

# LE LAPLACIEN MASSIQUE $Z$ -INVARIANT SUR LES GRAPHES ISORADIAUX

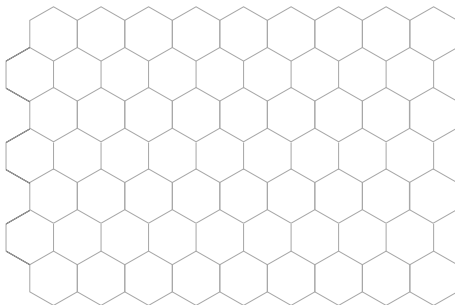
Béatrice de Tilière  
Université Paris-Est Créteil

en collaboration avec C. Boutillier, K. Raschel

Journées Aléa,  
CIRM, le 9 mars 2016

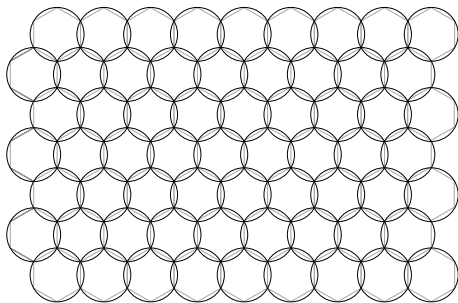
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



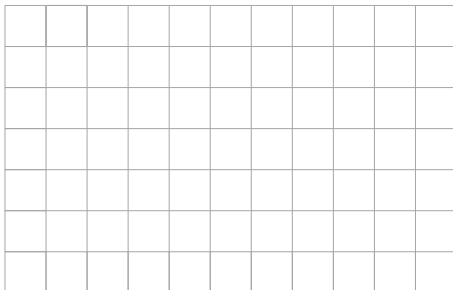
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



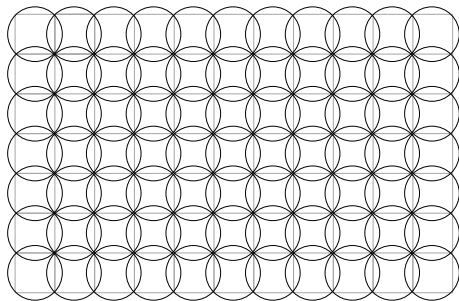
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



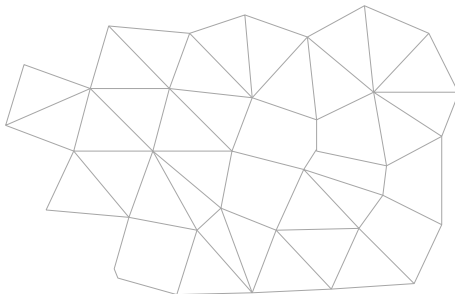
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



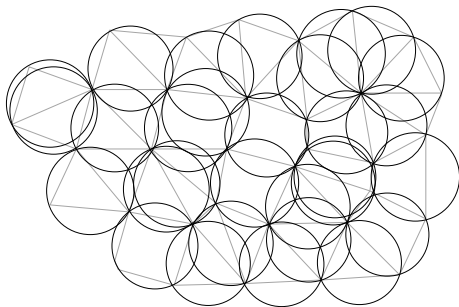
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



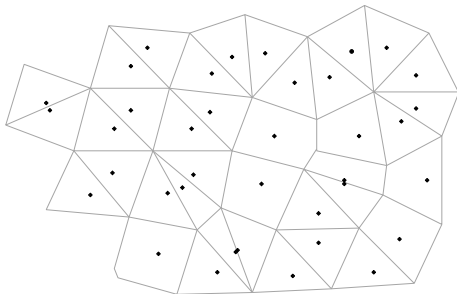
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



# GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

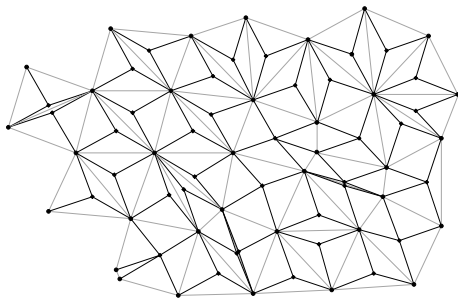
- ▶ On prend les centres des cercles circonscrits.





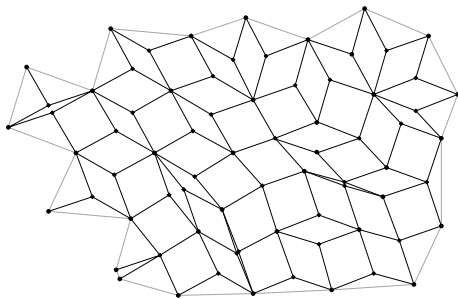
## GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe  $G$ .  
⇒ Graphe de losanges associé  $G^\diamond$ .



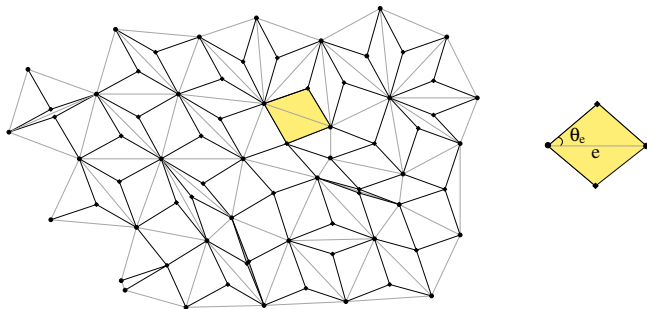
## GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe  $G$ .  
⇒ Graphe de losanges associé  $G^\diamond$ .



# GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

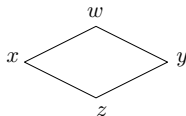
- ▶ On associe à chaque arête  $e$ , le demi-angle  $\theta_e$  du losange correspondant.



# ANALYSE COMPLEXE DISCRÈTE

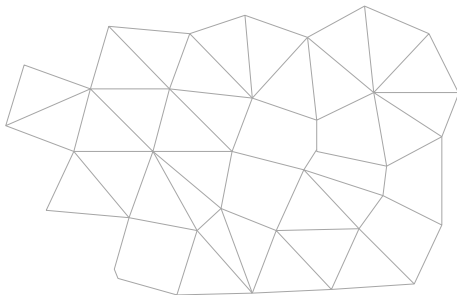
- ▶ Soit  $f$  une fonction définie sur les sommets de  $G$  et  $G^*$ .
- ▶ Elle est *holomorphe discrète* si, pour tout losange  $xwyz$ ,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$



# MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR LES GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Graphe isoradial  $G = (V, E)$ , fini.



- ▶ Ensemble de configurations sur  $G$  :  $\mathcal{C}(G)$ .

# MÉCANIQUE STATISTIQUE SUR LES GRAPHE ISORADIAUX

- ▶ Paramètres :

Fonction de poids  $w$  positive sur les arêtes / les sommets

$w$  dépend des angles  $(\theta_e)_{e \in E}$

- ▶ À une configuration  $C$ , on associe une énergie  $\mathcal{E}_w(C)$ .

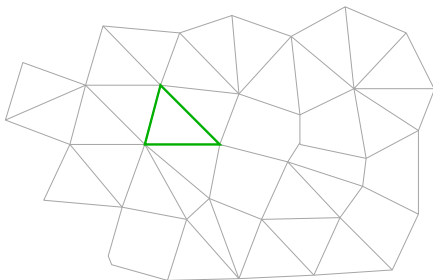
- ▶ Probabilité de Boltzmann sur les configurations :

$$\forall C \in \mathcal{C}(G), \quad \mathbb{P}(C) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(C)}}{Z(G, w)},$$

où  $Z(G, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} e^{-\mathcal{E}_w(C)}$  est la fonction de partition.

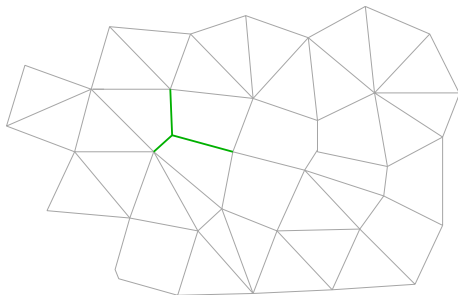
# MODÈLE Z-INVARIANT (BAXTER)

- ▶ Transformation  $\Delta - Y$  préserve l'isoradialité.



# MODÈLE Z-INVARIANT (BAXTER)

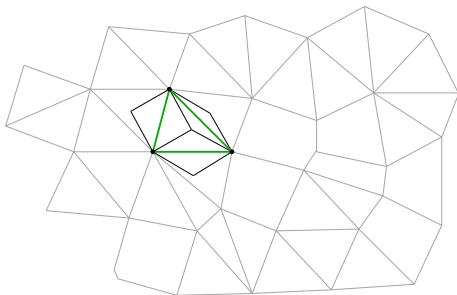
- ▶ Transformation  $\Delta - Y$  préserve l'isoradialité.





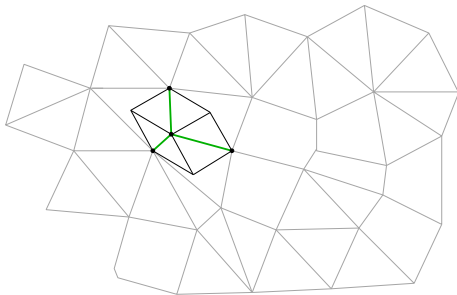
# MODÈLE Z-INVARIANT (BAXTER)

- ▶ Transformation  $\Delta - Y$  préserve l'isoradialité.

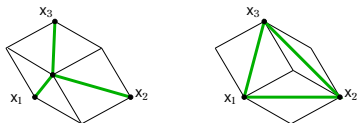


# MODÈLE Z-INVARIANT (BAXTER)

- ▶ Transformation  $\Delta - Y$  préserve l'isoradialité.



## MODÈLE Z-INVARIANT



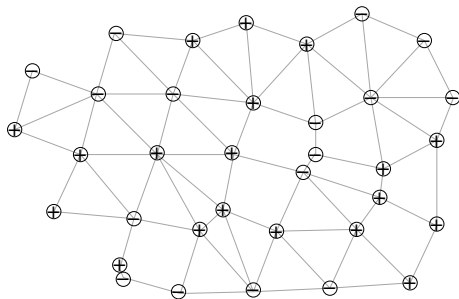
- ▶ Décomposition de la fonction de partition sur les configurations possibles en  $x_1, x_2, x_3$ .
- ▶ Le modèle est **Z-invariant** (Baxter) s'il existe une constante  $\mathcal{C}$ , telle que pour toute configuration au bord  $\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3)$ :

$$Z(\mathbf{G}_Y, w, \mathcal{C}(x_1, x_2, x_3)) = \mathcal{C} Z(\mathbf{G}_\Delta, w, \mathcal{C}(x_1, x_2, x_3)).$$

- ▶ Conséquences :
  - ⇒ Probabilités non-affectées par les transformations locales du graphe
  - ⇒ Expression pour les probabilités qui ne dépend que de la géométrie locale du graphe.

# MODÈLE D'ISING Z-INVARIANT

- ▶ Graphe isoradial fini  $G$ .



- ▶ Une **configuration de spins**  $\sigma$  associe à chaque sommet  $x$  du graphe  $G$  un spin  $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ .  
 $\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \{-1, 1\}^V =$  ensemble des configurations de spins.

# MODÈLE D'ISING Z-INVARIANT

- ▶ Constantes de couplage  $J = (J(\theta_e))_{e \in E}$ .
- ▶ Énergie d'une configuration de spins :  $\mathcal{E}_J(\sigma) = - \sum_{e=xy \in E} J(\theta_e) \sigma_x \sigma_y$ .
- ▶ Probabilité de Boltzmann d'Ising :

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^V, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J)},$$

où  $Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J) = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^V} e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}$  est la **fonction de partition**.

# MODÈLE D'ISING Z-INVARIANT SUR LES GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Baxter : Le modèle d'Ising est Z-invariant si

$$\forall e \in E, J(\theta_e) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta_e|k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta_e|k\right)} \right), \quad k \in [0, 1).$$

- ▶  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \tau}} d\tau$  : intégrale elliptique complète de 1<sup>ère</sup> espèce.
- ▶  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$  : fonctions elliptiques de Jacobi.
- ▶ Si  $k = 0$  :  $\forall e \in E, J(\theta_e) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$ .
  - ▶ Le modèle est critique (Li / Duminil-Copin - Cimasoni), invariant conforme (Chelkak - Smirnov).
  - ▶ Expression locale pour les probabilités du modèle de dimères correspondant (Boutillier - dT).
- ▶  $k \neq 0$  : travaux en cours (Boutillier - dT - Raschel).

# LE LAPLACIEN SUR LES GRAPHES PLANAIRE CRITIQUES (KENYON)

- ▶ Graphe isoradial infini  $G$ .
- ▶ **Conductances** :  $\rho = (\tan(\theta_e))_{e \in E}$ .
- ▶ Soit  $\Delta$  le **Laplacien discret** sur  $G$  représenté par la matrice  $\Delta$  :

$$\forall x, y \in V, \quad \Delta(x, y) = \begin{cases} \rho(\theta_{xy}) & \text{si } x \sim y \\ -\sum_{y \sim x} \rho(\theta_{xy}) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ▶ Le Laplacien  $\Delta$  est un opérateur de  $\mathbb{C}^V$  dans  $\mathbb{C}^V$ , tel que :

$$\forall f \in \mathbb{C}^V, \quad (\Delta f)(x) = \sum_{y \in V} \Delta(x, y) f(y) = \sum_{y \sim x} \rho(\theta_{xy}) (f(y) - f(x)).$$

- ▶ La restriction à  $G$  d'une fonction holomorphe discrète est harmonique discrète.

# LAPLACIEN SUR LES GRAPHES PLANAIRES CRITIQUES (KENYON)

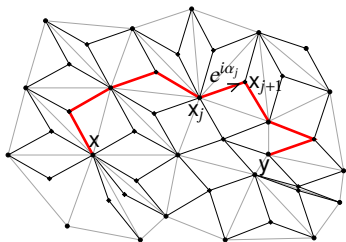
- ▶ La fonction de Green  $G$  est l'inverse du Laplacien :  $\Delta G = \text{Id}$ .
- ▶ Fonction exponentielle discrète (Mercat) :

$\text{Exp} : V^\diamond \times V^\diamond \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $x, y \in V^\diamond$ .

Chemin dans  $E^\diamond$  :  $x = x_1, \dots, x_n = y$ ,

$$\text{Exp}_{x_j, x_{j+1}}(\lambda) = \frac{(\lambda + e^{i\alpha_j})}{(\lambda - e^{i\alpha_j})}$$

$$\text{Exp}_{x,y}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} \text{Exp}_{x_j, x_{j+1}}(\lambda).$$



## THÉORÈME (KENYON)

La fonction de Green  $G$  admet l'expression explicite suivante :

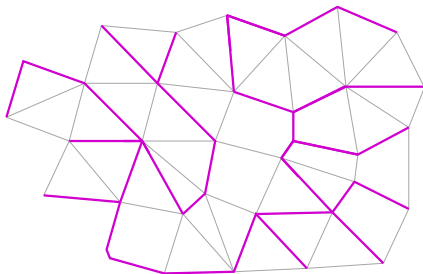
$$\forall x, y \in V, \quad G(x, y) = -\frac{1}{8\pi^2 i} \oint_{\gamma} \text{Exp}_{x,y}(\lambda) \log(\lambda) d\lambda,$$

où  $\gamma$  est un contour dans  $\mathbb{C}$ , contenant les pôles de  $\text{Exp}_{x,y}$ .



## LIEN AVEC LA MÉCANIQUE STATISTIQUE : ARBRES COUVRANTS

- ▶ On suppose  $G$  fini.
- ▶ Un **arbre couvrant** de  $G$  : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle.



$\Rightarrow \mathcal{T}(G) =$  ensemble des arbres couvrants de  $G$ .

- ▶ **Probabilité de Boltzmann des arbres** :

$$\forall T \in \mathcal{T}(G), \quad \mathbb{P}_{\text{arbre}}(T) = \frac{\prod_{e \in T} \rho(\theta_e)}{Z_{\text{arbre}}(G, \rho)}.$$

# LIEN AVEC LA MÉCANIQUE STATISTIQUE : ARBRES COUVRANTS

## THÉORÈME (KIRCHHOFF)

$$Z_{\text{arbre}}(\mathbf{G}, \rho) = \det \Delta^{(r)},$$

où  $\Delta^{(r)}$  est la matrice  $\Delta$  dont on a enlevé la ligne et la colonne correspondant à un sommet  $r$ .

## THÉORÈME (BURTON - PEMANTLE)

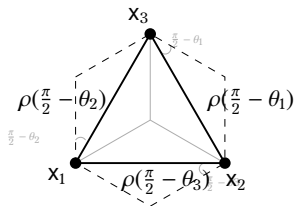
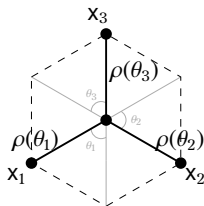
Pour tout sous-ensemble d'arêtes  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$  de  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbb{P}_{\text{arbre}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \det[(H(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{1 \leq i, j \leq k}],$$

où  $H$  est la matrice d'impédance de transfert. Les coefficients sont des différences de fonctions de Green.

► Résultats de Kenyon donne formule locale pour  $\mathbb{P}_{\text{arbre}}$  et pour l'énergie libre quand le graphe est infini.

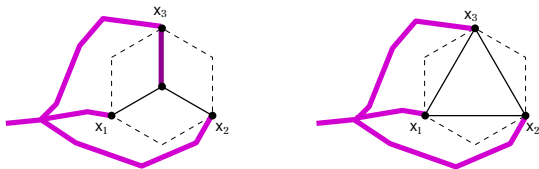
# Z-INVARIANCE POUR LES ARBRES COUVRANTS



Décomposer  $Z_{\text{arbre}}(\mathbf{G}, \rho)$  sur les configurations possibles en  $x_1, x_2, x_3$  :

- ▶  $x_1, x_2, x_3$  sont connectés à  $r$ .
- ▶  $x_i, x_j$  sont connectés à  $r$ ,  $x_k$  ne l'est pas.
- ▶  $x_i$  est connecté à  $r$ ,  $x_j, x_k$  ne le sont pas.
- ▶ Aucun des sommets n'est connecté à  $r$ .

# Z-INVARIANCE POUR LES ARBRES COUVRANTS



Exemple :  $x_1, x_2, x_3$  sont connectés à  $r$

	$C_Y$	$C_\Delta$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\sum_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell)$	1
$\{x_i, x_j\}$	$\rho(\theta_k) (\sum_{\ell \neq k} \rho(\theta_\ell))$	$\sum_{\ell \neq k} \rho(\frac{\pi}{2} - \theta_\ell)$
$\{x_i\}$	$\prod_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell)$	$\sum_{\ell=1}^3 \prod_{\ell' \neq \ell} \rho(\frac{\pi}{2} - \theta_{\ell'})$
$\{\emptyset\}$	0	0

## LEMME

Le modèle des arbres couvrants muni des conductances  $\rho = (\tan(\theta_e))_{e \in E}$  est  $Z$ -invariant.

## EN DEHORS DU POINT CRITIQUE ? LAPLACIEN MASSIQUE

- ▶ Soit  $k \in [0, 1)$  (le **module elliptique**),  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $\bar{\theta}_e = \frac{2K}{\pi} \theta_e$ .
- ▶ On définit les conductances et les masses sur  $G$  :

$$\forall e \in E, \rho(\theta_e) = \text{sc}(\bar{\theta}_e | k)$$

$$\forall x \in V, m^2(x) = \sum_{j=1}^n A(\bar{\theta}_j | k) - \frac{2}{k'} (K - E) - \sum_{j=1}^n \rho(\bar{\theta}_j | k).$$

- ▶  $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau} d\tau$  : **intégrale elliptique comp. de 2<sup>nd</sup>e espèce.**
- ▶  $A(u|k) = -\frac{i}{k'} E(iu|k')$ .
- ▶  $E(u|k) = \int_0^u \text{dn}^2(v|k) dv$  : **Fonction epsilon de Jacobi.**

# FAMILLE DE LAPLACIENS MASSIQUES

- ▶ Soit  $k \in [0, 1)$ .  
Soit  $G$  un graphe isoradial infini, muni des poids  $\rho, m^2$ .
- ▶ Soit  $\Delta^{m(k)}$  le **Laplacien massique** sur  $G$  représenté par la matrice :

$$\forall x, y \in V, \quad \Delta^{m(k)}(x, y) = \begin{cases} \rho(\theta_{xy}) & \text{si } x \sim y \\ -m^2(x) - \sum_{y \sim x} \rho(\theta_{xy}) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ▶ Le Laplacien massique  $\Delta^{m(k)}$  est un opérateur :

$$\forall f \in \mathbb{C}^V, \quad (\Delta^{m(k)}f)(x) = \sum_{y \sim x} \rho(\theta_{xy})(f(y) - f(x)) + m^2(x)f(x).$$

- ▶ La **fonction de Green massique**  $G^{m(k)}$  est l'inverse du Laplacien massique :  $\Delta^{m(k)}G^{m(k)} = \text{Id}$ .

# FUNCTION EXPONENTIELLE DISCRÈTE MASSIQUE

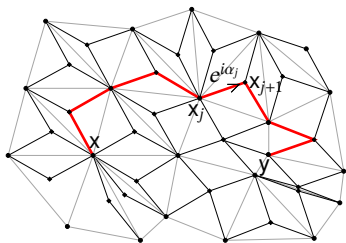
► **Function exponentielle discrète massique.** Soit  $\mathbb{T}(k) = \mathbb{C}/(4K\mathbb{Z} + i4K'\mathbb{Z})$ .

$\text{Exp}(\cdot | k) : V^\diamond \times V^\diamond \times \mathbb{T}(k) \rightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $x, y \in V^\diamond$ .

Chemin dans  $E^\diamond$  :  $x = x_1, \dots, x_n = y$ ,

$$\text{Exp}_{x_j, x_{j+1}}(u|k) = -i \sqrt{k'} \text{sc}(u_{\bar{\alpha}_j}), \quad u_{\bar{\alpha}_j} = \frac{u - \bar{\alpha}_j}{2}.$$

$$\text{Exp}_{x,y}(u|k) = \prod_{j=1}^{n-1} \text{Exp}_{x_j, x_{j+1}}(u|k).$$



## LEMME

*La fonction exponentielle discrète massique est bien définie, i.e., indépendante du choix de chemin de  $x$  à  $y$ .*

## PROPOSITION

*Pour tout  $u \in \mathbb{T}(k)$ , pour tout  $y \in V$ , la fonction  $\text{Exp}_{(\cdot, y)}(u|k) \in \mathbb{C}^V$  est harmonique massique :  $\Delta^m \text{Exp}_{(\cdot, y)}(u|k) = 0$ .*

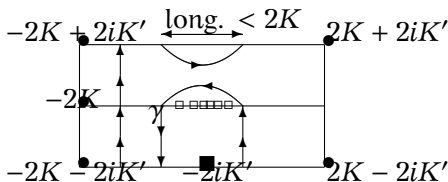
# EXPRESSION LOCALE POUR LA FONCTION DE GREEN MASSIQUE

## THÉORÈME

Pour tous sommets  $x, y$  du graphe  $G$ ,

$$G^{m(k)}(x, y) = -\frac{k'}{4i\pi} \oint_{\gamma_{x,y}} H(u|k) \text{Exp}_{x,y}(u|k) du,$$

où  $\gamma_{x,y}$  est le contour ci-dessous,  $H(u|k) = \frac{u}{4K} + \frac{K'}{\pi} Z(u/2|k)$  et  $Z$  est la fonction zeta de Jacobi.



Tore  $\mathbb{T}(k)$ , contour d'intégration  $\gamma_{x,y}$ . Les carrés blancs sont les pôles de  $\text{Exp}_{x,y}(\cdot|k)$ , le carré noir est le pôle de  $H$ .



# IDÉE DE LA PREUVE, CONSÉQUENCES

Idée de la preuve (Kenyon)

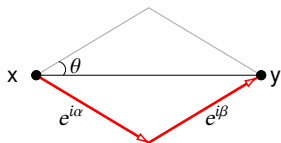
- ▶ Montrer que  $\forall x, y \in V, \Delta^{m(k)} G^{m(k)}(x, y) = \delta(x, y)$ .
- ▶ Si  $x \neq y$ , déformer les contours en un contour commun et utiliser le fait que les fonctions exponentielles sont dans le noyau de  $\Delta^m$ .
- ▶ Si  $x = y$ , Calcul explicite de résidus. Utiliser le saut de la fonction  $H$  sur le tore  $\mathbb{T}(k)$ .

## Conséquences

- ▶ Localité.
- ▶ Formule asymptotique pour  $G^{m(k)}(x, y)$ , lorsque  $|x - y| \rightarrow \infty$ .
- ▶ Calculs explicites.

## EXEMPLE DE CALCUL

Soit  $x, y$  voisins dans  $\mathbb{G}$ , alors :

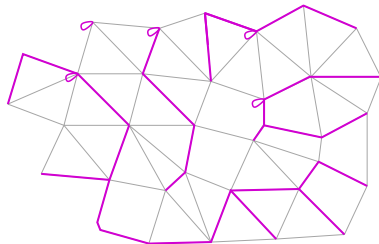


$$\text{Exp}_{x,y}(u) = -(k')^2 \text{sc}(u_{\bar{\alpha}}) \text{sc}(u_{\bar{\beta}}).$$

$$\begin{aligned} G^{m(k)}(x, y) &= \frac{(k')^2}{4i\pi} \oint_{\gamma} H(u) \text{sc}(u_{\bar{\alpha}}) \text{sc}(u_{\bar{\beta}}) du \\ &= \frac{(k')^2}{4i\pi} \oint_{\gamma} H(u) \text{sc}\left(\frac{u}{2}\right) \text{sc}\left(\frac{u - 2\bar{\theta}}{2}\right) du, \quad (\text{changement de variables}) \\ &= \frac{H(2K + 2\bar{\theta}) - H(2K)}{\text{sc}(\bar{\theta})} - \frac{K'k'}{\pi \text{dn}(\bar{\theta})}, \quad (\text{résidus en } 2K, 2K + 2\bar{\theta}, 2iK') \\ &= \frac{H(2\bar{\theta})}{\text{sc}(\bar{\theta})} - \frac{K' \text{dn}(\bar{\theta})}{\pi}, \quad (\text{formules d'addition pour } H). \end{aligned}$$

## FORMULE LOCALE POUR LES FORÊTS COUVRANTES

- ▶ Une **forêt couvrante** de  $G$  : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, tel que chaque composante connexe est un arbre enraciné.



$\Rightarrow \mathcal{F}(G) =$  ensemble des forêts couvrantes de  $G$ .

- ▶ **Probabilité de Boltzmann des forêts** :

$$\forall F \in \mathcal{F}(G), \quad \mathbb{P}_{\text{foret}}(F) = \frac{\prod_{T \subset F, T \text{ enraciné en } x} (\prod_{e \in T} \rho(\theta_e)) m^2(x)}{Z_{\text{foret}}(G, \rho, m^2)}.$$

- ▶ Expression explicite pour une mesure sur les forêts couvrantes d'un graphe isoradial infini, périodique ou non, obtenue comme limite faible des mesures sur une exhaustion.

# Z-INVARIANCE POUR LES FORÊTS COUVRANTES

	$C_Y$	$C_\Delta$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$m^2(x_0) + \sum_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell)$	1
$\{x_i, x_j\}$	$\rho(\theta_k) [\sum_{\ell \neq k} \rho(\theta_\ell)] + m^2(x_0) \rho(\theta_k) +$ $m^2(x_k) [\sum_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell) + m^2(x_0)]$	$\sum_{\ell \neq k} \rho(K - \theta_\ell) + m'^2(x_k)$
$\{x_i\}$	$\prod_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell) + m^2(x_0) \prod_{\ell \neq i} \rho(\theta_\ell) +$ $\sum_{\ell \neq i} m^2(x_\ell) \rho(\theta_{\overline{\{i, \ell\}}}) [\sum_{\ell' \in \{i, \ell\}} \rho(\theta_{\ell'})] +$ $m^2(x_0) [m^2(x_k) \rho(\theta_j) + m^2(x_j) \rho(\theta_k)] +$ $[\prod_{\ell \neq i} m^2(x_\ell)] [\sum_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell) + m^2(x_0)]$	$\sum_{\ell=1}^3 \prod_{\ell' \neq \ell} \rho(K - \theta_{\ell'}) +$ $\sum_{\ell \neq i} m'^2(x_\ell) [\sum_{\ell' \in \{i, \ell\}} \rho(K - \theta_{\ell'})] + \prod_{\ell \neq i} m'^2(x_\ell)$
$\{\emptyset\}$	$[\sum_{i=0}^3 m^2(x_i)] [\prod_{i=1}^3 \rho(\theta_i)] + m^2(x_0) \sum_{i=1}^3 m^2(x_i) \prod_{\ell \neq i} \rho(\theta_\ell) +$ $\sum_{i=1}^3 [\prod_{\ell \neq i} m^2(x_\ell)] \rho(\theta_i) [\sum_{\ell \neq i} \rho(\theta_\ell)] +$ $m^2(x_0) \sum_{i=1}^3 [\prod_{\ell \neq i} m^2(x_\ell)] \rho(\theta_i) +$ $[\prod_{i=1}^3 m^2(x_k)] [\sum_{i=1}^3 \rho(\theta_i) + m^2(x_0)]$	$[\sum_{i=1}^3 m'^2(x_i)] [\prod_{i=1}^3 \rho(K - \theta_\ell)] +$ $\sum_{i=1}^3 [\prod_{\ell \neq i} m'^2(x_\ell)] [\sum_{i \neq \ell} \rho(K - \theta_\ell)] +$ $\prod_{i=1}^3 m'^2(x_k)$

# Z-INVARIANCE POUR LES FORÊTS COUVRANTES

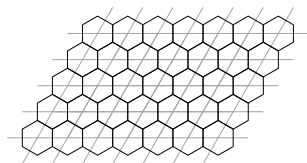
## THÉORÈME

*Pour tout  $k \in [0, 1)$ , le modèle des forêts couvrantes muni des poids  $\rho, m^2$ , est  $Z$ -invariant.*

- ▶ Lorsque  $k = 0$ ,  $\rho(\theta_e) = \tan(\theta_e)$ ,  $m^2(x) = 0$  : cas critique.

## SI LE GRAPHE $G$ EST $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUE

- ▶ Graphe isoradial, infini,  $\mathbb{Z}^2$ -périodique,  $G$ .
- ▶ Exhaustion torique du graphe  $G$  :  $G_n = G/n\mathbb{Z}^2$ .



L'énergie libre est :

$$f(k) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_{\text{foret}}(G_n, \rho, m^2).$$

### THÉORÈME

L'énergie libre est égale à :

$$f(k) = |V_1|S(K) + \sum_{e \in E_1} \left( \int_0^{\bar{\theta}_e} -4H'(2\omega) \log \text{sc}(\omega) d\omega + 2H(2\bar{\theta}_e) \log \text{sc}(\bar{\theta}_e) \right).$$

Lorsque  $k = 0$ , on retrouve le résultat de Kenyon.

# TRANSITION DE PHASE

## PROPOSITION

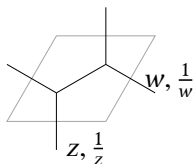
Lorsque  $k \rightarrow 0$ ,

$$f(k) = f(0) - k^2 \log(k) \left[ \frac{|V_1|}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{e \in E_1} \bar{\theta}_e \right] + O(k^2).$$

où  $f(0)$  est l'énergie libre des arbres couvrants.

# SI LE GRAPHE $G$ EST $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUE : COURBE SPECTRALE.

- ▶ Domaine fondamental :  $G_1$ .



- ▶  $\Delta^m(z, w)$  : matrice du Laplacien massique sur  $G_1$ , avec poids  $z, \frac{1}{z}, w, \frac{1}{w}$ .
- ▶ Polynôme caractéristique :  $P_{\Delta^m}(z, w) = \det \Delta^m(z, w)$ .
- ▶ Courbe spectrale du Laplacien massique :  $\{z, w \in \mathbb{C}^2 : P_{\Delta^m}(z, w) = 0\}$ .

## THÉORÈME

Pour tout  $k \in (0, 1)$ , la courbe spectrale du Laplacien massique est une courbe de Harnack de genre 1.