



Les cahiers
de Philippe Flajolet

Les cahiers de Philippe

Il y a 65 cahiers, écrits de 1980 à 2008, numérotés de 0 à 64

Il n'y écrit que son travail scientifique, mais l'écrit de manière personnelle.

Jusqu'en 2005, il les écrit avec beaucoup de soin...

Quand on travaillait avec lui, c'était interdit d'écrire sur les cahiers.

Puis, après 2008, les cahiers perdent de l'importance

Ils ne sont plus numérotés, sont écrits en parallèle...

Nous pensons que les cahiers numérotés présentent beaucoup d'intérêt.

Les cahiers numérotés de Philippe : une petite description

Deux cents pages par cahier

- ▶ écrites avec soin
- ▶ toutes les pages ne sont pas remplies
- ▶ Il y a aussi d'autres notes attachées
 - ▶ lettres reçues
 - ▶ feuilles de calcul Maple
- ▶ Ils sont écrits dans l'ordre chronologique, jour après jour
- ▶ Les sujets changent donc d'une page à l'autre
 - ▶ il s'intéresse à plusieurs sujets en même temps,
 - ▶ il assiste à des séminaires,
 - ▶ il rédige des notes de lecture.

La lecture de ces cahiers est à la fois instructive et passionnante...

Philippe pensait lui-même qu'ils pouvaient nous être utiles.

P. Flajolet



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 107 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Téléphone : 01 (1) 39 60 31 31 - Télécopie : 01 (1) 39 60 31 32 - Telex : 310707 INRIA F

AGENDA XXXI

October 1996

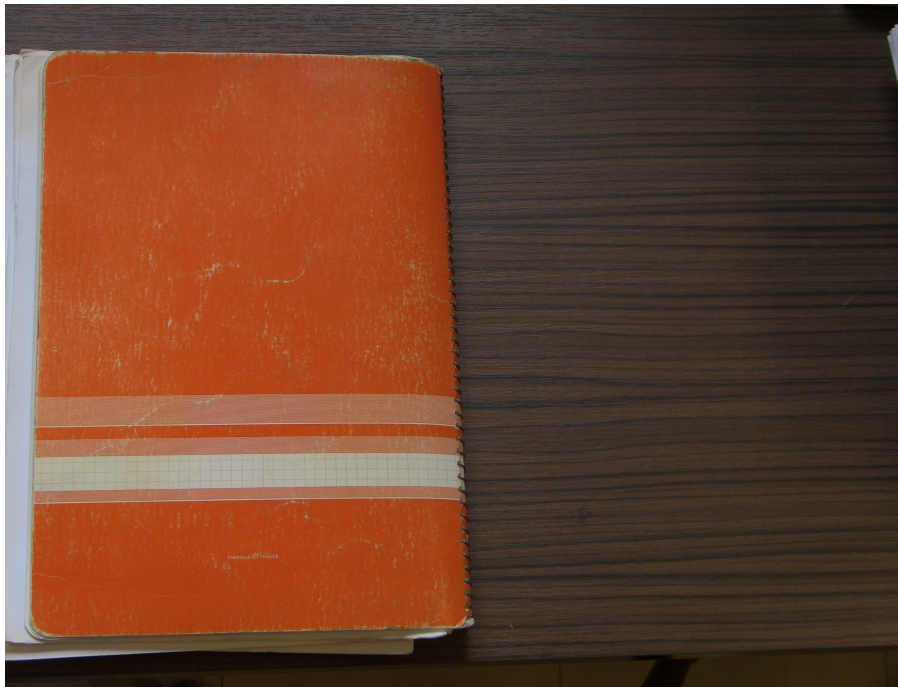
→ December 1996 -

7
CONQUERANT



180 pages - 70 g - papier N°3
N° 64





Algorithm de Gauss

13/10/23

Temps de calcul: 5(n) de l'ordre de 5 secondes au préavis de 20 digits
 Coût de vibration en 100 digits ou 4 msec./vibration.

Stanhos transformation applied to $R(K \geq 4)$.

Proposition Let $f(z_1, \dots, z_n)$ be a rational function of $(z_1, \dots, z_n)$ such that
 (a) $f(z_1, -z_2) = z_1^2 - z_2^2$ ~~if~~ $g(z_1, -z_2)$ where $g(z_1, -z_2)$ is analytic in the domain $0 \leq \text{Re}(z_1) \leq 2$.

Then the constant

$$C = \sum_{n_1, \dots, n_n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_n}\right)$$

is in $\mathbb{Z}$ (provided the expansion).

Proof: As f is analytic at the origin, there exists a constant M such that f is analytic in the disk $|z_j| \leq 1/4$. We design the smaller domain as

$$D^k = ([1, 1] \cup [11, \infty])^k$$

which gives rise to 2^k domains when ~~split~~ subdividing the product. The sum is split accordingly into 2^k partial sums.

The partial sum ~~corresponding~~ ^{corresponding} to the first domain $[1, 1]^k$ is computed ~~directly~~ by direct evaluation.

The partial sum corresponding to the ~~first~~ ~~partial~~ ~~sum~~ ~~of~~ $[11, \infty]^k$ is computed by means of the expansion.

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \geq 11} F\left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_k}\right) = \sum_{n_1, \dots, n_k} f_{n_1, \dots, n_k} \sum_{n_1} f_{n_1} \dots \sum_{n_k} f_{n_k} \quad (2k)$$

Richardson (N=5)

1	0.0101826345815	$9 \cdot 10^{-5}$	→ requires $N \approx 20$
5	0.0102706209322		→ requires $N \approx 50$
10	0.0102773802941	$7 \cdot 10^{-6}$	→ requires $N \approx 160$
15	0.0102780141969	$7 \cdot 10^{-7}$	→ requires $N \approx 320$ roughly

$N = 500, 1000, 2000, \dots$ ($R = 5$)

Stanhos. ($K=4$)

5:	0.010295747007	→ $2 \cdot 10^{-5}$
10:	0.010279803	→ $1 \cdot 10^{-6}$
15:	0.0102786442922	→ $1 \cdot 10^{-7}$
20:	0.010278107623	

To 1280 know 0.01027814581.

Truncated sum ~~underlies~~ ^{underlies} (no analysis)

5:	-0.0097983	$5 \cdot 10^{-4}$
10:	-0.0101851	$1 \cdot 10^{-4}$
15:	-0.0102487	$3 \cdot 10^{-5}$
20:	-0.01026329	$1.5 \cdot 10^{-5}$

Cahiers

Travail réalisé

- ▶ 64 cahiers, 8000 photos (à Caen)
- ▶ Mise en forme (Hsei-Kuei Hwang, Taïwan)

Projet

- ▶ Indexation
 - ▶ Difficultés : Notes prises au jour le jour
 - ▶ Site participatif : associer des tags ou des mots clés aux pages ?
→ appel à volontaires
- ▶ Mise à disposition via un site web

AGENDA I

MARS 1980

JANVIER 1982



INSTITUT
DE RECHERCHE
D'INFORMATIQUE
ET D'AUTOMATIQUE

DOMAINE DE VOLUCEAU, ROCQUENCOURT-BP105
78150-LE CHESNAY. 954.90.20-TELEX: IRIA 697033 F

P. Flajolet

MARCH '80 - JANUARY '82


```
(c60) @;
(c60) mm(0);
Time- 368 msec.
```

(d60)

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-4x}}{2} \longrightarrow C_{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

```
(c61) mm(1);
Time- 1035 msec.
```

(d61)

$$\frac{\sqrt{1-4x} \cdot x}{2(4x-1)} - \frac{x}{2(4x-1)} \longrightarrow C_{n+1} = \frac{1}{2} (4^n - \binom{2n}{n})$$

```
(c62) mm(2);
Time- 6020 msec.
```

(d62)

$$\frac{x(2x-1)}{(4x-1)^2} - \frac{\sqrt{1-4x} \cdot x(10x^2-4x+1)}{(4x-1)^3} \longrightarrow C_{n+1} =$$

(c63)

$$4^n \binom{n}{2} + \binom{2n+2}{n+1} - 4 \binom{2n}{n} + 10 \binom{2n-2}{n-1}$$

```
Time- 290037 msec.
```

(d2)

$$2835(d-1)^5(d+1)^5(1762475d^{21} + 6427564d^{20} + 15878130d^{19} + 32067180d^{18} + 61852087d^{17} + 139425392d^{16} + 395695128d^{15} + 800596144d^{14} - 1163773402d^{13} - 13109285656d^{12} - 3073157486d^{11} + 113668391606d^9 + 157011101616d^8 - 78388040040d^7 - 336677225744d^6 - 151783234321d^5 + 237272600780d^4 + 242429168050d^3 - 13148439860d^2 - 94511367725d - 30999523200)/(524288d^{26})$$

```
(c3) {
```


Notes de lecture ; ref: Ince E.L., ODE, Dover 1956 (INRIA E17).
+ Henrici

1- Un système différentiel général

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \quad \text{où } f \text{ est analytique en } z, w \text{ autour de } z_0, w_0$$

possède toujours localement une solution, d'ailleurs unique.

Preuves: (i) f vérifie une condition de type Cauchy-Lipschitz, donc on peut appliquer une méthode d'itération

$$y_{n+1} = w_0 + \int_{z_0}^z f(t, y_n(t)) dt$$

qui converge localement.

(ii) méthode des séries majorantes (Cauchy), dite, chez Ince, méthode des limites
= par différentiations successives, on construit ce qu'il doit être

$$w(z), w'(z_0), w''(z_0), \dots \quad (1)$$

d'où une solution formelle. On utilise alors l'analyticité de f qui entraîne que

$$|f(z, w)| \leq \frac{M}{a^p b^q} \quad (2)$$

donc la série $\tilde{w}$ construite à partir de (1) est dominée par la solution W de:

$$\frac{dW}{dz} = F\left(\frac{z}{a}, \frac{W}{b}\right) \quad F = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{W}{b}\right)}$$

équation qui se résout explicitement par

$$W = b - b \sqrt{1 + \frac{2Ma}{b} \log\left(1 - \frac{z}{a}\right)}$$

de rayon de convergence ρ qui

$$\rho = a(1 - e^{-b/2Ma}) \quad (3)$$

majorer le rayon de convergence de la série construite par (1).

Cette méthode se généralise au cas des systèmes (Ince, Henrici)

2. Systèmes linéaires:

Soit ~~un tel que~~ le système homogène

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z) \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + p_n(z) w = 0$$

Le système possède une solution dans tout domaine D où $p_1(z), p_2(z), \dots$ sont analytiques, pour toutes valeurs initiales $w_0, w_0', \dots, w_0^{(n-1)}$.

(i) L'existence d'une solution locale est garantie par le théorème précédent; le point nouveau est l'étendue jusqu'aux singularités des coefficients.

(ii) on peut montrer le résultat par la méthode des séries majorantes à nouveau: on construit une solution formelle

$$w(z) = \sum w_n (z - z_0)^n$$

les coefficients de $w(z)$ vérifient une récurrence finie majorée par une récurrence en w_n etc...

3. Singularités exemples dans le cas du 1^{er} ordre:

(i) $w' = e^{-1/z} w \Rightarrow w = C e^{\int_1^z e^{-1/t} dt}$

possède une singularité essentielle ~~essentielle~~ ~~logarithmique~~ ~~(branch)~~

(ii) $w' = \frac{1}{z^2} w \Rightarrow w = C e^{-1/z}$

possède une singularité essentielle

(iii) $w' = \frac{\alpha}{z} w \Rightarrow w = C z^{-\alpha}$

possède une singularité logarithmique. $\left\{ \begin{array}{l} y'' + \frac{1}{z} y' = 0 \\ \Rightarrow y = \log z! \end{array} \right.$

~~une solution est régulière si elle est de type $\sum (z - z_0)^n P_n(z) \log(z - z_0)$~~
~~un système est régulier s'il existe un système fondamental de solutions qui sont réguliers~~

Théorème: (Ince p365) Une CVS pour que $z = \xi$ soit point régulier régulier en que $p_i(z) = (z - \xi)^{-2} P_i(z)$ où P_i est analytique en ξ .

Définition d'un système régulier (Théorème 161-168), cas réel :

- { Soit $P(p) = 0$ l'équation indiciale, le système en dit
- régulier si le degré de P n'est égal à l'ordre n du système
 - irrégulier sinon.

Définition d'un système régulier (Théorème 363), cas complexe

- une solution est régulière si elle est du type

$$(z-\xi)^p (t^r \phi_1(z-\xi) + t^{r-1} \phi_2(z-\xi) + \dots) \quad (*)$$

$$t = \frac{1}{2\pi i} \log(z-\xi)$$

où les ϕ ont au plus un pôle en $z = \xi$

- si toutes les solutions sont régulières (? plutôt Σ de type *)
le système admet un point régulier régulier
- si l'une des ϕ possède une singularité essentielle (ξ), ξ est un point régulier irrégulier.

Henrici (p107 et sq) est plus clair. [cadre = système diff $\tilde{w}' = A(z)\tilde{w}(z)$

4. Singularité ^{sup. diff.} une fonction est log-holomorphe si $w(z) = w(\rho, \theta)$ est une fonction analytique de $z = \rho e^{i\theta}$

Théorème: pour toute condition initiale (avec A possédant une singularité isolée) $\exists$ solution log-holomorphe

Preuve: On pose $t = \log z$, $z = e^t$ et on transforme le système. $\square$

Théorème: Soit A analytique dans le disque percé D , W une matrice fondamentale qui est log-holomorphe, alors il existe une matrice R et une matrice P telles que
(a) R est constante (b) P est analytique dans D , et (zéro est)
 $W(z) = P(z) z^R$

Définition: Si l'on peut choisir W et R tels que P ait au plus un pôle en z_0 , z_0 est un point régulier régulier

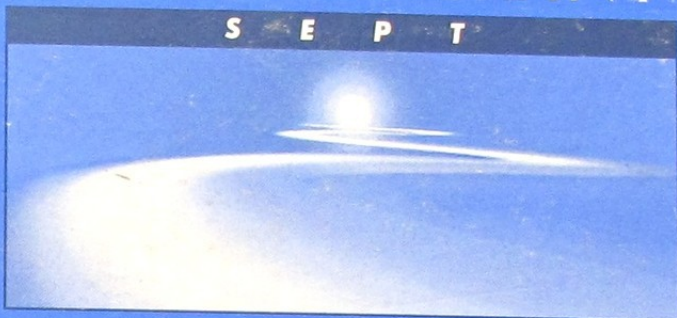
= Si P possède une singularité essentielle pour tout choix de W et R , z_0 est un point régulier irrégulier

Théorème: Le point z_0 est un point régulier régulier ssi il existe ν tel que
 $\rho^\nu w(\rho e^{i\theta}) \rightarrow 0$ lorsque $\rho \rightarrow 0$ et θ est borné.



CONQUERANT

S E P T



INRIA

P. Flajolet

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Téléphone : 33 (1) 39 63 55 11 - Télécopie : 33 (1) 39 63 59 60 - Télex : 697 033 F

AGENDA XXXV

JANUARY 1998

→ APRIL 1998



180 pages - 70 g - papier N°3
N°64

Silviah 10/4/98

• Linear Probing	FLPoVi97	Accepted Algorithmica.	—
• Non crossing cypn	FLNo97	Accepted Disc. Math, special issue Gould	—
• Buckel Selection	MaFLJaRe98(RR)	Submitted Acta Inform., April 1998	—
• Robustness & gylh	MaNiSpFL98	submitted ESA'98	—
• Stirling Numbers	FLPr98 (RR)	To be Submitted SIAM Discr. Math.	—
• Bernoulli sums	FLapde198	To be submitted TCS. 04/98	95% done
• Airy - Bellini	FLLo98	To be cleaned. 04/98	95% done
• Redundancy	FLS298	To be cleaned. 04/98	70% done
• Smooth poly	PaGoFL98 (RR)	Send verbi sem ANTS98, 06/04/98	—

- Linear Probing: 21/12/97, 22/12, 26/12, 1/3/98
- Canny Conf: 26/12/97
- Carli's Conjecture: 26/12/97 $\rightarrow$ (Book 2?)
- Knight problem (M. Peliková): 28/12/97
- Connected graphs, Arj: 29/12/97 - 31/12/97, 3/1/98, 8/1/98
- Budget selection & sort: 1/1/98, 11/1/98
- Transcendence of GFs: 5/1/98 (Allouche)
- Book 2: 4/1/98
- Robustness & graphs: 9/1/98
- Knuth - 22/1/98. See Steins $\{n_{k+1/2}\}$ - Schroeder eqn (better)
- Hadj: 22/1/98 - A question of Ian Morris
- Networks and branching processes & continued fractals 31/1/98
- Atkin's 2/2/98
- Arj & Brown's Excursion Areas 7/1/98
- Bernoulli sums 28/2/98
- Possibility trees (L. Pinxten) 2/3/98, 4/3/98, 7/3/98, 2/4/98 - 4/4/98
- Redundancy & a Cayley sum (w/ Szpankowski): 8/3/98
- Coloured shuffling (w. Alan Woods) 14/3/98
- Statistical physics, graphs, SAT 9/4/98
- Smooth Polynomials - ANTS'98, 6/4/98 - done

THE LIMIT LAW OF CROSSINGS IN INVOLUTIONS

Philippe Flajolet, December 26, 1997

Abstract. Prove the limit law of crossings by a perturbation of the Laplace's method analysis of the odd factorial integrals.

■ Laplace's method applied to the Odd Factorial Integral

First, we determine the range of Laplace's method for the integral representing the odd factorial.

$$\begin{aligned} &> \text{lf} := -x^2/2 + 2*n*\log(x); \\ &\text{lf} := -\frac{1}{2}x^2 + 2n \ln(x) \\ &> \text{f} := \exp(\text{lf}); \\ &\text{f} := e^{(-1/2 x^2 + 2 n \ln(x))} \end{aligned}$$

The maximum occurs at

$$\begin{aligned} &> \text{lf1} := \text{diff}(\text{lf}, x); \\ &\text{lf1} := -x + 2 \frac{n}{x} \\ &> \text{solve}("", x); \\ &\sqrt{2} \sqrt{n}, -\sqrt{2} \sqrt{n} \\ &> \text{lf2} := \text{normal}(\text{diff}(\text{lf}, x, x)); \\ &\text{lf2} := -\frac{x^2 + 2n}{x^2} \\ &> \text{zeta} := \text{sqrt}(2*n); \\ &\zeta := \sqrt{2} \sqrt{n} \\ &> \text{subs}(x=\text{zeta}, \text{lf2}); \\ &-2 \\ &> \text{lf3} := \text{normal}(\text{diff}(\text{lf}, x, x, x)); \\ &\text{lf3} := 4 \frac{n}{x^3} \end{aligned}$$

Expand locally, near the peak:

$$\begin{aligned} &> \text{subs}(x=\text{zeta}+y, \text{lf}); \\ &-\frac{1}{2}(\sqrt{2} \sqrt{n} + y)^2 + 2n \ln(\sqrt{2} \sqrt{n} + y) \\ &> \text{s1} := \text{asympt}("", n, 4); \\ &\text{s1} := (-1 + \ln(2) + \ln(n))n - y^2 + \frac{1}{6}\sqrt{2} y^3 \sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{8} \frac{y^4}{n} + \frac{1}{20}\sqrt{2} y^5 \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} - \frac{1}{24} \frac{y^6}{n^2} \\ &\quad + \frac{1}{56}\sqrt{2} y^7 \left(\frac{1}{n}\right)^{5/2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

The range of Laplace's approximation may be taken to be $\log(n)$.

31/12/1997

```
[ > restart;
> assume (0<t,t<1);
> L[k]=int (exp (-v^2/2+I*t*lambda*v^3/6/(1-t)^(3/2))*v^k,v=-infinity..in
finitiy);
```

$$L_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-1/2 v^2 + 1/6 \frac{I t \lambda v^3}{(1-t)^{3/2}}\right)} v^k dv$$

```
> L0:=2*Pi*(3*a)^(-1/3)*exp(2/3*(3*a)^(-1/2)*x^(3/2))*AiryAi((3*a)^(-1/
3)*x);
```

$$L0 := \frac{2}{3} \frac{\pi 3^{2/3} e^{\left(\frac{2/9 \sqrt{3} x^{3/2}}{\sqrt{a}}\right)} \text{AiryAi}\left(\frac{1}{3} \frac{3^{2/3} x}{a^{1/3}}\right)}{a^{1/3}}$$

```
> H(x)=sum (GAMMA (3*k+1/2) /54^k/k! /GAMMA (k+1/2) *x^k,k=0..infinity);
```

$$H(x) = \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right], \left[1, \frac{1}{2}x\right]\right)$$

```
[ > valH:=op (2, "):
> chvar:=a=t*lambda/6/(1-t)^(3/2), x=(1-t)^(3/2)/2/t/lambda, h=1/lambda^2
-1/q/sqrt(1-q), lambda=sqrt(log(1/(1-q)));
```

$$chvar := a = \frac{1}{6} \frac{t \sim \lambda}{(1-t \sim)^{3/2}}, x = \frac{1}{2} \frac{(1-t \sim)^{3/2}}{t \sim \lambda}, h = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{q \sqrt{1-q}}, \lambda = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)}$$

```
> L0H:=eval (subs (AiryAi=proc (z) local zeta;
zeta:=2/3*z^(3/2);
1/2/Pi^(1/2)/z^(1/4)/exp(zeta)*H(-1/zeta) end, exp=1, L0));
```

$$L0H := \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\pi} 3^{\frac{11}{12}} H\left(-\frac{9}{2} \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{3^{2/3} x}{a^{1/3}}\right)^{3/2}}\right)}{a^{1/3} \left(\frac{3^{2/3} x}{a^{1/3}}\right)^{1/4}}$$

```
> Sum (L[k]*I^k*y^k/k!,k=0..infinity)=subs (x=x+y, L0H);
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k I^k y^k}{k!} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\pi} 3^{\frac{11}{12}} H\left(-\frac{9}{2} \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{3^{2/3} (x+y)}{a^{1/3}}\right)^{3/2}}\right)}{a^{1/3} \left(\frac{3^{2/3} (x+y)}{a^{1/3}}\right)^{1/4}}$$

```
[ > GF:=op (2, "):
```

```
> F:=subs (u=lambda*v*(1-t)^(-1/2), exp(t*h*(exp(I*u)-1)-t/lambda^2*subs (
x=I*u, exp(x)-1-x-x^2/2-x^3/6)));
```

$$F := e^{\left(t \sim h \left(e^{\left(\frac{I \lambda v}{\sqrt{1-t \sim}}\right)} - 1\right) - \frac{t \sim}{\lambda^2} \left(e^{\left(\frac{I \lambda v}{\sqrt{1-t \sim}}\right)} - 1 - \frac{I \lambda v}{\sqrt{1-t \sim}} + 1/2 \frac{\lambda^2 v^2}{1-t \sim} + 1/6 \frac{I \lambda^3 v^3}{(1-t \sim)^{3/2}}\right)\right)}$$

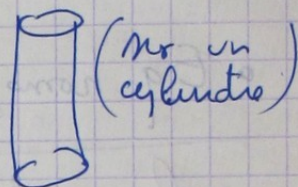
$q > 1$: fixé $\sigma_q \beta(x) = \beta(qx)$.

$C\{x\}$ séries conv en 0, $C\{x\}[\sigma_q]$

$C[[x]]$ séries entières

$\tilde{C}$: surface de Riemann $\mathbb{C}_q$.

$\tilde{O}$: germes de fn. analytique en $0 \in \tilde{C}$



$\log$
 $\log_q x = \log_q |x| + i \arg_q x \rightarrow \frac{\arg x}{\log q}$

• $\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n$ vérifie $xy_q(x) - y(x) = -1$

Reconstituer une solution analytique

• Plus généralement - opérateur aux différences. $\Delta \in C\{x\}[\sigma_q]$
 Somme $\hat{f} \in C[[x]]$, $\Delta \hat{f} \in C\{x\}$.

La suite des coefficients est donnée par $(AK^n q^{n(n-1)/2})$ $A, K > 0$
 on prend un secteur ouvert V de somme $0 \in \tilde{C}'$
 $|f(x) - \hat{f}_n(x)| < AK_{n,w} |x|^n$ Tout sous secteur.

Is d.a. Gerrey - Si $\|V\| > r_0$ et si f existe, alors f
 n'existe (mais ce n'est pas toujours le cas)
 $K_{n,w} = (K_w)^n n!$
 Si $\|V\| < r_0$ et n.f.

Un q -analogue de l'équation d'Euler

$xy' + y = x \rightarrow \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n! x^{n+1}$

$\sum q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ variation de la constante

$xy(qx) - y(x) = -1$

• Transformations de Borel-Laplace et q -analogue

La G_q -sommabilité

Mars 2008

→ Sept 2008

LXIII

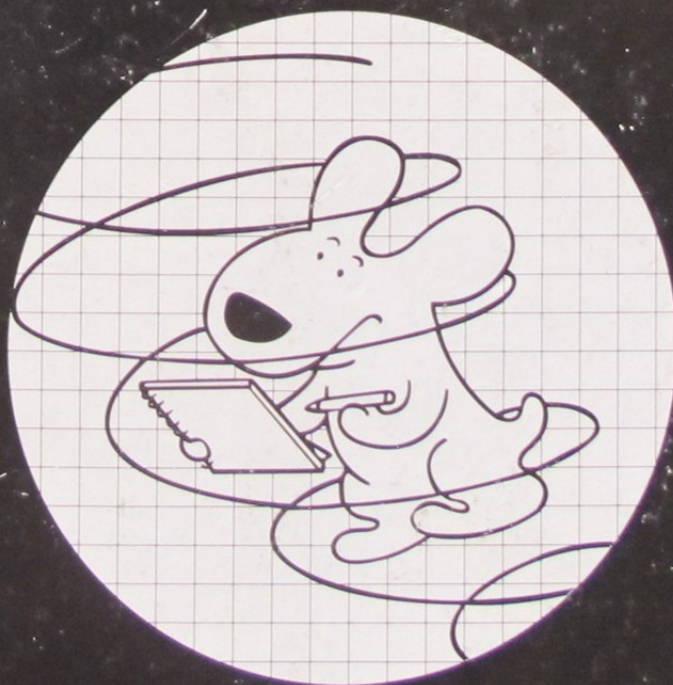
nice

exercise- book

180

A4 (210 x 297mm)

70g/m²



- UK Exercise-book
- F Cahier reliure intégrale
- 180 pages
- D Schulheft
- ES Cuaderno
- NL Spiraalschrift
- I Exercise book
- P Caderno de exercícios

www.niceday.com

Separation distance between roots of $p^s + q^s = 1$.

■ We consider the right half-plane $\text{Re}(s) > 0$. Assume that two zeros are (s) and $(s+a)$ then

$$\begin{cases} p^s + q^s = 1 \\ p^s p^a + q^s q^a = 1 \end{cases}$$

We regard p^a and q^a as known. Then solve for p^s and q^s , and get:

$$q^s = \frac{1-p^a}{q^a-p^a} ; \quad \boxed{p^s = \frac{1-q^a}{p^a-q^a}}$$

But we must have $|p^s| < 1$ in $\text{Re}(s) > 0$. Thus

NEED $\rightarrow \boxed{\left| \frac{1-q^a}{p^a-q^a} \right| > 1} \quad (c)$

Now the left-hand side is $\sim \frac{-a \log q}{a \log p - a \log q}$ as $a \rightarrow 0$.

$$\sim -\frac{\log q}{\log p - \log q} = \frac{+1}{1 - \log p / \log q} \neq$$

☀ Thus $|a|$ cannot be too small.