

UNE THÉORIE ALGÈBRIQUE DES CHEMINS

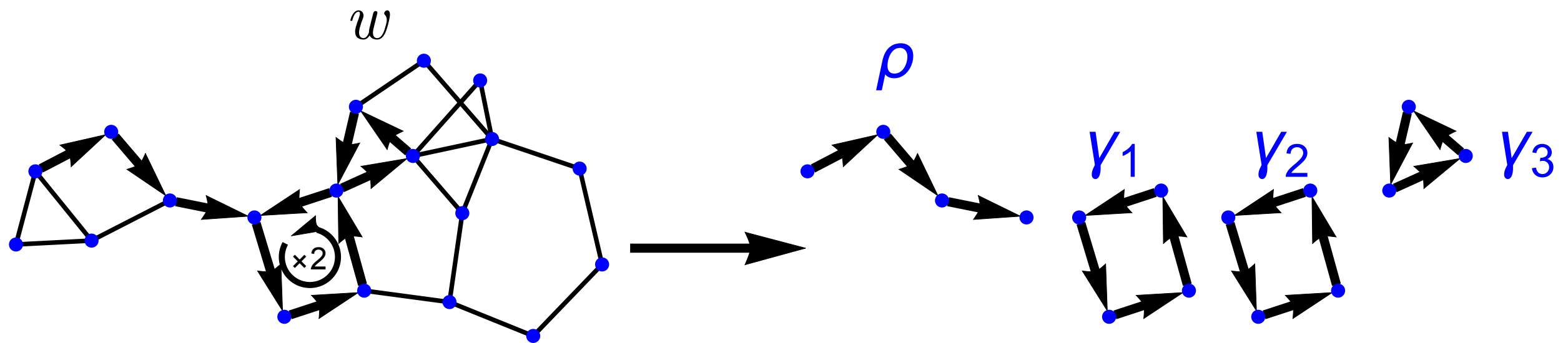
COMBINATOIRE SUR LES GRAPHS
& ANALYSE DES RÉSEAUX



Pierre-Louis Giscard, Paul Rochet

UNE THÉORIE DES CHEMINS?

► Gregory Lawler (1987)



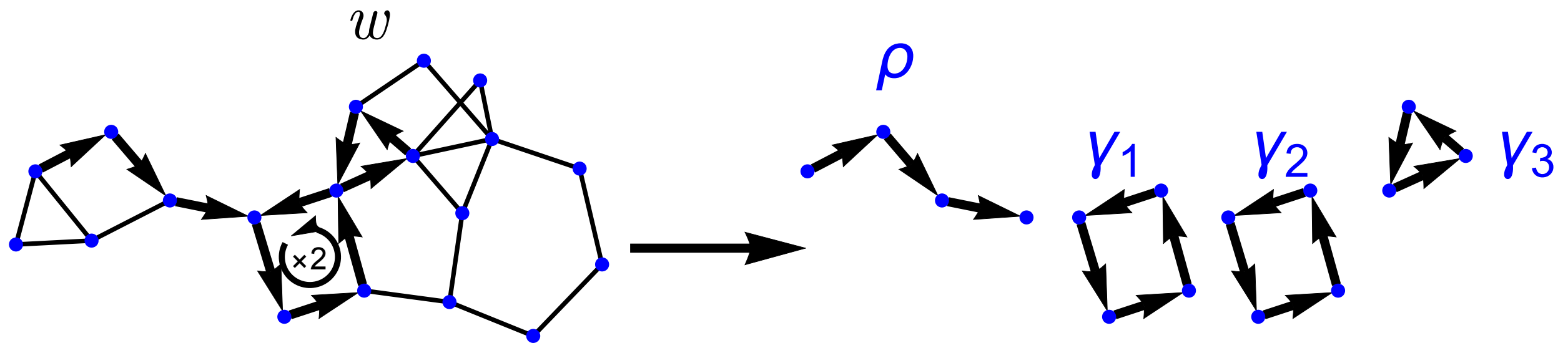
► Factorisation en cycles et chemins simples

Pour w, w' des cycles

cycles simples sont premiers $\gamma|w.w' \Rightarrow \gamma|w$ ou $\gamma|w'$

UNE THÉORIE DES CHEMINS?

► Gregory Lawler (1987)



► Factorisation en cycles et chemins simples

Pour w, w' des cycles

cycles simples sont premiers $\gamma|w.w' \Rightarrow \gamma|w$ ou $\gamma|w'$



Une théorie des nombres pour les chemins ?!

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

1) Formaliser l'observation de Lawler

► Cartier & Foata (1969)

Mots sur les arêtes e_{ij} d'un graphe, forment un monoïde $\mathcal{M}$ semi-commutatif

$$e_{ij} e_{ik} \neq e_{ik} e_{ij} \quad e_{ij} e_{kl} = e_{ij} e_{kl}$$

RANDONNÉES: $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{M}$, autant d'arêtes entrantes que sortantes (cycles)

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

1) Formaliser l'observation de Lawler

► Cartier & Foata (1969)

Mots sur les arêtes e_{ij} d'un graphe, on impose

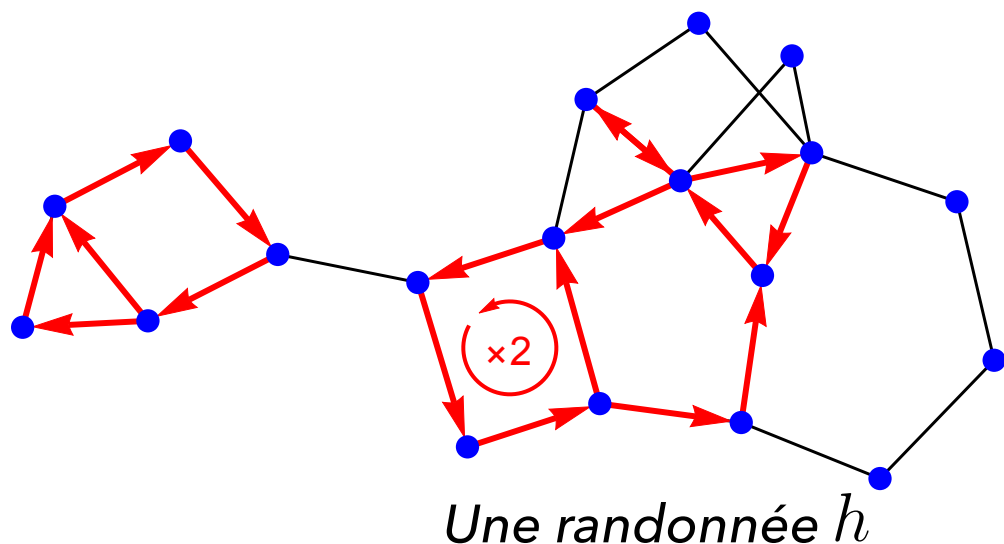
$$e_{ij} e_{ik} \neq e_{ik} e_{ij} \quad e_{ij} e_{kl} = e_{ij} e_{kl}$$

Classes d'équivalences forment un monoïde $\mathcal{M}$

RANDONNÉES: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$, autant d'arêtes entrantes que sortantes (cycles)

► Viennot (1987): empilements de pièces

$\mathcal{H}$ = empilements de cycles simples

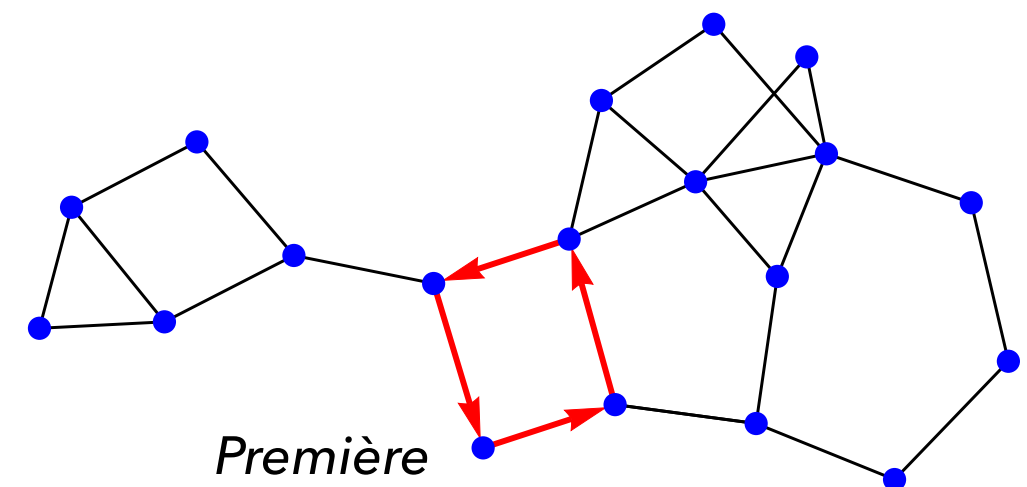
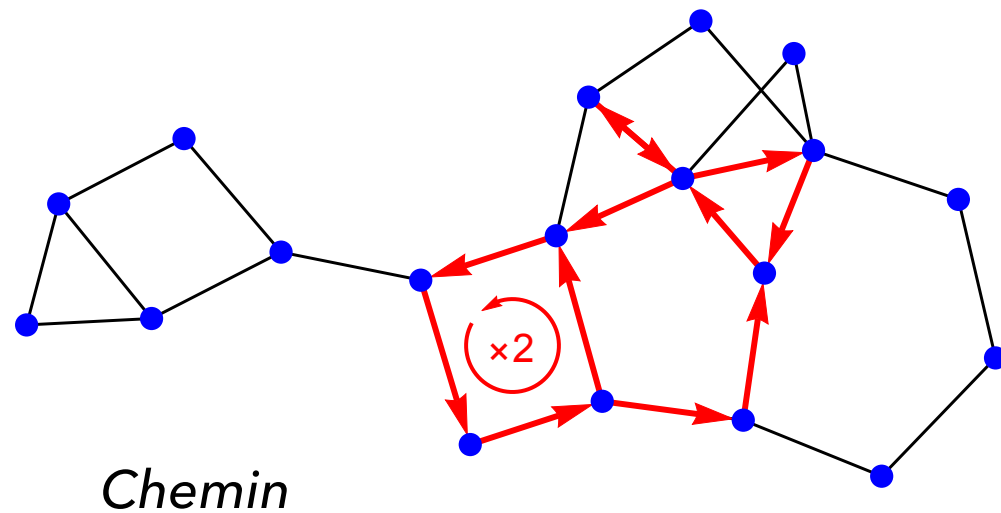
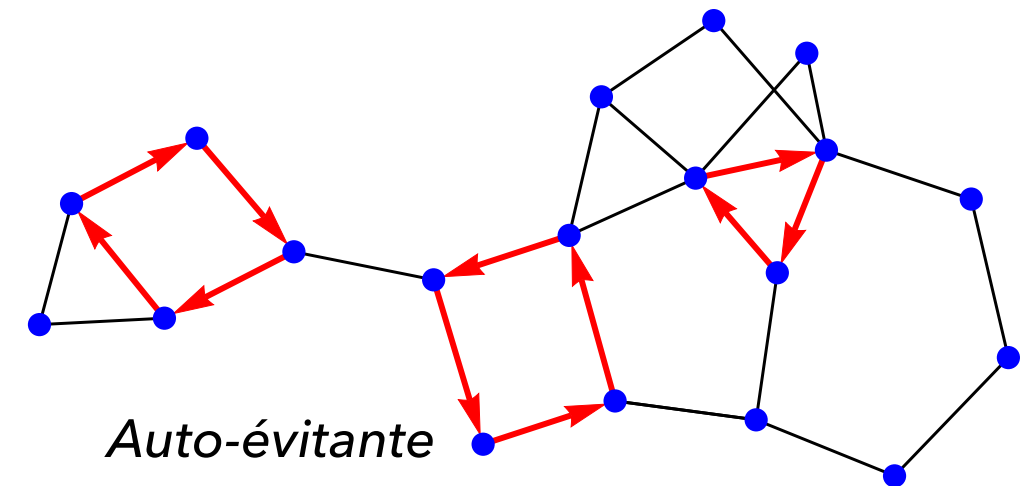
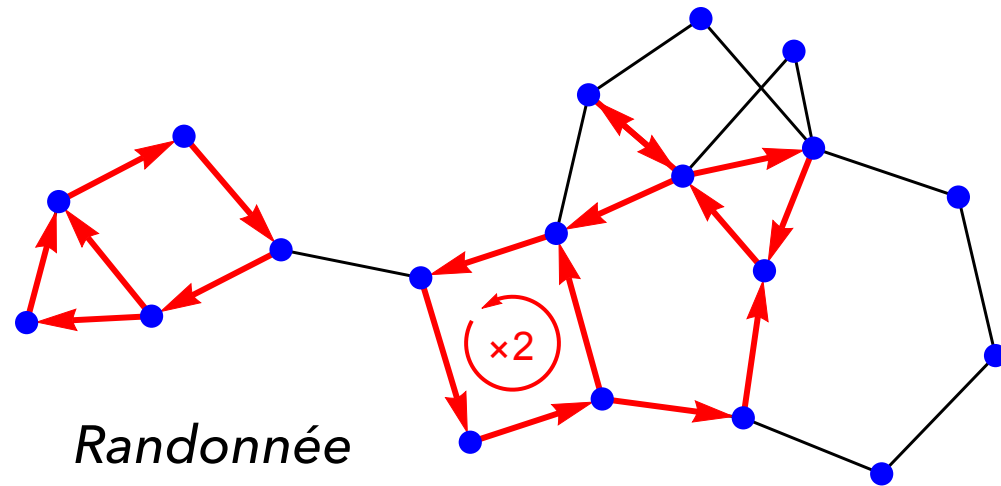


$$\gamma | h.h' \Rightarrow \gamma | h \text{ ou } \gamma | h'$$

$$h.h' = h'.h \iff \mathcal{V}(h) \cap \mathcal{V}(h') = \emptyset$$

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

Le bestiaire des randonnées



COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

2) Comment construire une théorie?

► Rota et al. (1964-1974):

Théorie des nombres à partir de posets!

Poset de randonnées ordonnées par divisibilité $P_{\mathcal{H}} := (\mathcal{H}, \leq)$

$$h|h' \Rightarrow h \leq h'$$

► Algèbre d'incidence $I(P_{\mathcal{H}})$: matrices Q indexées par $\mathcal{H}$

$$h \not\leq h' \Rightarrow Q_{h,h'} = 0, \quad h \leq h' \Rightarrow Q_{h,h'} \quad Q_{h,h} = 1$$

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

2) Comment construire une théorie?

► Rota et al. (1964-1974):

Théorie des nombres à partir de posets!

Poset de randonnées ordonnées par divisibilité $P_{\mathcal{H}} := (\mathcal{H}, \leq)$

$$h|h' \Rightarrow h \leq h'$$

► Algèbre d'incidence $I(P_{\mathcal{H}})$: matrices Q indexées par $\mathcal{H}$

$$h \not\leq h' \Rightarrow Q_{h,h'} = 0, \quad h \leq h' \Rightarrow Q_{h,h'} \quad Q_{h,h} = 1$$

$$Z_{h,h'} := 1 \iff h \leq h'$$

Matrices triangulaires, 1 sur la diagonale!

$$M := Z^{-1}$$

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

2) *Comment construire une théorie?*

► Doubilet, Rota (1972)

Débarrassons nous des matrices!

$$h_1 \leq h_2, \quad h_3 \leq h_4, \quad [h_1, h_2] \sim [h_3, h_4] \iff h_2/h_1 = h_4/h_3$$

$$Q_{h_1, h_2} = Q_{h_3, h_4} = q(h_2/h_1)$$

► *Réduction:*

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

2) *Comment construire une théorie?*

► **Doubilet, Rota (1972)**

Débarrassons nous des matrices!

$$h_1 \leq h_2, \quad h_3 \leq h_4, \quad [h_1, h_2] \sim [h_3, h_4] \iff h_2/h_1 = h_4/h_3$$

$$Q_{h_1, h_2} = Q_{h_3, h_4} = q(h_2/h_1)$$

► **Réduction:**

$$I(P_{\mathcal{H}}) \longrightarrow R(P_{\mathcal{H}}, \sim)$$

**Algèbre des séries
formelles sur le poset**

$$Q \rightarrow \sum_{h \in \mathcal{H}} q(h) e^{-s\ell(h)} h$$

$$Z \rightarrow \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-s\ell(h)} h = \zeta(s)$$

COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

2) *Comment construire une théorie?*

► Doubilet, Rota (1972)

Débarrassons nous des matrices!

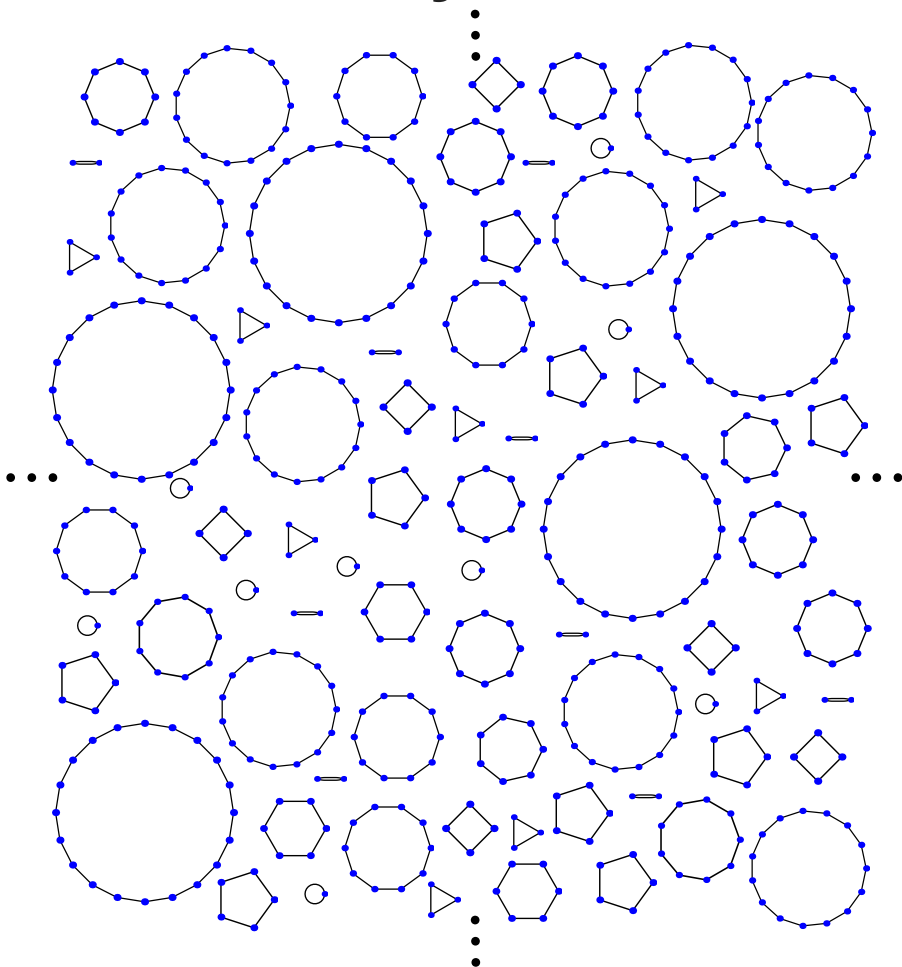


$$Q \rightarrow \sum_{h \in \mathcal{H}} q(h) e^{-s\ell(h)} h$$

$$Z \rightarrow \sum_{h \in \mathcal{H}} e^{-s\ell(h)} h = \zeta(s)$$

UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

► Si tout les cycles commutent



THÉORÈME

$R(P_{\mathcal{H}}, \sim) \longrightarrow$ Séries de Dirichlet
Théorie des nombres cas spécial

Randonnées	Théorie des nombres
Randonnée h	Entier n
h, h' disjointes	n, m copremiers
h auto-évitante	n sans facteur carré
h cycle simple	n premier
h chemin	$n = p^k$
Mais...	
$h.h' \neq h'.h$	$nm = mn$
h primitive orbit	n premier
h auto-commutante	n entier
$\vdots$	$\vdots$

UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

	Randonnées	Théorie des nombres
Zêta	$\zeta = \mathcal{S}1 = \sum_{h \in \mathcal{H}} h$ $\zeta = \frac{1}{\det(\mathbf{I} - \mathbf{W})}$	$\zeta_R(s) = \sum_{n > 0} \frac{1}{n^s}$
Möbius	$\mu(h) = \begin{cases} (-1)^{\Omega(h)}, & h \text{ auto-évitante} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$	$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\Omega(n)}, & n \text{ sans facteur carré} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$
Von Mangoldt	$\Lambda(h) = \begin{cases} \ell(p), & h \text{ chemin, } p h \text{ à droite} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ $\mathcal{S}\Lambda = \text{Tr} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{W})^{-1} \right]$	$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & n = p^k \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$
Liouville	$\lambda(h) = (-1)^{\Omega(h)}$ $\mathcal{S}\lambda = \frac{1}{\text{perm}(\mathbf{I} - \mathbf{W})}$ $\vdots$	$\lambda(h) = (-1)^{\Omega(n)}$ $\vdots$

► Zêta, Möbius déjà connues [Cartier & Foata \(1969\)](#), [Viennot \(1987\)](#) *pas le reste!*

UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

	Randonnées	Théorie des nombres
Nombre de diviseurs	ζ^2	$\zeta_R(s)^2$
Log Zêta	$\log \zeta = \sum_h \frac{\Lambda(h)}{\ell(h)} h$	$\log \zeta_R(s) = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} \frac{1}{n^s}$
Log-Mangoldt	$\ell(h) = \sum_{h' h} \Lambda(h')$	$\log(n) = \sum_{d n} \Lambda(n)$
Fonctions totalement multiplicatives	$f^{-1} = \sum_h \mu(h) f(h) h$ $f'/f = - \sum_h \Lambda(h) f(h) h$	$f^{-1} = \sum_n \frac{\mu(n) f(n)}{n^s}$ $f'/f = \sum_n \frac{\Lambda(n) f(n)}{n^s}$
Fonctions totalement additives	$(f * \mu)(h) = \begin{cases} f(p), & h \text{ chemin, } p h \text{ à droite} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$	$(f * \mu)(n) = \begin{cases} f(p), & n = p^k \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$
ζ'/ζ via les premiers	$- \sum_{\gamma: \text{ cycle simple}} \ell(\gamma) \frac{\det(\mathbf{I} - \mathbf{W}_{\setminus \gamma})}{\det(\mathbf{I} - \mathbf{W})}$	$- \sum_p \log p \frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}$
Série Ω	$\sum_{w: \text{ chemin}} w = \det(\mathbf{I} - \mathbf{W}) \sum_{h \in \mathcal{H}} \Omega(h) h$ $\vdots$	$\sum_{p,n} \frac{1}{p^{-ns}} = \zeta_R(s)^{-1} \sum_n \frac{\Omega(n)}{n^s}$ $\vdots$

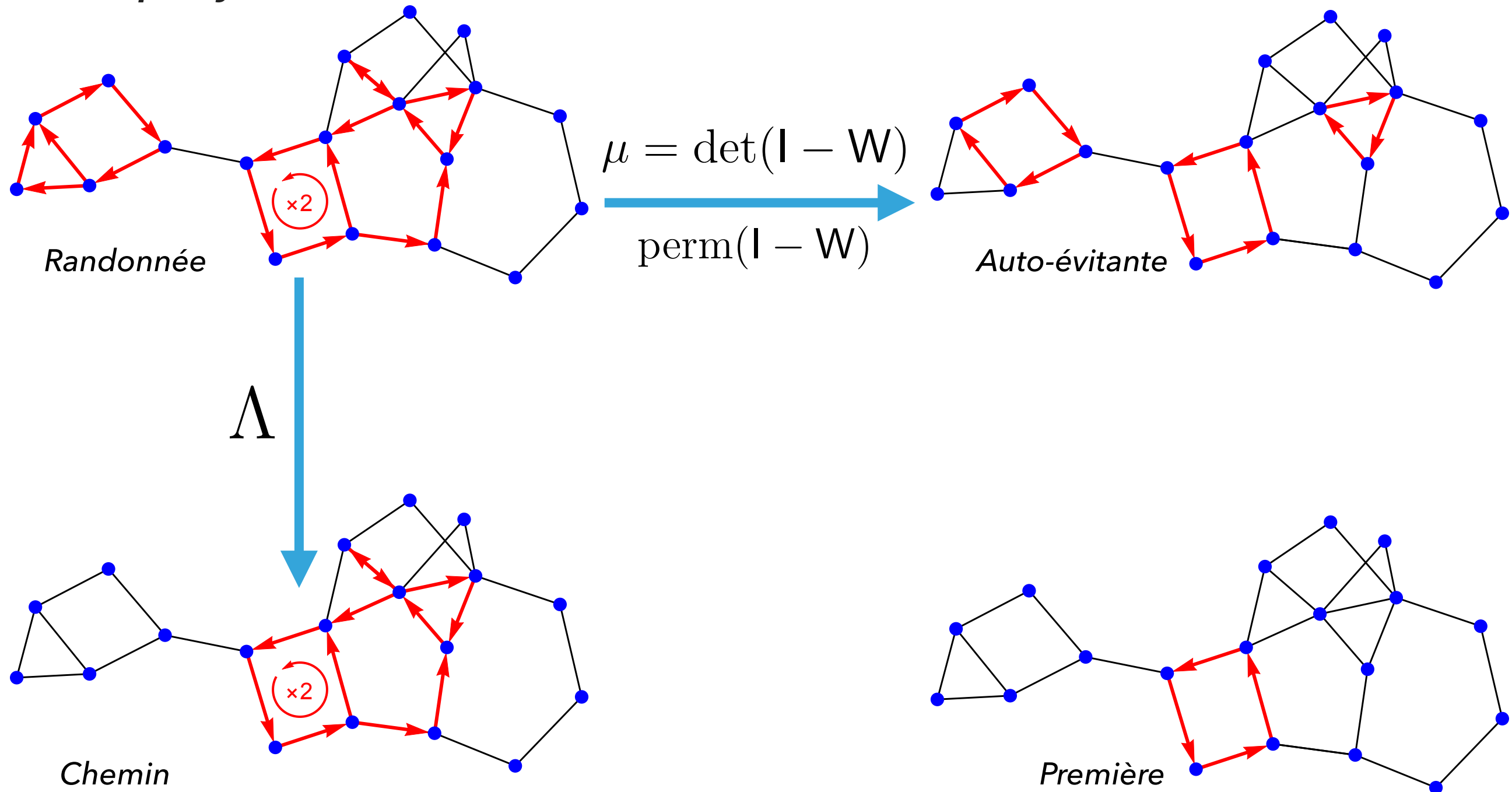
ET ALORS?

Si la théorie est mature on doit pouvoir l'utiliser concrètement

$$P(z) := \sum_{\gamma: \text{cycle simple}} z^{\ell(\gamma)}$$

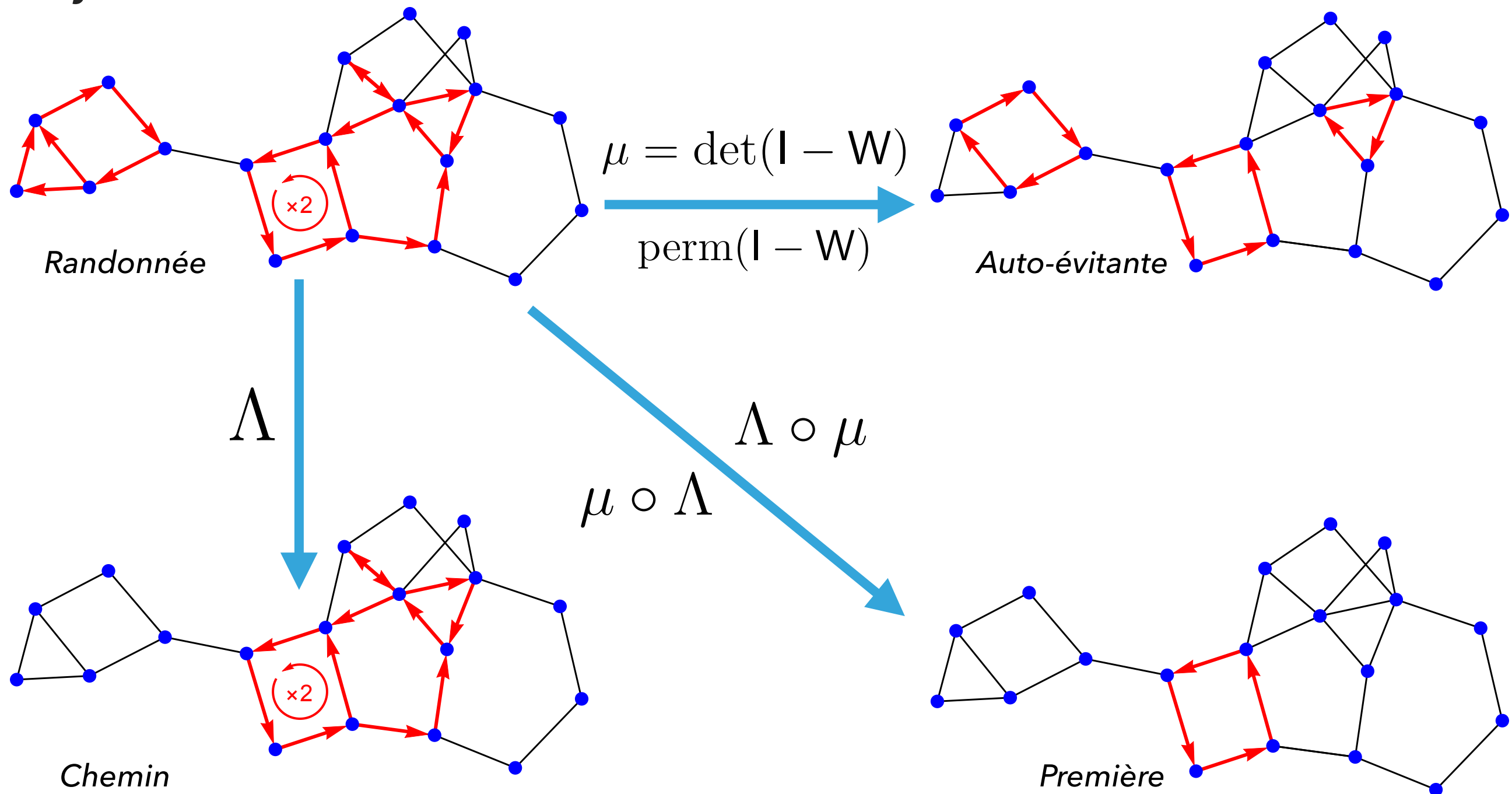
COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

Basic projections



COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

Projections



ET ALORS?

Si la théorie est mature on doit pouvoir l'utiliser concrètement

$$P(z) := \sum_{\gamma: \text{cycle simple}} z^{\ell(\gamma)}$$

► Ca marche!

$$\mu \circ \Lambda = \frac{d}{dz} P(z) = \sum_{\substack{H \prec G \\ H \text{ connecté}}} \text{Tr} \left((z\mathbf{A}_H)^{|H|} (\mathbf{I} - z\mathbf{A}_H)^{|N(H)|} \right)$$

$$\Lambda \circ \mu = \frac{d}{dz} P(z) = \sum_{H \prec G} \det(-z\mathbf{A}_H) \frac{d}{dz} \text{perm}(\mathbf{I} + z\mathbf{A}_{G-H})$$

► Combinatoire algébrique + théorie des nombres = **10 formules (!!)**

ET ALORS?

Conséquences directes: *combinatoire & analyse des réseaux*

$$\frac{d}{dz}P(z) = \sum_{\substack{H \prec G \\ H \text{ connecté}}} \text{Tr} \left((zA_H)^{|H|} (I - zA_H)^{|N(H)|} \right)$$

► **Algorithme:** compter jusqu'à ℓ coûte $O(V + E + (\ell^\omega + \ell\Delta)|S_\ell|)$

Meilleur algo. général si

"Moins de sous-graphes induits connectés que de cycles simples"

► [Matlab File Exchange « CycleCount »](#)

Solution à un vieux (1946) problème de sociologie $V = 130\,000 + \ell = 20$

► Formulation en fraction continues de toute fonction de matrices

► Solution à des problèmes de dynamique quantique

Propagation de croyance exacte sur tout les graphes (*belief prop.*)

ET ALORS?

Conséquences directes: *théorie des graphes*

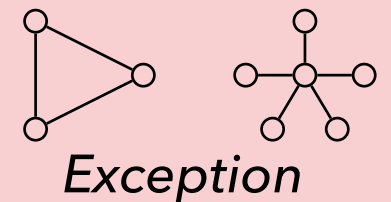
THÉORÈME

Graphes non-orientés connectés:

Le poset des randonnées $P_{\mathcal{H}}$

L'ensemble des commutateurs entre premiers

} Invariants
parfaits



ET SON ENNEMI JURÉ...

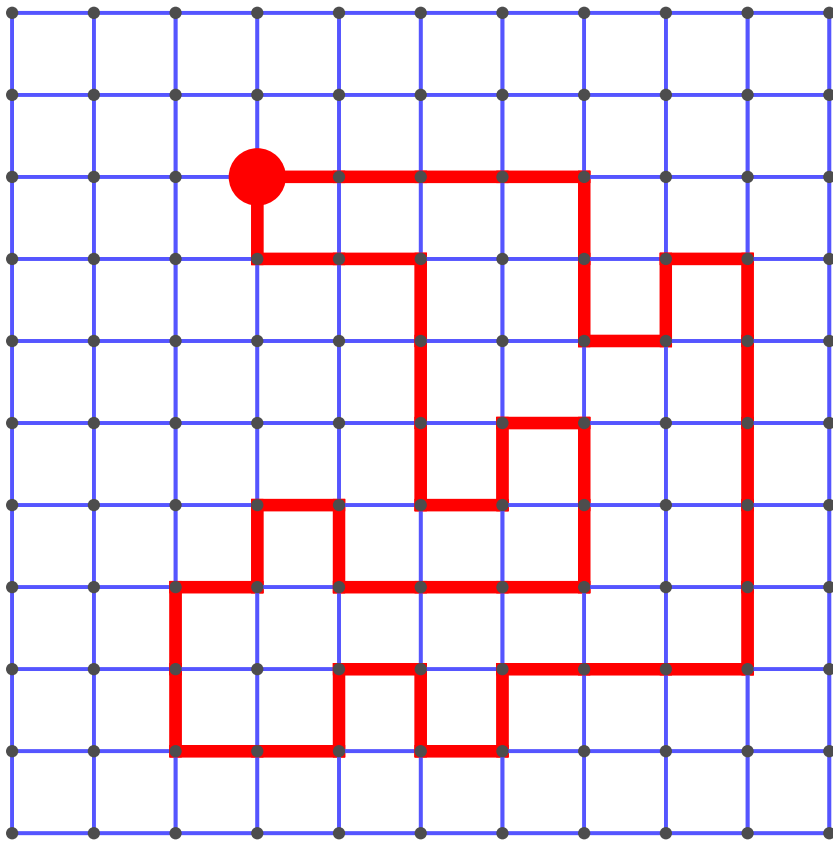
Graphes orientés: $\mathcal{H}$ tout entier ne suffit plus

Il existe des $P_{\mathcal{H}}$ sans graphe

} **Théorie des chemins
à part entière**

- ▶ Génération de paires cospectrales and co-immantales par Λ !
- ▶ Résilience des systèmes complexes

LES PREMIERS LONGS

« *A widely open problem* » Flajolet & Sedgewick

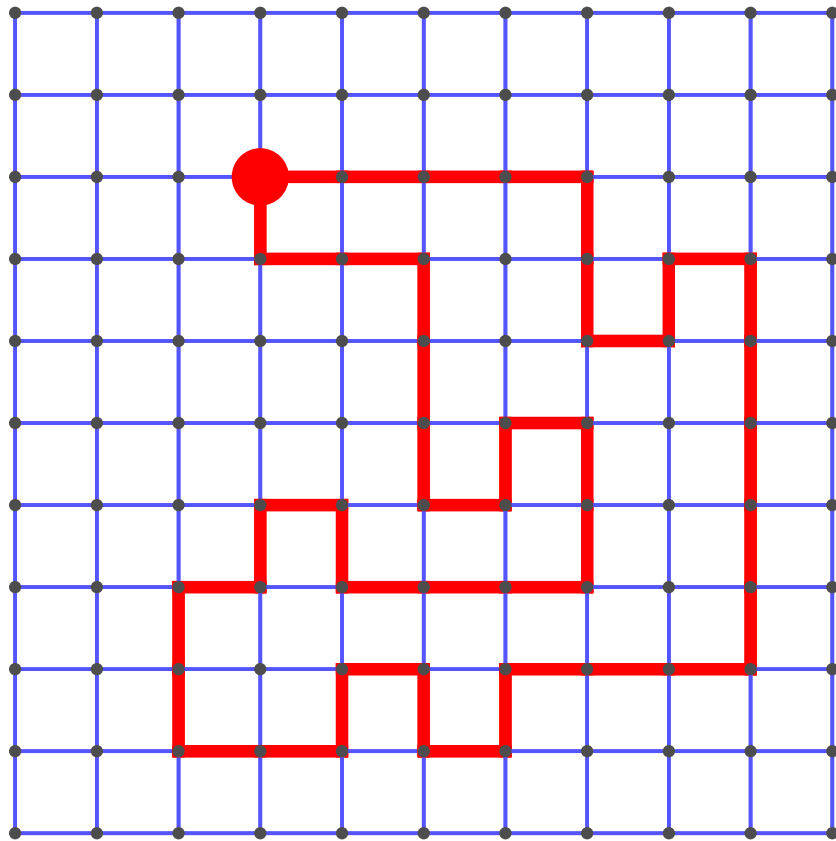
Combien de polygones auto-évitants?

Asymptotique $\ell \rightarrow \infty$?

$\mu^\ell \ell^{11/32}$

LES PREMIERS LONGS

« *A widely open problem* » Flajolet & Sedgewick



Combien de polygones auto-évitants?

Asymptotique $\ell \rightarrow \infty$?

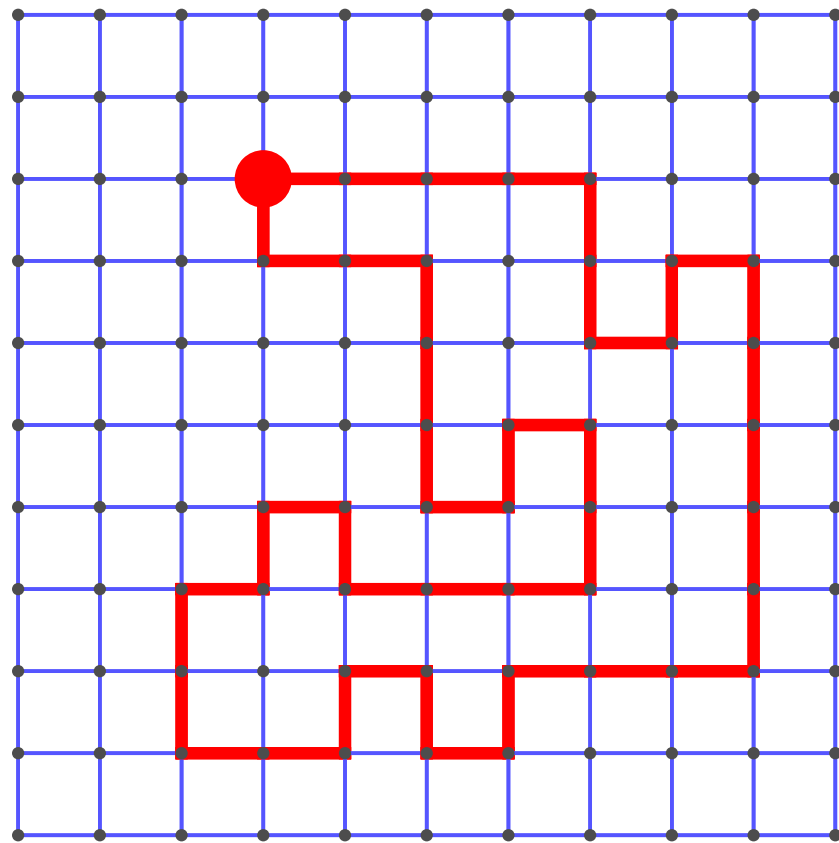
$$\mu^\ell \ell^{11/32}$$

*Extension semi-commutative du
théorème des nombres premiers*



LES PREMIERS LONGS

« A widely open problem » Flajolet & Sedgewick



Combien de polygones auto-évitants?

Asymptotique $\ell \rightarrow \infty$?

$$\mu^\ell \ell^{11/32}$$

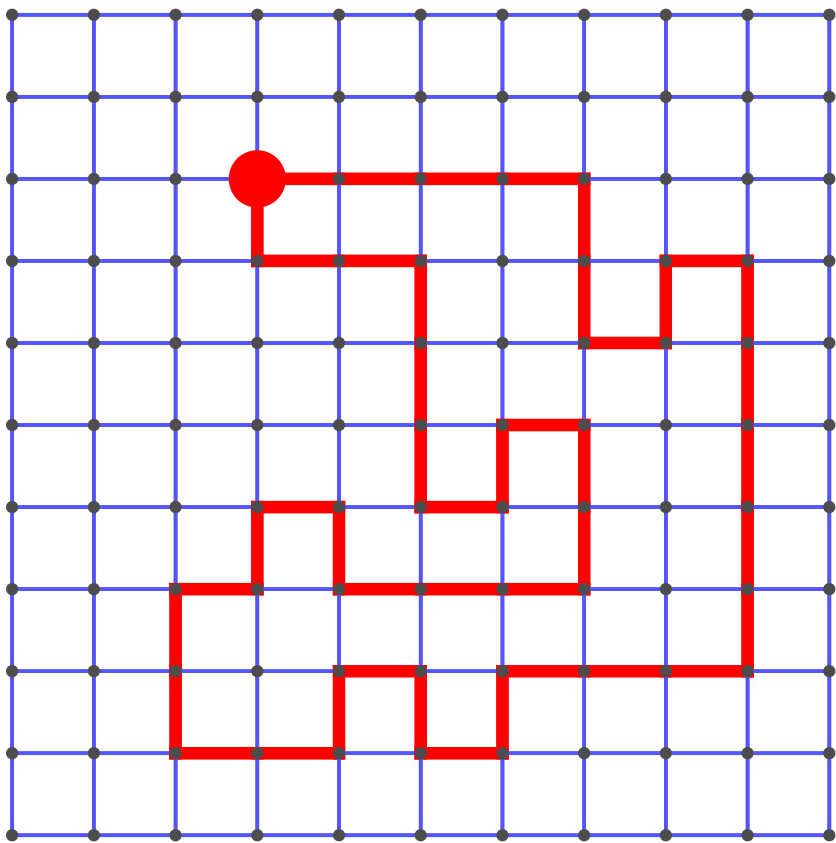
*Extension semi-commutative du
théorème des nombres premiers*



- ▶ Cribles d'Erathostènes-Legendre, Brun, Selberg
- ▶ Idempotents algébriques (fonctions-L, ζ , Ψ , ...)
- ▶ Abelianisation (homologie de Hochschild de $\mathcal{H}$)

LES PREMIERS LONGS

« A widely open problem » Flajolet & Sedgewick



Combien de polygones auto-évitants?

Asymptotique $\ell \rightarrow \infty$?

$$\mu^\ell \ell^{11/32}$$

Extension semi-commutative du théorème des nombres premiers

► Cribles d’Erathostènes-Legendre, Brun, Selberg

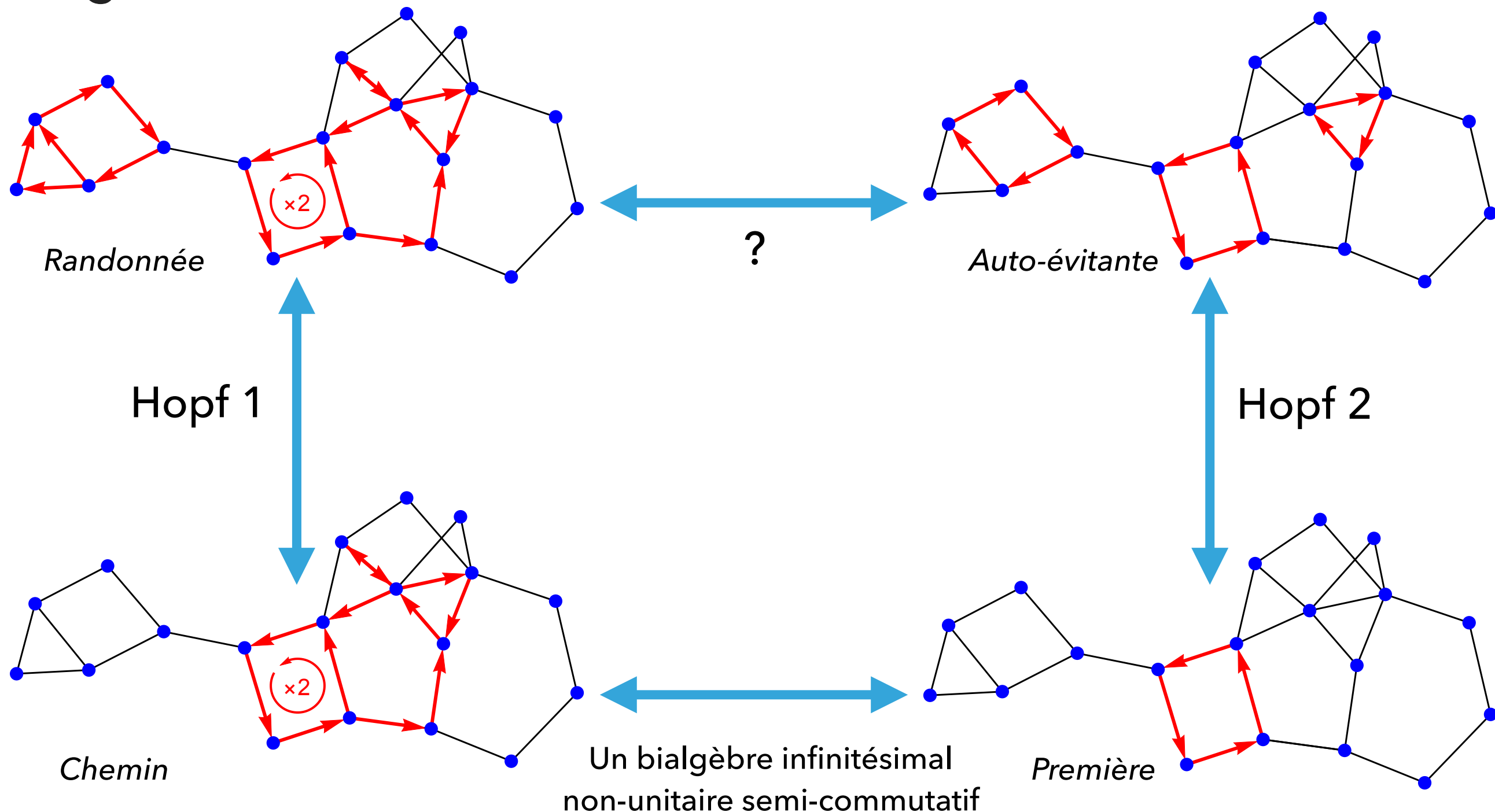


Réseau	Hexagonal	Kagomé	Carré	Triangulaire
$\frac{\lambda}{2} + \log \frac{\lambda}{2}$	1.91	2 (ordre 0)	2.69	4.10
μ	1.85	2.56	2.64	4.15

↪ Série de polylogs $\text{Li}_n(f(\lambda, \lambda^*))$?

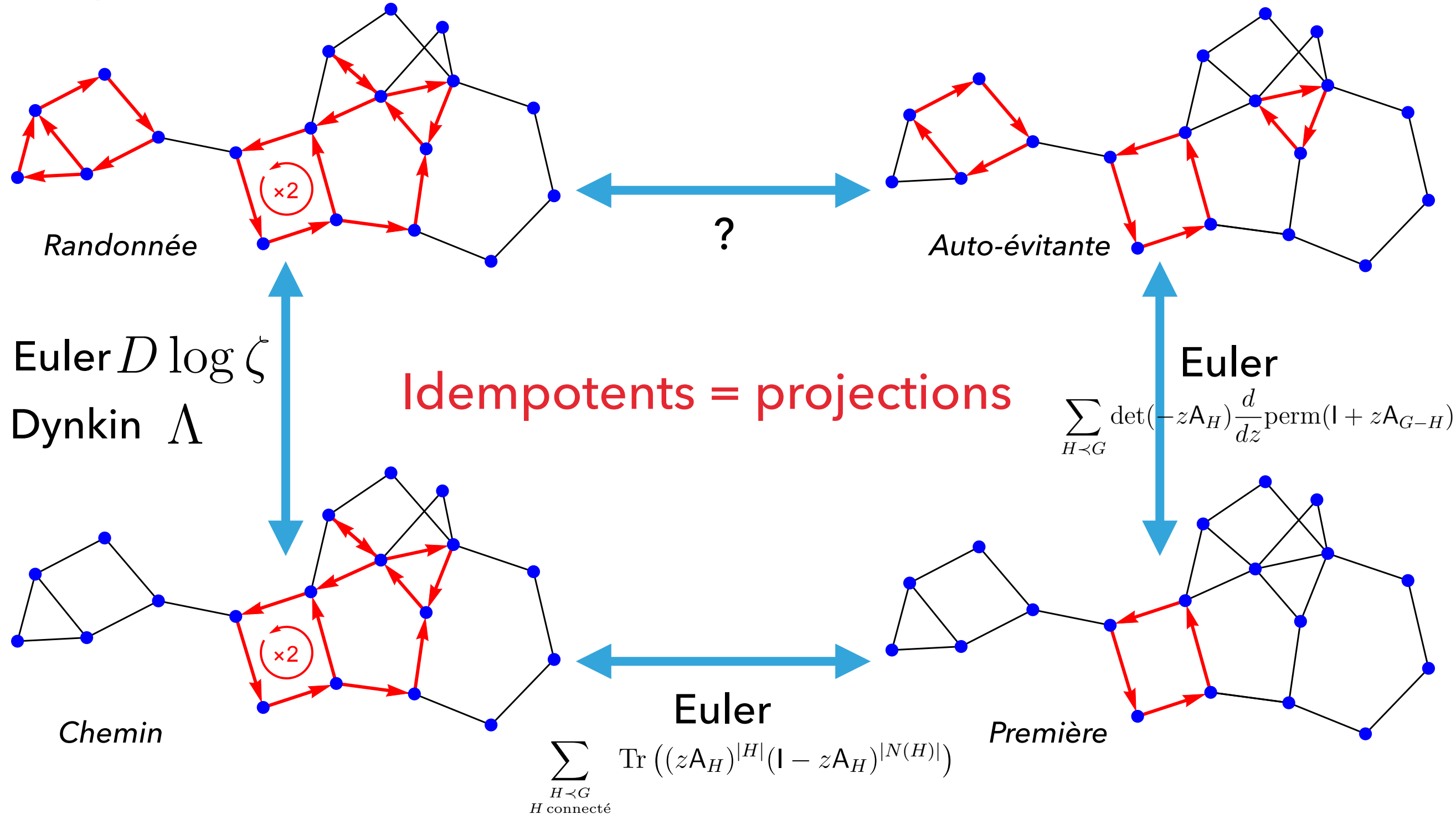
COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

Bialgèbres



COMBINATOIRE ALGÈBRIQUE DES RANDONNÉES

Bialgèbres



LES PREMIERS LONGS

« *A widely open problem* » Flajolet & Sedgewick

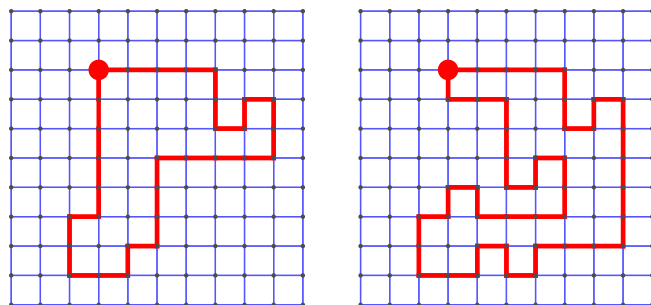
D'autres applications

$$\frac{d}{dz}P(z) = \sum_{\substack{H \prec G \\ H \text{ connecté}}} \text{Tr} \left((zA_H)^{|H|} (I - zA_H)^{|N(H)|} \right)$$

LES PREMIERS LONGS

« A widely open problem » Flajolet & Sedgewick

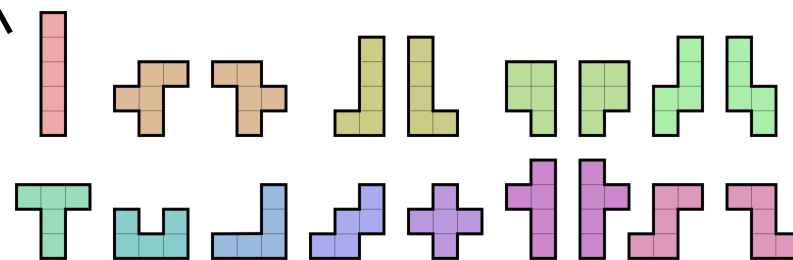
D'autres applications



$\sum_{\text{Polygones auto-évitants}}$

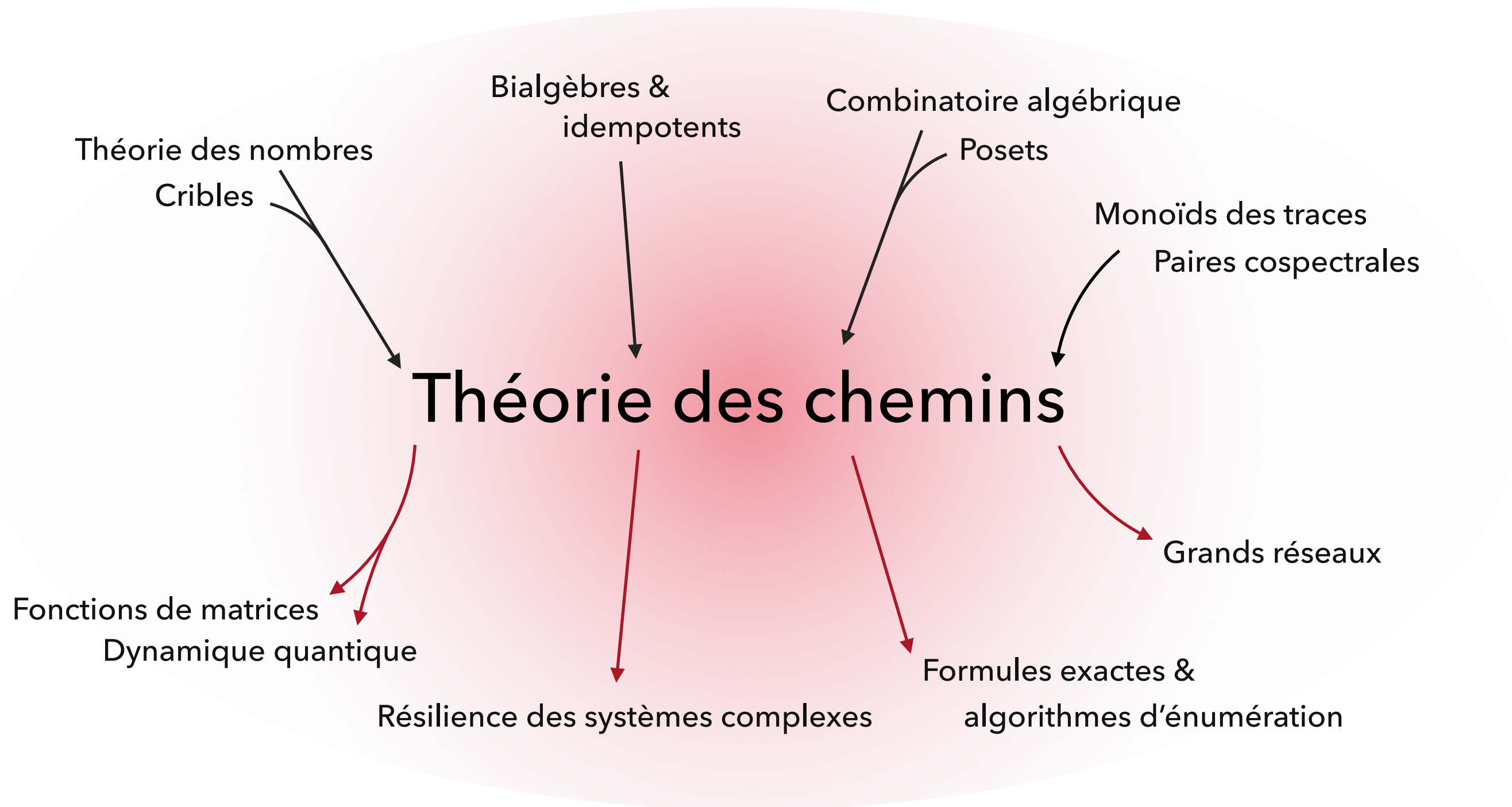
$$\ell(\gamma) z^{\ell(\gamma)} =$$

$$\sum_{\text{Polyominos}} \text{Tr} \left((zA_p)^{\text{Aire}(p)} (I - zA_p)^{\text{Périmètre}(p)} \right)$$



La croissance asymptotique des deux cotés de cette équation est inconnue!

VISION GLOBALE



APPROCHE LENTE ET SYSTEMATIQUE

RÉFÉRENCES 1

- P.-L. Giscard, P. Rochet. [Algebraic Combinatorics on Trace Monoids: Extending Number Theory to Walks on Graphs](#). *arXiv:1601.01780v2*, accepté *SIAM Journal on Discrete Mathematics* (2016a).
- P.-L. Giscard, P. Rochet. [Enumerating simple paths from connected induced subgraphs](#). *arXiv:1606.00289* (2016b).
- P.-L. Giscard, P. Rochet, R. C. Wilson. [An Hopf algebra for counting simple cycles](#). *arXiv:1607.00902* (2016c).
- P.-L. Giscard, P. Rochet, R. C. Wilson. [Evaluating balance on social networks from their simple cycles](#). *arXiv:1606.03347*, accepté *Journal of Complex Networks* (2016d).
- P.-L. Giscard, N. Kriege, and R. C. Wilson. [A general purpose algorithm for counting simple cycles and simple paths of any length](#). *arXiv:1612.05531* (2016e).
- P.-L. Giscard, Z. Choo, S. Thwaite, D. Jaksch. [Exact Inference on Gaussian Graphical Models of Arbitrary Topology using Path-Sums](#). *Journal of Machine Learning Research* **17**, 1-19 (2016f).
- N. Kriege, P.-L. Giscard, R. C. Wilson. [On Valid Optimal Assignment Kernels and Applications to Graph Classification](#). *29th Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)* (2016g).

- P. Cartier, D. Foata. [Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements](#). *Lecture notes in mathematics*, **85** (1969).
- G. X. Viennot. [Heaps of pieces, i: Basic definitions and combinatorial lemmas](#). *Annals of the New York Academy of Sciences*, **576**, pp. 542-570 (1989).