

Le processus de contact : un exemple de système de particules en interaction

Régine Marchand
regine.marchand@univ-lorraine.fr

16 mars 2017

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Échauffement : le processus de Poisson sur \mathbb{R}_+ | 2 |
| 2 | Définition du processus de contact par ses taux de transition | 3 |
| 3 | Construction graphique et premières propriétés | 4 |
| 4 | Semi-groupe de Markov et générateur infinitésimal | 6 |
| 5 | Seuils critiques pour la survie dans un graphe infini | 8 |
| 6 | Lois stationnaires | 10 |
| 7 | Processus de contact sur \mathbb{Z}^d | 12 |
| 8 | Processus de contact sur l'arbre régulier T_d avec $d \geq 2$ | 14 |
| 9 | Processus de contact sur un graphe fini | 15 |

Introduction

L'objectif de ce mini-cours est de présenter le processus de contact, et quelques techniques permettant d'étudier les systèmes de particules en interaction sur ce modèle particulier. Le processus de contact est l'un des systèmes de particules en interaction les plus simples et les plus étudiés, autant pour lui même que comme modèle jouet permettant de mettre au point des outils robustes transposables à d'autres modèles. Ce cours s'appuie sur les livres de référence de Liggett [Lig85] et [Lig99] (le premier est très complet sur les problèmes de construction, le second se concentre davantage sur les propriétés des modèles), et aussi sur le cours "Interacting particle systems" de Jan Swart, disponible sur sa page web.

Historiquement, le processus de contact a d'abord été étudié sur \mathbb{Z}^d , puis sur les arbres. Actuellement, beaucoup de travaux s'intéressent au processus de contact sur des graphes aléatoires finis (voir les résultats et l'introduction de l'article de Mourrat et Valesin [MV16]). Dans ce cadre, on l'appelle parfois le modèle SIS (susceptible-infected-susceptible) : il peut être utilisé en biologie comme modèle de propagation d'une épidémie (voir l'article de survol de Durrett [Dur07]), en sciences sociales comme modèle d'interactions entre individus (voir l'article de survol de Aldous [Ald13]), en informatique comme modèle de propagation d'un virus dans un réseau (voir par exemple [BBCS05])...

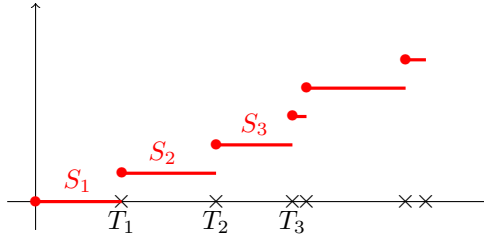


FIGURE 1 – Les horloges exponentielles du processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}_+ . On peut voir un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ sur \mathbb{R}_+ comme une mesure aléatoire $\sum_{i \geq 1} \delta_{T_i}$ sur \mathbb{R}_+ .

1 Échauffement : le processus de Poisson sur \mathbb{R}_+

Le processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}_+ est un des exemples les plus simples de processus markovien. Il sert de brique fondamentale dans la construction des chaînes de Markov à espace d'état fini ou dénombrable et à temps continu, et en particulier dans la construction graphique du processus de contact. Les résultats qui suivent sur le processus de Poisson sont classiques, et très bien expliqués par exemple dans le livre de Norris [Nor97], section 2.4.

Définition. Un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ sur \mathbb{R}_+ d'intensité $\lambda > 0$ est un processus à valeurs dans \mathbb{N} , partant de 0, dont les trajectoires sont croissantes et continues à droite, et satisfaisant l'un des trois jeux de propriétés équivalents suivants :

1. les temps inter-sauts $(S_i)_{i \geq 1}$ sont des vaïid de loi exponentielle de paramètre λ , et à l'instant $T_i = \sum_{j=1}^i S_j$, le processus saute de $i - 1$ vers i .
2. les accroissements de $(N_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants, et pour tout $t \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N_{t+h} = n + m | N_t = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{si } m = 1, \\ o(h) & \text{si } m > 1, \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

3. les accroissements de $(N_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants et stationnaires, et pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

On parle souvent d'horloges exponentielles pour parler des temps inter-sauts $(S_i)_{i \geq 1}$ du 1. et dans le 2. on dit que le taux de saut du processus est λ . Le processus de Poisson sur \mathbb{R}_+ est markovien (c'est une conséquence de la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle) :

Propriété de Markov pour un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ sur \mathbb{R}_+ .

Pour tout $s \geq 0$, $(N_{s+t} - N_s)_{t \geq 0}$ est encore un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ sur \mathbb{R}_+ , indépendant de $(N_u)_{0 \leq u \leq s}$.

Propriété de Markov forte pour un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ sur \mathbb{R}_+ .

Pour tout temps d'arrêt T fini presque sûrement (pour la filtration naturelle associée à $(N_t)_{t \geq 0}$), $(N_{T+t} - N_T)_{t \geq 0}$ est encore un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ sur \mathbb{R}_+ , indépendant de $(N_u)_{0 \leq u \leq T}$.

Donnons encore deux propriétés très utiles des processus de Poisson :

• Principe de superposition. Si $(M_t)_{t \geq 0}$ et $(N_t)_{t \geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ et μ , alors $(M_t + N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.
• Principe de décomposition. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et soit $p \in]0, 1[$. On construit un processus $(N_t^1)_{t \geq 0}$ de la façon suivante : indépendamment de tout le reste, pour chaque saut de $(N_t)_{t \geq 0}$, on décide de faire sauter $(N_t^1)_{t \geq 0}$ avec probabilité p . Alors $(N_t^1)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $p\lambda$.

\diamond **Application.** Ceci permet de coupler deux processus de Poisson $(N_t^\lambda)_{t \geq 0}$ et $(N_t^\mu)_{t \geq 0}$ d'intensités respectives $\lambda < \mu$, de sorte que les instants de saut de $(N_t^\lambda)_{t \geq 0}$ soient inclus dans les instants de saut de $(N_t^\mu)_{t \geq 0}$. En particulier, pour $t = 1$, on obtient $\mathbb{P}(N_1^\lambda \leq N_1^\mu) = 1$: on dit que si $\lambda < \mu$, 1 alors la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est stochastiquement dominée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$.

2 Définition du processus de contact par ses taux de transition

Un système de particules en interaction est un processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ qui sert à modéliser l'évolution en temps continu de l'état d'une population d'individus :

- La population d'individus (ou particules) est représentée par les sommets d'un graphe $G = (V, E)$. On prendra toujours pour G un graphe non-orienté, sans boucle ni arête multiple, connexe, fini ou dénombrable, localement fini¹. Un tel graphe sera appelé un *bon graphe*. Les arêtes de G indiquent les relations de voisinages entre individus.

Par exemple, $G = \mathbb{Z}^d$, G arbre régulier, G graphe fini, G graphe lui-même aléatoire...

- L'état de chacune des particules est à valeur dans $\{0, 1\}$. L'état de la population totale est donc à valeurs dans $S = \{0, 1\}^V$. Ainsi, pour $t \geq 0$, $\eta_t = (\eta_t(x))_{x \in V} \in \{0, 1\}^V$ code l'état de la population à l'instant t .
- Les interactions sont locales, c'est-à-dire que l'évolution en un temps infinitésimal de l'état d'une particule ne dépend que de l'état des particules dans son voisinage. Ici, on prend les voisins au sens strict, c'est-à-dire que deux points $x, y \in G$ sont voisins s'ils sont les extrémités d'une arête de G : on note alors $x \sim y$.

Nous allons ici nous concentrer sur le processus de contact, introduit en 1974 par Harris [Har74] : c'est l'un des systèmes de particules les plus simples, mais il présente déjà un certain nombre de propriétés intéressantes. Le processus de contact peut s'interpréter en termes de propagation d'une épidémie dans une population : 0 code l'état sain et 1 code l'état infecté, le graphe G donnant la géométrie de l'espace où vivent les particules. On le définit en donnant ses taux de transition, c'est-à-dire les probabilités infinitésimales que chacune de ses particules saute d'un état vers l'autre dans un intervalle de temps infiniment petit :

Processus de contact sur $G = (V, E)$. Le processus de contact avec paramètre d'infection $\lambda > 0$ sur G est un processus de Markov en temps continu $(\xi_t)_{t \geq 0}$, à valeurs dans $\{0, 1\}^V$, tel que

- (guérison) une particule infectée au temps t devient saine au taux 1,
- (contamination) une particule x saine au temps t devient infectée au taux $\lambda \sum_{y \sim x} \xi_t(y)$.

Il n'y a pas de transition modifiant simultanément l'état de deux sites différents. Les guérisons sont individuelles et spontanées, tandis que les contaminations se font par contact, entre voisins les plus proches. Le taux d'infection de x est proportionnel à son nombre de voisins infectés $\sum_{y \sim x} \xi_t(y)$ à l'instant t .

\triangleright **Question.** Si le graphe G est fini, le processus de contact est une chaîne de Markov en temps continu à espace d'état fini. Il est donc parfaitement défini sur \mathbb{R}_+ . Par contre, si le graphe est infini, cette description par les taux de transition définit-elle proprement un processus ?

Le processus de contact sur G de paramètre d'infection λ peut aussi s'interpréter comme la croissance d'une population vivant sur G : chaque particule meurt à taux 1 et donne naissance, indépendamment sur chacun des

1. "localement fini" signifie que chaque sommet du graphe est de degré fini.

sites voisins, à une nouvelle particule à taux λ à condition que ce site voisin soit vide. Il y a donc une contrainte géométrique de place : pas plus d'une particule par site! Si on supprime cette contrainte, on obtient la marche aléatoire branchante :

Marche aléatoire branchante sur $G = (V, E)$. La marche aléatoire branchant avec paramètre $\lambda > 0$ sur G est un processus de Markov en temps continu $(\eta_t)_{t \geq 0}$, à valeurs dans \mathbb{N}^V ($\eta_t(x)$ est le nombre de particules vivant en x à l'instant t), tel que

- (guérison) une particule vivante au temps t meurt au taux 1,
- (contamination) une particule vivante au temps t au site x donne naissance, indépendamment sur chacun des sites voisins de x , à une nouvelle particule à taux λ .

3 Construction graphique et premières propriétés

La construction qu'on va expliquer vient de l'article de Harris [Har78]. Soit $G = (V, E)$ un bon graphe. On note \vec{E} l'ensemble des arêtes orientées de G (chaque arête de E apparaît deux fois dans \vec{E} , une fois avec chacune de ses orientations).

Soit $\omega = ((\omega_e)_{e \in \vec{E}}, (\omega_z)_{z \in V})$ des processus de Poisson² sur \mathbb{R}_+ , indépendants; les $(\omega_e)_{e \in \vec{E}}$ sont d'intensité λ et les $(\omega_z)_{z \in V}$ d'intensité 1. On note \mathbb{P}_λ la loi de cette famille $\omega = ((\omega_e)_{e \in \vec{E}}, (\omega_z)_{z \in V})$ de processus de Poisson. Au dessus de chaque site $z \in \mathbb{Z}^d$, on trace une ligne \mathbb{R}_+ , et on met une croix aux instants donnés par ω_z : ces croix représentent les instants où le site z guérit s'il est infecté juste avant (guérison au taux 1). Au dessus de chaque arête $e = (x, y) \in \vec{E}$, on trace une flèche horizontale de x vers y , aux instants donnés par ω_e : ces segments représentent les instants d'infection possibles de x vers y quand juste avant x est infecté et y est sain (infection au taux λ).

Un chemin d'infection suit, dans le sens croissant, les lignes temporelles au dessus des sites sans croiser de croix, et utilise les flèches horizontales pour passer d'un site à l'autre. Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 0$, on pose $\xi_t^x(y) = 1$ si et seulement si il existe un chemin d'infection de $(x, 0)$ vers (y, t) , ce qu'on note $(x, 0) \rightarrow (y, t)$, et on pose :

$$\forall x \in V \quad \xi_t^x = \{y \in V : \xi_t^x(y) = 1\} \quad \text{et} \quad \forall A \subset V \quad \xi_t^A = \bigcup_{x \in A} \xi_t^x.$$

Soit μ est une mesure de probabilité sur l'ensemble³ $S = \{0, 1\}^V$. Pour construire $(\xi_t^\mu)_{t \geq 0}$, le processus de contact partant de la loi initiale μ , on tire d'abord une partie $A \subset \{0, 1\}^V$ selon μ indépendamment des processus de Poisson de la représentation graphique, puis on considère $(\xi_t^A)_{t \geq 0}$.

Quand le graphe G est fini, on détermine la première transition en regardant le minimum d'une famille finie de variables aléatoires de lois exponentielles indépendantes. Par contre, si G est infini et si la condition initiale est de cardinal infini, il n'y a pas une première horloge exponentielle qui sonne avant toutes les autres : dans chaque intervalle de temps, il y a une infinité de sauts des processus de Poisson de la construction graphique, et on ne peut donc pas les ordonner pour les examiner l'un après l'autre.

Dans [Har78], Harris montre que cette construction définit bien un processus de Markov, avec les bons taux de transition, et que c'est un processus de Feller. On ne donne pas la définition ici, mais on retient que cela implique que l'on peut utiliser la propriété de Markov forte.

2. On munit \mathbb{R}_+ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, et on note \mathcal{M} l'ensemble des mesures de comptage $m = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{t_i}$ localement finies sur \mathbb{R}_+ . On le munit de la tribu \mathcal{M} engendrée par les applications $m \mapsto m(B)$, où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. On pose

$$\begin{aligned} \Omega &= M^{\vec{E}} \times M^V, \\ \mathcal{F} &= \mathcal{M}^{\otimes \vec{E}} \otimes \mathcal{M}^{\otimes V}, \\ \text{et pour tout } \lambda > 0, \mathbb{P}_\lambda &= \mathcal{P}_\lambda^{\otimes \vec{E}} \otimes \mathcal{P}_1^{\otimes V}. \end{aligned}$$

Pour tout $t \geq 0$, on note \mathcal{F}_t la tribu engendrée par les $\omega \mapsto \omega_e(B)$ et les $\omega \mapsto \omega_z(B)$, où $e \in \vec{E}$, $z \in V$ et B est un borélien de $[0, t]$. On regarde alors les coordonnées de ω sous \mathbb{P}_λ .

3. S est muni de la topologie produit et de la tribu borélienne

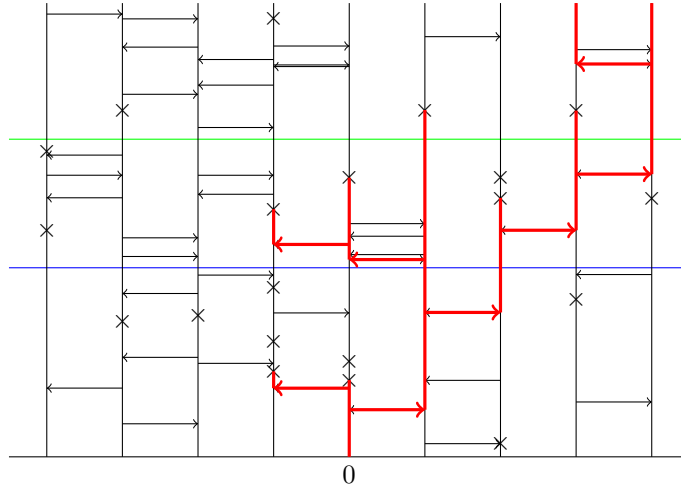


FIGURE 2 – Les processus de Poisson de la représentation graphique. La survie du processus de contact $(\xi_t^0)_{t \geq 0}$ correspond à l'existence d'un chemin infini issu de $(x, 0)$, ce qu'on note $(0, x) \rightarrow +\infty$.

De cette construction graphique, on déduit les propriétés suivantes :

Propriétés "graphiques" du processus de contact :

1. Le processus de contact est attractif : $(A \subset B) \Rightarrow (\forall t \geq 0 \quad \xi_t^A \subset \xi_t^B)$.
2. Le processus de contact est additif : $\forall t \geq 0 \quad \xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \cup \xi_t^B$.
3. L'état \emptyset est absorbant pour le processus de contact.
4. On peut coupler des processus de contact avec différents paramètres d'infection.
5. Le processus de contact est auto-dual : $\mathbb{P}_\lambda(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^B \cap A \neq \emptyset)$.
Il suffit de renverser le sens de temps pour visualiser cette propriété.
6. Propriété de Markov : $\mathbb{P}_\lambda(\xi_{t+s}^A \in \mathcal{C} | \mathcal{F}_t) = f(\xi_t^A)$, avec

$$\forall B \subset V \quad f(B) = \mathbb{P}_\lambda(\xi_{t+s}^A \in \mathcal{C} | \xi_t^A = B) = \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^B \in \mathcal{C}).$$

La construction graphique peut s'interpréter comme une fonction de mise à jour : ξ_t^A peut s'écrire en fonction de la condition initiale A et des processus de Poisson de la représentation graphique sur l'intervalle $[0, t]$. On comprend alors facilement la propriété de Markov : pour avoir ξ_{t+s}^A (ligne verte), je fais partir un processus de contact ξ_t^A (ligne bleue) de durée t de la configuration initiale A , puis je fais partir un processus de contact de durée s de cette configuration aléatoire ξ_t^A . La première étape utilise les processus de Poisson de la représentation graphique sur l'intervalle $[0, t]$, tandis que la deuxième étape utilise ξ_t^A et les processus de Poisson $[t, t + s]$, qui sont indépendants de tout ce qui s'est passé avant l'instant t .

◇ **Application. Définition des seuils critiques pour la survie.** Pour tout $A \subset V$, on introduit le temps d'extinction du processus de contact partant de A :

$$\tau^A = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^A = \emptyset\}.$$

En couplant les processus de contact avec différents paramètres λ , on peut définir deux seuils critiques $0 \leq$

$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq +\infty$ tels que

| 0 | $\lambda_1(G)$ | $\lambda_2(G)$ | $+\infty$ |
|--|--|---|-----------|
| extinction | survie faible (ou globale) | survie forte (ou locale) | |
| $\mathbb{P}_\lambda(\forall t \xi_t^x \neq \emptyset) = 0$ $\Leftrightarrow \mathbb{P}_\lambda(\tau^x = +\infty) = 0$ | $\mathbb{P}_\lambda(\forall t \xi_t^x \neq \emptyset) > 0$ $\Leftrightarrow \mathbb{P}_\lambda(\tau^x = +\infty) > 0$ | $\mathbb{P}_\lambda(\xi_t^x(x) = 1 \text{ infiniment souvent}) > 0$ | |

♣ **Exercice 1.** En utilisant la propriété de Markov, montrer que $\lambda_1(G)$ et $\lambda_2(G)$ sont bien indépendants de $x \in V$.

Si G est fini, comme l'état \emptyset est l'unique état absorbant de la chaîne et l'unique classe fermée, le temps d'atteinte de cet état est fini presque sûrement, quelque soit le paramètre $\lambda > 0$; donc dans le cas fini, $\lambda_1(G) = \lambda_2(G) = +\infty$.

▷ **Question.** Pour un graphe G infini dénombrable, a-t-on $\lambda_1(G) > 0$? $\lambda_2(G) < +\infty$? $\lambda_1(G) < \lambda_2(G)$?

♣ **Exercice 2.** Imaginer une construction graphique pour la marche aléatoire branchante.

Indication : il faut plein de processus de Poisson...

♣ **Exercice 3. Comment se convaincre que le processus de contact est bien défini sur \mathbb{Z}^d ?**

Le but de l'exercice est de donner un argument "algorithmique" pour construire le processus de contact sur \mathbb{Z}^d .

1. On suppose d'abord $d = 1$. Fixons $t > 0$. Les arêtes e telles que $\omega_e([0, t]) = 0$ constituent des barrières infranchissables pour l'infection pendant $[0, t]$ et découpent \mathbb{Z} en morceaux sur lesquels les évolutions du processus de contact sont indépendantes. Expliquer comment construire/simuler le processus de contact partant d'une configuration A quelconque, observé dans une fenêtre $[-N..N] \times [0, t]$.

2. Cas $d \geq 2$. Rappel sur la percolation sur \mathbb{Z}^d . On munit les arêtes \mathbb{Z}^d d'une famille de vaaid de Bernoulli de paramètre p , et on regarde les composantes connexes du graphe où l'on ne garde que les arêtes ayant obtenu 1.

Il existe $p_c(\mathbb{Z}^d) \in]0, 1[$ tel que

- si $p < p_c(\mathbb{Z}^d)$ alors presque sûrement, toutes les composantes connexes sont finies;
- si $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$ alors presque sûrement, il existe une composante connexe infinie.

Montrer qu'on peut choisir $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}_\lambda(\omega_e([0, \delta]) \neq 0) < p_c(\mathbb{Z}^d)$, expliquer comment simuler le processus de contact sur $[0, \delta]$ et conclure.

4 Semi-groupe de Markov et générateur infinitésimal

Dans cette partie, $\lambda > 0$ est fixé. On omet la dépendance en λ .

• L'ensemble $S = \{0, 1\}^V$ est muni de la topologie produit; il est compact. Dans la suite, on identifie $\eta \in S = \{0, 1\}^V$ avec la partie $A \subset V$ dont η est la fonction indicatrice. On note

\mathcal{C} l'ensemble des fonctions continues (donc bornées) de $S = \{0, 1\}^V$ dans \mathbb{R} .

On munit \mathcal{C} de la norme du sup : $\|f\| = \sup_{A \subset V} |f(A)|$, qui en fait un espace de Banach. Dans \mathcal{C} , on distinguent les fonctions *cylindriques*, qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées. Elles sont denses dans \mathcal{C} .

• **Semi-groupe de Markov.** Pour tout $t \geq 0$, on définit l'opérateur $S(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ par

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \forall A \subset V \quad (S(t)f)(A) = \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^A)).$$

Traduisons la propriété de Markov : pour tous $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_{s+t}^A) | \mathcal{F}_s) &= (S(t)f)(\xi_s^A), \\ S(s+t)f(A) &= \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_{s+t}^A)) = \mathbb{E}_\lambda(\mathbb{E}_\lambda(f(\xi_{s+t}^A) | \mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}_\lambda((S(t)f)(\xi_s^A)) = S(s)[S(t)f](A). \end{aligned}$$

On obtient la propriété de semi-groupe : $\forall s, t \geq 0 \quad S(t)S(s) = S(t+s) = S(s)S(t)$.

• **Générateur infinitésimal.** Il permet de traduire la description du processus de contact par ses taux de transition en une action sur les fonctions. Le générateur infinitésimal est l'application linéaire L qui, à toute $f \in \mathcal{C}$ cylindrique, associe Lf définie par

$$\forall A \subset V \quad Lf(A) = \underbrace{\sum_{x \in A} (f(A \setminus \{x\}) - f(A))}_{\text{j'enlève } x \text{ au taux } 1} + \underbrace{\sum_{x \in V \setminus A} (f(A \cup \{x\}) - f(A))}_{\text{j'ajoute } x} \underbrace{\lambda \sum_{y \sim x} \mathbf{1}_A(y)}_{\text{au taux } \lambda \sum_{y \sim x} \mathbf{1}_A(y)}. \quad (1)$$

NB : comme f ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées, c'est une somme finie.

♣ **Exercice 4.** Quel est le générateur de la marche aléatoire branchante ? Et si on supprime les morts ?

Soit $f : \{0, 1\}^V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction cylindrique dépendant des coordonnées de \tilde{V} , sous-ensemble fini de V . Soit $A \subset V$ non vide. On va calculer $\mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^A)) - \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_0^A))$ pour t petit. Pour cela, on regarde les sauts de $f(\xi_s^A)$ sur l'intervalle $[0, t]$.

Pour qu'on observe un saut de $f(\xi_s^A)$ entre 0 et t , il faut que l'un des sites de \tilde{V} ait changé d'état ; les changements d'état des sites à l'extérieur de \tilde{V} sont invisibles pour f . On va commencer par montrer qu'il est très peu probable – $\mathcal{O}(t^2)$ – qu'il y ait eu deux changements d'état dans \tilde{V} . Notons \tilde{E} l'ensemble des arêtes entre les points de \tilde{V} , ceux à distance 1 de \tilde{V} et ceux à distance 2 de \tilde{V} :

$$\mathbb{P}_\lambda((f(\xi_s^A))_{0 \leq s \leq t} \text{ saute au moins deux fois}) \leq \mathbb{P}_\lambda \left(\underbrace{\sum_{x \in \tilde{V}} \omega_x([0, t]) + \sum_{e \in \tilde{E}} \omega_e([0, t])}_{\text{loi } \mathcal{P}((|\tilde{V}| + \lambda|\tilde{E}|)t)} \geq 2 \right) = \mathcal{O}(t^2).$$

Pour tout $x \in \tilde{V} \cap A$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda \left(\begin{array}{l} \text{un seul saut pour} \\ (f(\xi_s^A))_{0 \leq s \leq t}, \\ \text{c'est la guérison de } x \end{array} \right) &= \mathbb{P}_\lambda \left(\begin{array}{l} \text{guérison de } x \\ \omega_x([0, t]) = 1, \\ \text{guérisons dans } \tilde{V} \setminus \{x\} \\ \sum_{y \in (\tilde{V} \cap A) \setminus \{x\}} \omega_y([0, t]) + \\ \text{infections vers } \tilde{V} \\ \sum_{x \in A, y \in \tilde{V} \setminus A, x \sim y} \omega_{(x,y)}([0, t]) = 0 \end{array} \right) \\ &= \mathbb{P}_\lambda(\omega_x([0, t]) = 1) \mathbb{P}_\lambda \left(\underbrace{\sum \omega_y([0, t]) + \sum \omega_{(x,y)}([0, t]) = 0}_{\ll \mathcal{P}((|\tilde{V}| + \lambda|\tilde{E}|)t)} \right) = t(1 + \mathcal{O}(t)). \end{aligned}$$

Soit $x \in A, y \in \tilde{V} \setminus A$ tels que $e = \{x, y\} \in E$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda \left(\begin{array}{l} \text{un seul saut pour} \\ (f(\xi_s^A))_{0 \leq s \leq t}, \text{ c'est la} \\ \text{contamination de } y \text{ par } x \end{array} \right) &= \mathbb{P}_\lambda \left(\begin{array}{l} \omega_{(x,y)}([0, t]) = 1, \\ \sum_{z \in \tilde{V} \cap A} \omega_z([0, t]) + \\ \sum_{\substack{x' \in A, y' \in \tilde{V} \setminus A, \\ x' \sim y', (x', y') \neq (x, y)}} \omega_{(x',y')}([0, t]) = 0 \end{array} \right) \\ &= \dots = \lambda t(1 + \mathcal{O}(t)). \end{aligned}$$

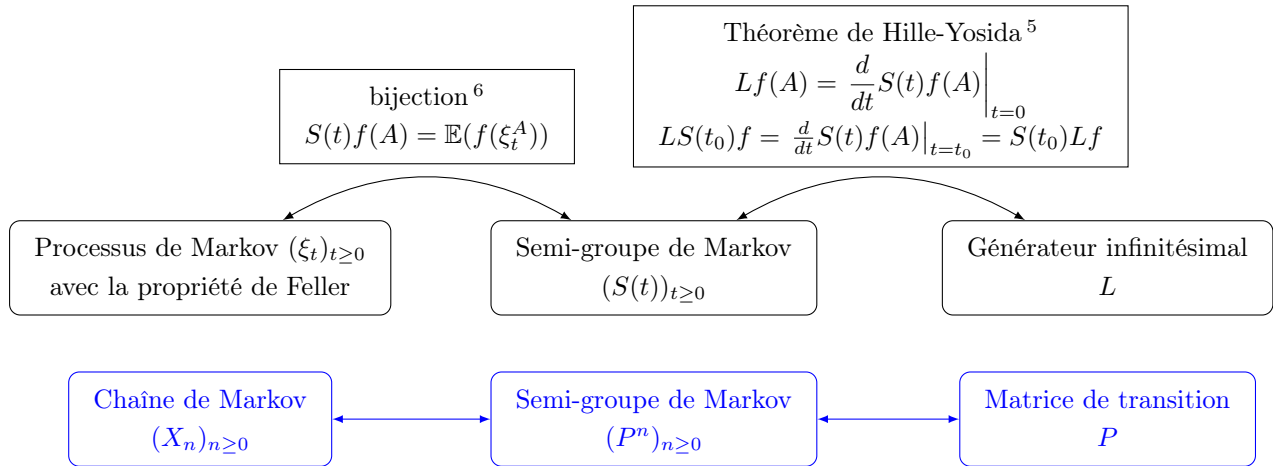
Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^A)) - \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_0^A)) &= t \sum_{x \in \tilde{V} \cap A} (f(A \setminus \{x\}) - f(A)) + \lambda t \sum_{x \in A, y \in \tilde{V} \setminus A, x \sim y} (f(A \cup \{y\}) - f(A)) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= {}^4 t \sum_{x \in A} (f(A \setminus \{x\}) - f(A)) + \lambda t \sum_{x \in A, y \in V \setminus A, x \sim y} (f(A \cup \{y\}) - f(A)) + \mathcal{O}(t^2), \\
\left. \frac{d}{dt} \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^A)) \right|_{t=0} &= \sum_{x \in A} (f(A \setminus \{x\}) - f(A)) + \lambda \sum_{e=\{x,y\}: x \in A, y \notin A} (f(A \cup \{y\}) - f(A)) \\
&= \sum_{x \in A} (f(A \setminus \{x\}) - f(A)) + \lambda \sum_{y \in V \setminus A} (f(A \cup \{y\}) - f(A)) \sum_{x \sim y} \mathbf{1}_A(x).
\end{aligned}$$

Que vient-on de faire ici ? On a construit le processus de contact $(\xi_t)_t$ sur G avec la représentation graphique des processus de Poisson, puis on a calculé, pour une fonction cylindrique $f : \{0, 1\}^V \rightarrow \mathbb{R}$, $\left. \frac{d}{dt} \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^A)) \right|_{t=0}$:

$$\forall A \subset V \quad Lf(A) = \left. \frac{d}{dt} \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^A)) \right|_{t=0}.$$

- Lien entre semi-groupe de Markov et générateur infinitésimal.



Nous avons ici un problème supplémentaire : ce que nous avons appelé générateur infinitésimal du processus de contact, en (1), n'est pas un vrai générateur, ce n'est qu'un embryon. La démarche complète pour construire un système de particules est la suivante. On commence par écrire la formule souhaitée d'un pré-générateur, valide sur un petit ensemble de fonctions (ici celles dépendant d'un nombre fini de coordonnées). Sous de bonnes hypothèses, le théorème 3.9 de Liggett dans [Lig85], chapitre 1, assure que ce pré-générateur peut être étendu en un unique (vrai) générateur infinitésimal, ce qui nous donne l'existence du processus via les deux bijections du schéma. On obtient en plus que ce processus a la propriété de Feller, ce qui implique qu'il a la propriété de Markov Forte. Ouf ! On peut commencer à travailler...

5 Seuils critiques pour la survie dans un graphe infini

Nous allons utiliser le générateur infinitésimal pour tenter de répondre aux questions : pour un graphe G infini dénombrable, a-t-on $\lambda_1(G) > 0$? $\lambda_2(G) < +\infty$? $\lambda_1(G) < \lambda_2(G)$?

4. On utilise ici que f ne dépend que des coordonnées dans \tilde{V} .

6. Voir le théorème 2.9 dans [Lig85]

6. Voir la proposition 1.3 et le théorème 1.5 dans [Lig85]

Lemme 5.1 Si G est un graphe connexe de degré maximal $K < +\infty$, alors

$$\lambda_1(G) \geq \frac{1}{K} > 0.$$

Démonstration. On fixe un point $0 \in V$. On cherche à trouver une équation différentielle satisfaite par $g : t \mapsto \mathbb{E}_\lambda(|\xi_t^0|)$. On va donc utiliser le générateur infinitésimal. Posons⁷ pour tout $A \subset V$ fini, $f(A) = |A|$.

$$Lf(A) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_\lambda(|\xi_t^A|) \right|_{t=0} = \sum_{x \in A} (|A \setminus \{x\}| - |A|) + \lambda \sum_{e=\{x,y\}: x \in A, y \notin A} (|A \cup \{y\}| - |A|) \leq (\lambda K - 1)|A|,$$

et pour $t_0 > 0$, avec la formule $LS(t_0)f(A) = \left. \frac{d}{dt} S(t)f(A) \right|_{t=t_0} = S(t_0)Lf(A)$, on a

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g(t) \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_\lambda(|\xi_t^0|) \right|_{t_0} = \left. \frac{d}{dt} S(t)f(\{0\}) \right|_{t=t_0} = S(t_0)Lf(\{0\}) = \mathbb{E}_\lambda((Lf)(\xi_{t_0}^0)) \leq \mathbb{E}_\lambda((\lambda K - 1)|\xi_{t_0}^0|).$$

Finalement, $g(0) = 1$ et pour tout $t > 0$, $\frac{\partial}{\partial t} g(t) \leq (\lambda K - 1)g(t)$, ce qui implique

$$\forall t \geq 0 \quad g(t) \leq \exp((\lambda K - 1)t).$$

Supposons maintenant que $\lambda K - 1 < 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_\lambda(\xi_n^0 \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\lambda(|\xi_n^0| \geq 1) \leq \mathbb{E}_\lambda(|\xi_n^0|) \leq \exp(-(1 - \lambda K)n).$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure alors l'extinction presque sûre du processus de contact si $\lambda < 1/K$.
□

♣ **Exercice 5.** Soit $G = (V, E)$ un bon graphe où tous les sommets sont de degré K et soit 0 un site fixé de G . Pour $\eta \in \mathbb{N}^V$, on note $|\eta| = \sum_{x \in V} \eta(x)$. On considère la marche aléatoire branchante $(\eta_t^0)_t$ sur G partant d'une seule particule située en 0 . Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{E}_\lambda(|\eta_t^0|) = \exp((\lambda K - 1)t).$$

Remarque. On vient de comparer la population totale du processus de contact au temps t avec la population totale au temps t de la marche aléatoire branchante :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{E}_\lambda(|\xi_t^0|) \leq \exp((\lambda K - 1)t).$$

▷ **Exemple.** $\lambda_1(\mathbb{Z}^d) \geq \frac{1}{2d} > 0$.

On note T_d l'arbre régulier dans lequel tout sommet a $d + 1$ voisins : $\lambda_1(T_d) \geq \frac{1}{d + 1} > 0$.

▷ **Question.** Que se passe-t-il dans un graphe à degré non borné ?

Il existe des arbres de Galton-Watson sur lesquels $\lambda_2(G) = 0$: voir le théorème 3.2 dans l'article de Pemantle [Pem92]. Sur le graphe booléen surcritique, $\lambda_1(G) > 0$: voir l'article de Ménard et Singh [MS16].

Théorème 5.2 $\lambda_2(\mathbb{Z}) < +\infty$.

Démonstration. Admis. On peut faire une preuve à base de dénombrement de contours (argument de Peierls). □

Lemme 5.3 Si G contient une copie de \mathbb{Z} , alors $\lambda_2(G) \leq \lambda_2(\mathbb{Z}) < +\infty$.

Démonstration. On couple les processus de contact grâce à la représentation graphique! □

⁷ mais ouille! f n'est pas cylindrique... On contourne ce problème en travaillant avec la famille des $f_M(A) = |A \cap B_M|$, où B_M l'ensemble des points de V à distance (de graphe dans G) de 0 inférieure à M .

6 Lois stationnaires

• L'ensemble \mathcal{M}_1 des mesures de probabilités sur $S = \{0, 1\}^V$ est muni de la topologie de la convergence faible :

$$\mu_n \rightarrow \mu \iff \forall f \in \mathcal{C} \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu.$$

L'ensemble \mathcal{M}_1 est compact pour cette topologie. On peut montrer (avec le théorème de Stone-Weierstrass⁸) la caractérisation des mesures de \mathcal{M}_1 suivante :

Lemme 6.1 Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $S = \{0, 1\}^V$. Si pour toute partie B finie de \mathbb{Z}^d ,

$$\int \mathbf{1}_{\{A \cap B \neq \emptyset\}} d\mu(A) = \int \mathbf{1}_{\{A \cap B \neq \emptyset\}} d\nu(A),$$

alors $\mu = \nu$.

Cette caractérisation nous sera particulièrement utile pour exploiter la propriété de dualité.

• **Processus de contact partant d'une condition initiale aléatoire.** On peut aussi faire agir le semi-groupe à droite, sur les mesures de probabilité : à toute $\mu \in \mathcal{M}_1$, pour tout $t \geq 0$, on associe $\mu S(t)$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad (\mu S(t))f = \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_t^\mu)) = \mu(S(t)f).$$

On interprète $\mu S(t)$ comme la loi $\mathcal{L}(\xi_t^\mu)$ du processus de contact ξ_t^μ partant d'une configuration initiale aléatoire tirée selon μ , indépendamment des processus de Poisson de la représentation graphique.

• **Loi stationnaire.** Si μ_0 est une mesure de probabilité sur $\{0, 1\}^V$, on dit que μ_0 est stationnaire pour le processus de contact sur V si et seulement si pour tout $t \geq 0$,

$$\forall t \geq 0 \quad \mathcal{L}(\xi_t^{\mu_0}) = \mu_0 \iff \forall t \geq 0 \quad \mu_0 S(t) = \mu_0.$$

Comme \emptyset est un état absorbant, δ_\emptyset est une loi stationnaire du processus de contact.

▷ **Question.** La loi δ_\emptyset est-elle l'unique loi stationnaire du processus de contact ?

♣ **Exercice 6. Une loi stationnaire pour le processus de contact.** Soit $G = (V, E)$ un bon graphe. Si μ_0 est une mesure de probabilité sur $\{0, 1\}^V$, on dit que μ_0 est invariante pour le processus de contact sur V si et seulement si pour tout $t \geq 0$, la loi de $\xi_t^{\mu_0}$ est encore μ_0 :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathcal{L}(\xi_t^{\mu_0}) = \mu_0.$$

Comme \emptyset est un état absorbant, δ_\emptyset est une loi invariante du processus de contact. Le but de l'exercice est de construire la loi stationnaire supérieure $\bar{\nu}$, qui pourra éventuellement être différente de δ_\emptyset . On prolonge la construction graphique à $V \times \mathbb{R}$, et on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\bar{\xi}_t = \{x \in V : \{-\infty\} \rightarrow (x, t)\}.$$

1. Montrer que $(\bar{\xi}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus de contact sur G , et que sa loi ne dépend pas de t . On la note $\bar{\nu}$.

2. Montrer que pour toute partie A finie de V , $\mathbb{P}_\lambda(\bar{\xi}_0 \cap A \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\lambda(\tau^A = +\infty)$.

• **Comparaison stochastique.** L'ensemble $\{0, 1\}^V$ est muni de la relation d'ordre partiel \subset . Une fonction $f : \{0, 1\}^V \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *croissante* si et seulement si

$$\forall \zeta, \xi \in \{0, 1\}^V \quad (\zeta \subset \xi) \Rightarrow (f(\zeta) \leq f(\xi)).$$

8. Soit X un espace compact et $C(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de X dans \mathbb{R} . Une sous-algèbre est dense dans $C(X)$ si et seulement si elle sépare les points et contient, pour tout point $x \in X$, une fonction qui ne s'annule pas en x . On prend ici $X = \{0, 1\}^V$, et comme sous-algèbre le sous-espace vectoriel de $C(X)$ engendré par les indicatrices des parties finies de V .

On définit alors la relation de comparaison stochastique (et c'est une relation d'ordre partiel) : si μ, ν sont deux mesures de probabilités sur $\{0, 1\}^V$,

$$\begin{aligned} \mu \preceq \nu &\iff \forall f : \{0, 1\}^V \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante et bornée, } \int f d\mu \leq \int f d\nu, \\ &\iff \exists(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ et } X, Y : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^V \text{ avec } \mathbb{P}_X = \mu, \mathbb{P}_Y = \nu \text{ et } \mathbb{P}(X \leq Y) = 1. \end{aligned}$$

Conséquence : soit μ_0 une mesure de probabilité sur $\{0, 1\}^S$. Alors $\delta_\emptyset \preceq \mu_0 \preceq \delta_V$, et par attractivité,

$$\forall t \geq 0 \quad \delta_\emptyset \preceq \mathcal{L}(\xi_t^{\mu_0}) \preceq \mathcal{L}(\xi_t^V) \iff \forall t \geq 0 \quad \delta_\emptyset \preceq \mu_0 S(t) \preceq \delta_V S(t). \quad (2)$$

• Loi stationnaire supérieure

Lemme 6.2 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe et $\lambda > 0$ fixé. La loi stationnaire supérieure est définie par

$$\bar{\nu} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\xi_t^V) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta_V S(t).$$

C'est une loi stationnaire pour le processus de contact, elle domine stochastiquement toute autre loi stationnaire et vérifie $\bar{\nu}(\emptyset) \in \{0, 1\}$.

Démonstration. • Soit $f : \{0, 1\}^V \rightarrow \mathbb{R}$ croissante bornée, et $s, t > 0$: comme $\xi_t^V \subset V$,

$$\mathbb{E}_\lambda(f(\xi_{t+s}^V)) \leq \mathbb{E}_\lambda(f(\xi_s^V)).$$

La suite $(\mathcal{L}(\xi_t^V))_{t \geq 0}$ est donc décroissante.

• Comme \mathcal{M}_1 est compact, il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(\mathcal{L}(\xi_{t_n}^V))_{n \geq 0}$ converge vers ν_1 quand $n \rightarrow +\infty$. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(\mathcal{L}(\xi_{s_n}^V))_{n \geq 0}$ converge vers ν_2 quand $n \rightarrow +\infty$. En extrayant si besoin des sous-suites, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n < t_n < s_{n+1}$ et alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}(\xi_{s_n}^V) \preceq \mathcal{L}(\xi_{t_n}^V) \preceq \mathcal{L}(\xi_{s_{n+1}}^V).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\nu_2 \preceq \nu_1 \preceq \nu_2$. Ceci donne l'existence de la limite définissant $\bar{\nu}$.

• $\bar{\nu}$ est une loi invariante : soit $s > 0$ et $f \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \bar{\nu} S(s) f &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta_V S(t) \right) S(s) f && \text{par définition de } \bar{\nu} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\delta_V S(t) S(s) f) && \text{par définition de la convergence faible} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\delta_V S(t+s) f) && \text{propriété de semi-groupe} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta_V S(t+s) \right) f && \text{par définition de la convergence faible} \\ &= \bar{\nu} f && \text{par définition de } \bar{\nu}. \end{aligned}$$

• Soit μ une loi stationnaire. Alors (2) assure que pour tout $t > 0$, $\mu = \mathcal{L}(\xi_t^\mu) \preceq \mathcal{L}(\xi_t^V)$, et on passe à la limite quand $t \rightarrow +\infty$.

• Supposons que $\bar{\nu}(\{\emptyset\}) < 1$. On vérifie que $\nu = \bar{\nu}(\cdot | \{\emptyset\}^c)$ est encore stationnaire et donc $\nu \preceq \bar{\nu}$. Comme

$$\bar{\nu} = (1 - \bar{\nu}(\{\emptyset\}))\nu + \bar{\nu}(\{\emptyset\})\delta_\emptyset,$$

on en déduit que $\bar{\nu}(\{\emptyset\}) = 0$. □

Lemme 6.3 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe et $\lambda > 0$ fixé.

- si $\lambda < \lambda_1(G)$ alors $\bar{\nu} = \delta_\emptyset$,
- si $\lambda > \lambda_1(G)$ alors $\bar{\nu} \neq \delta_\emptyset$.

Démonstration. On utilise la propriété de dualité : pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}_\lambda(\xi_t^V \cap A \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^A \cap V \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^A \neq \emptyset),$$

et on prend la limite quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\forall A \subset V \quad \int \mathbf{1}_{\{A \cap B \neq \emptyset\}} d\bar{\nu}(B) = \mathbb{P}_\lambda(\forall t > 0 \quad \xi_t^A \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\lambda(\tau^A = +\infty).$$

On récupère en particulier que nos définitions de la loi stationnaire supérieure coïncident. \square

\triangleright **Question.** La question difficile, et qui dépend de la nature du graphe, est celle de la convergence de la loi de ξ_t^A en temps long dans le cas surcritique.

7 Processus de contact sur \mathbb{Z}^d

Théorème 7.1 (Théorème de convergence complète, cas invariant par translation, [Har76])

Soit μ une mesure de probabilité sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, invariante par translation, avec $\mu(\{\emptyset\}) = 0$.

Alors $(\xi_t^\mu)_t$ converge en loi vers $\bar{\nu}$.

Démonstration.

Etape 1. Soit A une partie finie de \mathbb{Z}^d , non vide. Alors soit $|\xi_t^A| \rightarrow +\infty$, soit $\tau^A < +\infty$.

En effet, si à un moment tout les points vivants du processus de contact meurent avant même d'essayer de contaminer leurs voisins, alors le processus de contact meure :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}_\lambda(\tau^A < +\infty | \mathcal{F}_t) \geq \left(\frac{1}{1 + 2d\lambda |\xi_t^A|} \right)^{|\xi_t^A|},$$

$$\text{et donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\lambda(\tau^A < +\infty | \mathcal{F}_t) = \mathbf{1}_{\tau^A < +\infty} \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + 2d\lambda |\xi_t^A|} \right)^{|\xi_t^A|}.$$

Donc presque sûrement sur l'événement $\{\tau^A = +\infty\}$, $|\xi_t^A| \rightarrow +\infty$, et donc pour tout $N \geq 1$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\lambda(0 < |\xi_t^A| \leq N) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\lambda(0 < |\xi_t^A| \leq N, \tau^A < +\infty) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\lambda(|\xi_t^A| > N) = \mathbb{P}_\lambda(\tau^A = +\infty).$$

Etape 2. " μ est invariante par translation et ne charge pas \emptyset , donc ξ_s^μ va intersecter toute partie A de \mathbb{Z}^d suffisamment grosse avec grosse probabilité" :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall s > 0 \quad \exists N \quad \forall A \subset \mathbb{Z}^d \quad (|A| \geq N) \Rightarrow (\mathbb{P}_\lambda(\xi_s^\mu \cap A \neq \emptyset) \geq 1 - \epsilon).$$

On note $B_M = [-M..M]^d$ et $(\xi_t^{A, B_M})_t$ le processus de contact issu de $A \cap B_M$ ne se propageant que dans B_M . Si $|A| \geq N$, alors il existe une sous-partie A' de A , de cardinal au moins $N/(2M+1)^d$ telle que les boîtes $(i + B_M)_{i \in A'}$ soient deux-à-deux disjointes. En particulier, les $(\xi_t^{i, i+B_M})_t$ sont mutuellement indépendants. Par définition de ξ_s^μ et dualité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^\mu \cap A = \emptyset) &= \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^B \cap A = \emptyset) d\mu(B) = \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^A \cap B = \emptyset) d\mu(B) \\ &\leq \int \mathbb{P}_\lambda(\forall i \in A' : \xi_s^{i, i+B_M} \cap B = \emptyset) d\mu(B) \stackrel{\text{indep}}{=} \int \prod_{i \in A'} \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^{i, i+B_M} \cap B = \emptyset) d\mu(B) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\prod_{i \in A'} \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^{i, i+B_M} \cap B = \emptyset)^{|A'|} d\mu(B) \right)^{1/|A'|} \\ &\stackrel{\text{inv. par trans.}}{=} \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^{0, B_M} \cap B = \emptyset)^{|A'|} d\mu(B) \\ &\leq \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_s^{0, B_M} \cap B = \emptyset)^{N/(2M+1)^d} d\mu(B) \stackrel{\text{def.}}{=} f(M, N). \end{aligned}$$

Si $B \cap B_M \neq \emptyset$, alors $\mathbb{P}_\lambda(\xi_s^{0, B_M} \cap B = \emptyset) < 1$, et donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(M, N) = \int \mathbf{1}_{B \cap B_M = \emptyset} d\mu(B)$.

Comme $\mu - p.s. B \neq \emptyset$, $\lim_{M \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} f(M, N) = 0$.

Etape 3. Avec le lemme 6.1, il suffit de montrer que, pour toute partie A finie de \mathbb{Z}^d ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^\mu \cap A \neq \emptyset) = \int \mathbf{1}_{\{B \cap A \neq \emptyset\}} d\bar{\nu}(B).$$

Fixons $s > 0$ et A une partie finie de \mathbb{Z}^d . Choisissons $\varepsilon > 0$, et N donné par l'étape 2. Avec la propriété de dualité, pour tout $t > s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(\xi_{t+s}^\mu \cap A \neq \emptyset) &= \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_{t+s}^B \cap A \neq \emptyset) d\mu(B) \\ &= \int \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_s^B \neq \emptyset) d\mu(B) \text{ où } \xi_t^A \text{ et } \tilde{\xi}_s^B \text{ sont indépendants} \\ &\geq \sum_{C \text{ finie, } |C| \geq N} \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^A = C) \mathbb{P}_\lambda(C \cap \tilde{\xi}_s^\mu \neq \emptyset) \geq (1 - \varepsilon) \mathbb{P}_\lambda(|\xi_t^A| \geq N) \end{aligned}$$

et le résultat suit en prenant la limite quand $t \rightarrow +\infty$. \square

Corollaire 7.2 Toute loi μ , invariante par translation et stationnaire pour le processus de contact sur \mathbb{Z}^d , est combinaison convexe de δ_\emptyset et de $\bar{\nu}$.

Démonstration. $\mu = \mu(\{\emptyset\})\delta_\emptyset + (1 - \mu(\{\emptyset\}))\mu(\cdot|\{\emptyset\}^c)$, et $\bar{\mu} = \mu(\cdot|\{\emptyset\}^c)$ est encore invariante par translation et stationnaire pour le processus de contact sur \mathbb{Z}^d , et satisfait les hypothèses du théorème de convergence complète. Donc

$$\bar{\mu} = \mathcal{L}(\xi_t^{\bar{\mu}}) \rightarrow \bar{\nu}.$$

Ainsi, $\mu = \mu(\{\emptyset\})\delta_\emptyset + (1 - \mu(\{\emptyset\}))\bar{\nu}$. \square

On conclut cette partie sur le processus de contact dans \mathbb{Z}^d en donnant des résultats pour le processus issu d'un seul point, sans démonstration (voir l'article de survol de Durrett [Dur91]) :

Théorème 7.3

• **Convergence complète** (Bezuidenhout et Grimmett [BG90])

Pour tout $A \subset \mathbb{Z}^d$, ξ_t^A converge en loi vers $\mathbb{P}_\lambda(\tau^A < +\infty)\delta_\emptyset + \mathbb{P}_\lambda(\tau^A = +\infty)\bar{\nu}$.

• $0 < \lambda_1(\mathbb{Z}^d) = \lambda_2(\mathbb{Z}^d) < +\infty$ (Bezuidenhout et Grimmett [BG90]).

• Cas surcritique $\lambda > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$:

Shape theorem (Durrett et Griffeth [DG82], Bezuidenhout et Grimmett [BG90])

Il existe une norme μ sur \mathbb{R}^d , dont on note A_μ la boule unité, telle que, si H_t désigne le sous-ensemble des points de \mathbb{Z}^d déjà infectés avant le temps t , alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_\lambda \left(\exists T > 0 \quad \forall t \geq T \quad (1 - \varepsilon)A_\mu \subset \frac{H_t + [0, 1]^d}{t} \subset (1 + \varepsilon)A_\mu \mid \tau^0 = +\infty \right) = 1. \quad (3)$$

Inégalité de grandes déviations (Garet et Marchand [GM14])

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_\lambda(\forall s \geq t \quad (1 - \varepsilon)sA_\mu \subset H_s \subset (1 + \varepsilon)sA_\mu \mid \tau^0 = +\infty) \geq 1 - A \exp(-Bt). \quad (4)$$

• Cas sous-critique $\lambda < \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$:

Convergence vers la loi quasi-stationnaire (Deshayes et Rolla [DR17])

Le processus de contact sous-critique partant de \mathbb{Z}^d , convenablement renormalisé, converge en loi "vers sa loi quasi-stationnaire".

8 Processus de contact sur l'arbre régulier T_d avec $d \geq 2$

Théorème 8.1 (Pemantle [Pem92]) *Pour tout $d \geq 2$, $\lambda_1(T_d) \leq \frac{1}{d-1}$ et $\lambda_2(T_d) \geq \frac{1}{2\sqrt{d}}$. En particulier, pour tout $d \geq 6$, $\lambda_1(T_d) < \lambda_2(T_d)$.*

Il y a donc une double transition de phase pour le processus de contact sur l'arbre régulier (en fait, dès $d \geq 2$) : on peut montrer (voir chapitre I.4 dans le livre de Liggett [Lig99]) les résultats suivants

- Si $\lambda \leq \lambda_1(T_d)$, alors le processus de contact partant d'une partie A finie s'éteint presque sûrement, l'unique loi stationnaire du processus de contact est δ_\emptyset .
- Si $\lambda > \lambda_2(T_d)$, alors le processus de contact partant d'une partie A finie survit avec probabilité positive, et on a un théorème de convergence complète similaire à celui dans \mathbb{Z}^d (survie locale) ; toute loi stationnaire est combinaison convexe de δ_\emptyset et $\bar{\nu}$.
- Si $\lambda_1(T_d) < \lambda \leq \lambda_2(T_d)$, le processus de contact partant d'une partie A finie survit avec probabilité positive, mais en s'enfuyant vers l'infini : il converge en loi vers δ_\emptyset , mais $\bar{\nu} \neq \delta_\emptyset$. Dans ce régime, il existe une infinité de lois stationnaires extrémales.

Démonstration. • On fixe $\rho \in]0, 1[$, et on pose, pour tout $A \subset T_d$ fini, $v_\rho(A) = \rho^{|A|}$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_\lambda(v_\rho(\xi_t^A)) \right|_{t=0} &= \sum_{x \in A} (\rho^{|A|-1} - \rho^{|A|}) + \lambda \sum_{e=\{x,y\}: x \in A, y \notin A} (\rho^{|A|+1} - \rho^{|A|}) \\ &= \rho^{|A|} (1 - \rho) \left(\frac{|A|}{\rho} - \lambda |\{(x,y) : x \in A, y \notin A\}| \right). \end{aligned}$$

Dans T_d , chaque point a $d+1$ voisins, donc le nombre total d'arêtes orientées incidentes à A est $(d+1)|A|$; parmi ces arêtes, au plus $2(|A|-1)$ sont internes à A , donc, si $\rho\lambda(d-1) \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\{(x,y) : x \in A, y \notin A\}| &\geq (d+1)|A| - 2(|A|-1) = (d-1)|A| + 2 \geq (d-1)|A|, \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_\lambda(v_\rho(\xi_t^A)) \right|_{t=0} &\leq \rho^{|A|} (1 - \rho) \left(\frac{|A|}{\rho} - \lambda |\{(x,y) : x \in A, y \notin A\}| \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc si on peut trouver $\rho \in]0, 1[$ tel que $\rho\lambda(d-1) \geq 1$, alors $t \mapsto \mathbb{E}_\lambda(\rho^{|\xi_t^0|})$ est décroissant. Mais si $\mathbb{P}_\lambda(\text{extinction}) = 1$, alors par convergence dominée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_\lambda(\rho^{|\xi_t^0|}) = 1$.

• On choisit dans T_d un chemin bi-infini $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, et on définit $l : T_d \rightarrow \mathbb{Z}$ de la façon suivante : pour tout $x \in T_d$, on pose $n(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : e_n \leftrightarrow x\}$ et $l(x) = n(x) + d(n(x), x)$. L'idée est que chaque point a d descendants et un ascendant, et que l augmente de 1 quand on passe d'un point à un de ses enfants. Pour $\rho > 0$ et A fini, on pose

$$w_\rho(A) = \sum_{x \in A} \rho^{l(x)}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_\lambda(w_\rho(\xi_t^A)) \right|_{t=0} &= - \sum_{x \in A} \rho^{l(x)} + \lambda \sum_{x \in A} \sum_{y \notin A, x \sim y} \rho^{l(y)} \\ &\leq -w_\rho(A) + \lambda \sum_{x \in A} \rho^{l(x)} (d\rho + 1/\rho) = w_\rho(A) (\lambda(d\rho + 1/\rho) - 1). \end{aligned}$$

On choisit alors $\rho = 1/\sqrt{d}$ et $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}}$ pour annuler le second membre. Alors $(w_\rho(\xi_t^0))_t$ est une surmartingale positive, donc elle converge presque sûrement. Sur l'événement $\{\xi_t^0(0) = 1 \text{ infiniment souvent}\}$, $(w_\rho(\xi_t^0))_t$ doit sauter de ± 1 infiniment souvent : ceci impose que l'on n'a pas survie forte pour $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}}$. □

9 Processus de contact sur un graphe fini

Il n'y a pas de problème de définition du processus de contact sur un graphe fini : il s'agit d'une chaîne de Markov en temps continu, à espace d'état fini.

Lemme 9.1 Soit G un graphe fini, et $\lambda > 0$ fixé.

Alors \emptyset est absorbant, les autres états forment une classe communicante transitoire. Notons

$$\tau_{\emptyset}^A = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^A = \emptyset\}.$$

Alors, pour tout $A \subset V$, $\mathbb{P}_{\lambda}(\tau_{\emptyset}^A < +\infty) = 1$.

▷ **Question.** A quoi s'intéresse-t-on dans le cas fini ? On va considérer une suite $(G_n)_n$ une suite de graphe "tendant vers l'infini", et essayer d'avoir des informations sur le comportement asymptotique du temps d'extinction. Par exemple :

- Le temps d'extinction de processus de contact de paramètre λ partant de 0 dans la boîte de rayon N de \mathbb{Z}^d croît logarithmiquement en le volume de la boîte si $\lambda < \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ et exponentiellement en le volume de la boîte si $\lambda > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ (voir [Lig99]).
- Sur l'arbre régulier fini, la transition de phase a lieu en $\lambda_2(T_d)$, alors que sur le graphe aléatoire d -régulier, la transition a lieu en $\lambda_1(T_d)$ (voir l'article de Mourrat et Valesin [MV16]).

♣ **Exercice 7. Percolation orientée et processus de contact sur une étoile à k sommets** (d'après [Pem92]). On considère le graphe k -étoile constitué d'un centre et de k feuille. Le processus de contact, sur ce graphe fini, peut vivre très longtemps, ce qui explique que $\lambda_2(G)$ soit nul pour certains graphes à degré non borné.

1. Considérons la percolation orientée de paramètre p sur le graphe k -étoile (la percolation orientée est l'analogue en temps discret du processus de contact). Déterminer la loi du temps d'extinction du processus de contact partant du centre.

2. On prend $p = \theta/\sqrt{k}$. Comment se comporte le temps d'extinction ? Combien de feuilles s'attend-on à voir occupées ?

▷ **Question.** Et pour terminer, une piste de recherche (tirée de l'article de Mourrat et Valesin [MV16]) : le processus de contact sur le graphe d'Erdős-Rényi surcritique présente-t-il une transition de phase, et si oui pour quel paramètre critique ?

Références

- [Ald13] David Aldous. Interacting particle systems as stochastic social dynamics. *Bernoulli*, 19(4) :1122–1149, 2013.
- [BBCS05] Noam Berger, Christian Borgs, Jennifer T. Chayes, and Amin Saberi. On the spread of viruses on the internet. In *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 301–310. ACM, New York, 2005.
- [BG90] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4) :1462–1482, 1990.
- [DG82] Richard Durrett and David Griffeath. Contact processes in several dimensions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 59(4) :535–552, 1982.
- [DR17] Aurelia Deshayes and Leonardo Rolla. Scaling limit of subcritical contact process. *à paraître à SPA*, 2017.
- [Dur91] Rick Durrett. The contact process, 1974–1989. In *Mathematics of random media (Blacksburg, VA, 1989)*, volume 27 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 1–18. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

- [Dur07] Richard Durrett. Some features of the spread of epidemics and information on random graphs. *PNAS*, 2007.
- [GM14] Olivier Garet and Régine Marchand. Large deviations for the contact process in random environment. *Ann. Probab.*, 42(4) :1438–1479, 2014.
- [Har74] T. E. Harris. Contact interactions on a lattice. *Ann. Probability*, 2 :969–988, 1974.
- [Har76] T. E. Harris. On a class of set-valued Markov processes. *Ann. Probability*, 4(2) :175–194, 1976.
- [Har78] T. E. Harris. Additive set-valued Markov processes and graphical methods. *Ann. Probability*, 6(3) :355–378, 1978.
- [Lig85] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Lig99] Thomas M. Liggett. *Stochastic interacting systems : contact, voter and exclusion processes*, volume 324 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [MS16] Laurent Ménard and Arvind Singh. Percolation by cumulative merging and phase transition for the contact process on random graphs. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(5) :1189–1238, 2016.
- [MV16] Jean-Christophe Mourrat and Daniel Valesin. Phase transition of the contact process on random regular graphs. *Electron. J. Probab.*, 21 :Paper No. 31, 17, 2016.
- [Nor97] James Norris. *Markov chains*. Cambridge University Press, 1997.
- [Pem92] Robin Pemantle. The contact process on trees. *Ann. Probab.*, 20(4) :2089–2116, 1992.