^\bullet(f(s')) \cdot \mathbf{P}(s, s') \leq \mu^\bullet(f(s))$, en exigeant des conditions structurelles plus fortes :



- 1 Relation entre les transitions des deux chaînes
(*par analyse de la chaîne*)
- 2 Verification de contraintes sur $\mu^\bullet$: $\mu^\bullet(s) \leq \mu^\bullet(t)$
(*par couplage*)

Couplage

Les conditions structurelles permettent de définir un couplage

Un couplage de deux chaînes de Markov *ici deux fois la même* est une chaîne dont l'espace d'états est contenu dans le produit cartésien des deux espaces d'états tel que

- La projection sur chacune des composantes est la chaîne correspondante.
- On impose ici la condition supplémentaire : le seul état de la forme (s, s^+) est (s^+, s^+) .

Couplage

Les conditions structurelles permettent de définir un couplage

Un couplage de deux chaînes de Markov *ici deux fois la même* est une chaîne dont l'espace d'états est contenu dans le produit cartésien des deux espaces d'états tel que

- La projection sur chacune des composantes est la chaîne correspondante.
- On impose ici la condition supplémentaire : le seul état de la forme (s, s^+) est (s^+, s^+) .

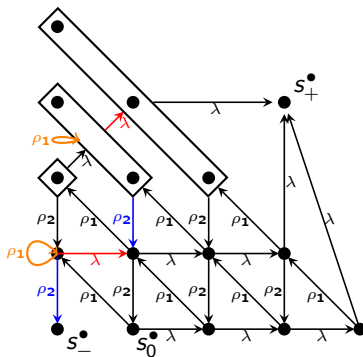
Proposition: Avec un tel couplage, $\forall s R s' \mu(s) \geq \mu(s')$

Le couplage sur l'exemple des files en tandem

① $(n_1, n_2) R (n'_1, n'_2)$ iff

$$\begin{cases} n_1 + n_2 \geq n'_1 + n'_2 \\ n_1 \geq n'_1 \end{cases}$$

② $\forall s R s' s' = s_+ \Rightarrow s = s_+.$



- ➊ Spécifier un modèle $\mathcal{C}^\bullet$ avec une fonction de réduction f .
- ➋ Prouver par un couplage sur la chaîne agrégée que le théorème s'applique.
- ➌ Calculer numériquement la fonction $\mu^\bullet$.
- ➍ Calculer statistiquement $\mu(s_0)$ en utilisant l'échantillonnage préférentiel ainsi défini.

Propriété d'accessibilité en temps borné

Example (Airbag)

- $\mathcal{M}$ modélise un airbag
- $\varphi = \textit{The airbag deploys within 10ms}$
 $\mathbf{A}(\textit{impact} \Rightarrow (\mathbf{T} \mathbf{U}^{[0;10]}\textit{deployment}))$
- resultat: $\Pr(\mathcal{M} \models \varphi) \geq 1 - 10^{-3}$

Propriété d'accessibilité en temps borné

Exemple (Airbag)

- $\mathcal{M}$ modélise un airbag
- $\varphi = \textit{The airbag deploys within 10ms}$
 $\mathbf{A}(\textit{impact} \Rightarrow (\mathbf{T} \mathbf{U}^{[0;10]} \textit{deployment}))$
- resultat: $\Pr(\mathcal{M} \models \varphi) \geq 1 - 10^{-3}$

Observation 1

La rareté d'un événement peut être due à la borne de temps

Propriété d'accessibilité en temps borné

Exemple (Airbag)

- $\mathcal{M}$ modélise un airbag
- $\varphi = \textit{The airbag deploys within 10ms}$
 $\mathbf{A}(\textit{impact} \Rightarrow (\mathbf{T} \mathbf{U}^{[0;10]} \textit{deployment}))$
- resultat: $\Pr(\mathcal{M} \models \varphi) \geq 1 - 10^{-3}$

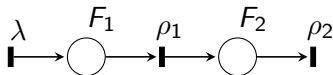
Observation 1

La rareté d'un événement peut être due à la borne de temps

Observation 2

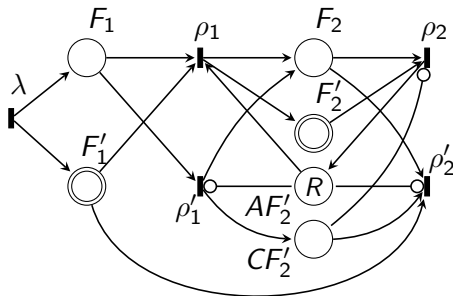
Pour un horizon fini, les cas discret et continu nécessitent des traitements différents.

- Modèle sous forme de réseaux de Petri généralisés
- Model checking et évaluation de performance
- Spécification par un automate hybride
- Vitesse de simulation supérieure à PRISM



Adaptation de COSMOS

- La pondération est calculée par l'automate hybride
- La fonction f est fournie dans le réseaux de Petri
- La table des $\mu^\bullet$ est lue à partir d'un fichier texte
- Modification des tirages probabilistes pour calculer $\mathbf{P}'$



Tandem 1

Paramètre:

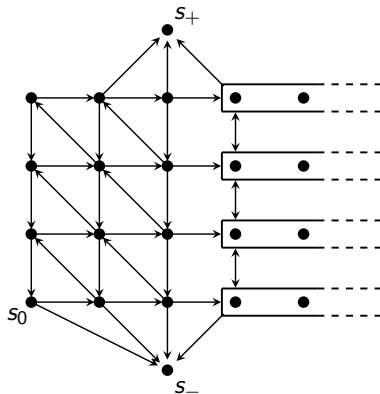
- $\lambda = 0.1$, $\rho_1 = \rho_2 = 0.45$,
- $N = 50$
- 20000 trajectoires
- $\mu(s_0) = 3.80122 \cdot 10^{-31}$

R	taille de $\mathcal{C}$	taille de $\mathcal{C}^\bullet$	$\mu^\bullet(\text{init})$	$\mu(\text{init})$ estimé	Interval de confiance	T (s) simulation
2	2500	100	1.24904E-28	3.96541E-31	2.25E-31	21.47
3	2500	150	2.28771E-30	3.78565E-31	2.76E-32	39.48
4	2500	200	6.55440E-31	3.80168E-31	9.63E-33	57.32
5	2500	250	5.10457E-31	3.79642E-31	4.18E-33	64.81
6	2500	300	3.97544E-31	3.80229E-31	1.86E-33	67.18
7	2500	350	3.97544E-31	3.79973E-31	8.90E-34	68.56

N	R	taille de $\mathcal{C}$	$\mu(\text{init})$ numérique	T (s) $\mathcal{C}$	T (s) $\mathcal{C}^\bullet$	taille de $\mathcal{C}^\bullet$	$\mu^\bullet(\text{init})$	$\mu(\text{init})$ estimé	Interval de confiance	T (s) simulation
100	30	10 201	0.01177	4	2	3131	0.017513	0.01156	8.6E-4	384
500	87	251 001	2.0619E-12	486	68	44088	3.139E-12	2.054e-12	2.13E-13	1031
1000	111	1E6	2.8694E-25	3880	389	112112	4.536E-25	2.824e-25	2.30E-26	1639
5000	150	25E6	#	#	13375	755151	2.265E-129	7.331e-130	1.10E-130	7920

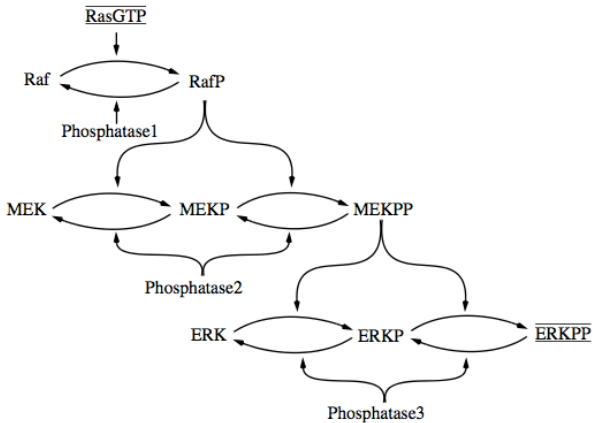
Tandem 2

- $\lambda = 0.25$
- $\rho_1 = \rho_2 = 0.375$
- $f'_R(n_1, n_2) = \begin{cases} (n_1, n_2) & \text{Si } n_1 \leq R \\ (R, n_2) & \text{Sinon} \end{cases}$



N	R	T (s) $\mathcal{C}^\bullet$	taille de $\mathcal{C}^\bullet$	$\mu^\bullet(init)$	$\mu(init)$ estimé	Interval de confiance	T (s) simulation	nb Traj
100	66	4	6767	1.86530E-19	4.1134E-20	4.02E-21	83	8000
500	370	1770	185871	1.03155E-90	6.6539E-91	5.13E-92	142	2000
1000	740	24670	741741	6.24704E-177	3.8419E-179	1.79E-179	10000	40000

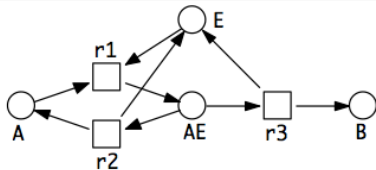
A three level signalling cascade



A network of chemical reactions.

Petri Net modelling of chemical networks [Heiner et al. ATPN04,...]

Chemical networks reactions successfully abstracted with Petri Nets for quantitative analysis.



The Petri net pattern for mass action kinetics $A + E \rightleftharpoons AE \rightarrow B + E$.

With specific tools for qualitative and probabilistic analysis, e.g.: MARCIE[Heiner et al. 2008]

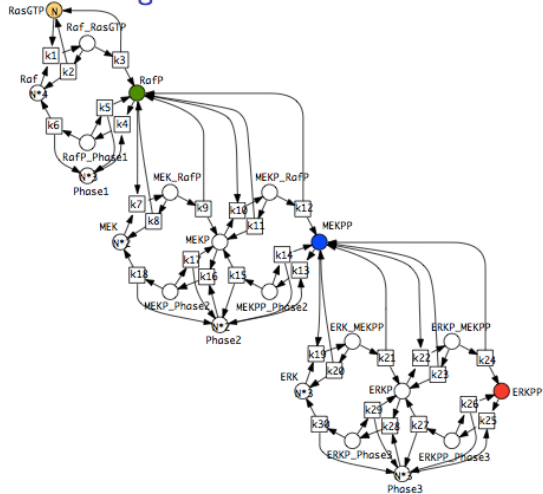
Petri Net modelling

This network abstracted with Petri Nets for qualitative and probabilistic analysis [Heiner et al. 2008] with tool MARCIE

Each step following a pattern $A + E \rightleftharpoons AE \rightarrow B + E$ is modelled by a small Petri net component . The mass action kinetics is expressed by the rate of the transitions. The marking-dependent rate of each transition is equal to the product of the number of tokens in all its incoming places up to a multiplicative constant given by the biological behaviour (summing up dependencies on temperature, pressure, volume...).

A scaling factor N parameterises the number of tokens for the initial marking. Increasing this scaling parameter represents an increase of the biomass circulating in the system or of the resolution.

Petri Net modelling



Size of Petri Net modelling

Table : Development of the state space for increasing N .

N	number of states	N	number of states
1	24,065 (4)	6	769,371,342,640 (11)
2	6,110,643 (6)	7	5,084,605,436,988 (12)
3	315,647,600 (8)	8	27,124,071,792,125 (13)
4	6,920,337,880 (9)	9	122,063,174,018,865 (14)
5	88,125,763,956 (10)	10	478,293,389,221,095 (14)

Two examples of rare events for signalling cascade

Maximal peak of the output signal

‘What is the probability to reach within 10 time units a state where the total mass of ERK is doubly phosphorylated?’

$$p_1 = \Pr(\text{True Until}^{\leq 10}(\text{ERKPP} = 3N))$$

Conditional maximal signal peak

“What is the probability of the concentration of *RafP* to continue its increase and reach its maximal strength, when starting in a state where the concentration is for the first time at least L ?”.

$$p_2 = \Pr_{\pi}((\text{RafP} \geq L) \text{ Until } (\text{RafP} > L'))$$

π is the distribution over states when satisfying for the first time the state formula $\text{RafP} \geq L$

Maximal peak of the output signal

‘What is the probability to reach within 10 time units a state where the total mass of ERK is doubly phosphorylated?’

$$p_1 = \Pr(\text{True Until}^{\leq 10}(\text{ERKPP} = 3N))$$

N	COSMOS		
	CI Gaussian	CI Chernoff	CI MinMax
1			
2	[3.75E-027,5.88E-026]	[3.75E-027,4.54E-025]	[3.75E-27,1.57E-23]
3	[4.34E-042,1.72E-039]	[4.34E-042,1.82E-038]	[4.43E-42,1.87E-37]
4	[1.54E-057,8.54E-056]	[1.54E-057,1.98E-055]	[1.78E-57,7.05E-55]
5	[3.97E-073,2.33E-070]	[3.97E-073,7.30E-070]	[5.44E-73,2.24E-69]

Maximal peak of the output signal

'What is the probability to reach within 10 time units a state where the total mass of ERK is doubly phosphorylated?'

$$p_1 = \Pr(\text{True Until}^{\leq 10}(\text{ERKPP} = 3N))$$

N	COSMOS		
	CI Gaussian	CI Chernoff	CI MinMax
1			
2	[3.75E-027,5.88E-026]	[3.75E-027,4.54E-025]	[3.75E-27,1.57E-23]
3	[4.34E-042,1.72E-039]	[4.34E-042,1.82E-038]	[4.43E-42,1.87E-37]
4	[1.54E-057,8.54E-056]	[1.54E-057,1.98E-055]	[1.78E-57,7.05E-55]
5	[3.97E-073,2.33E-070]	[3.97E-073,7.30E-070]	[5.44E-73,2.24E-69]

Computational complexity related to p_1

N	COSMOS			MARCIE	
	reducing factor	time(s)	memory	time(s)	memory
1	-	-	-	4	514MB
2	38	20,072	3,811MB	326	801MB
3	558	15,745	15,408MB	43,440	13,776MB
4	4667	40,241	3,593MB	Out of Memory: >32GB	
5	27353	51,120	19,984MB		

Computational complexity related to p_1

N	COSMOS			MARCIE	
	reducing factor	time(s)	memory	time(s)	memory
1	-	-	-	4	514MB
2	38	20,072	3,811MB	326	801MB
3	558	15,745	15,408MB	43,440	13,776MB
4	4667	40,241	3,593MB	Out of Memory: >32GB	
5	27353	51,120	19,984MB		

Merci !