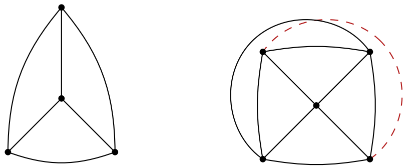
Énumération des graphes planaires 4-réguliers

Marc Noy, Clément Requilé and Juanjo Rué

20 Mars - ALEA 2017

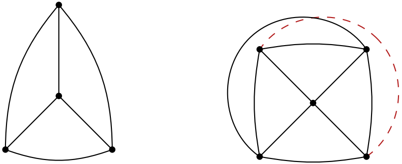
Introduction: graphes planaires étiquetés

Graphes planaires : admettant un plongement sur la sphère.



Introduction: graphes planaires étiquetés

Graphes planaires : admettant un plongement sur la sphère.



Théorème [Giménez & Noy '08]:

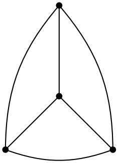
Soit pla_n le nombre de graphes planaires avec n sommets. Alors

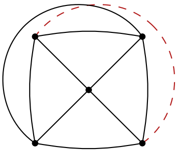
$$pla_n \sim \ell \cdot n^{-\frac{7}{2}} \gamma^n n!$$

où $\gamma \approx 27.22688$ et $\ell \approx 0.0000042609$.

Introduction: graphes planaires réguliers étiquetés

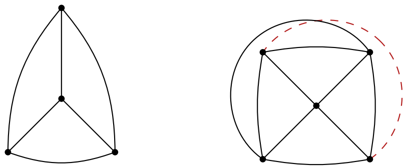
Graphes d-réguliers : dont tous les sommets ont degré $d \in \mathbb{N}$.





Introduction: graphes planaires réguliers étiquetés

Graphes d-réguliers : dont tous les sommets ont degré $d \in \mathbb{N}$.



Théorème [Bodirsky, Kang, Löffler & McDiarmid '07], [Noy, R., Rué '16+]:

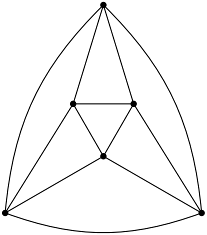
Soit cub_n le nombre de graphes planaires cubiques avec n sommets. Alors

$$cub_n \sim c \cdot n^{-\frac{7}{2}} \rho^n n!$$

où $\rho \approx 3.1325905979$ et $c \approx 0.0610098696$.

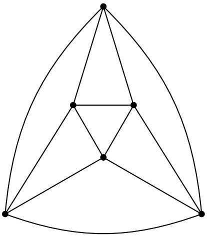
Introduction: graphes planaires 4-réguliers étiquetés

Graphes planaires 4-réguliers :
quid de leur énumération ?



Introduction: graphes planaires 4-réguliers étiquetés

Graphes planaires 4-réguliers :
quid de leur énumération ?



Théorème [Noy, R., Rué '17+]:

Soit

$$G(x) = \sum_{n \geq 1} g_n \frac{x^n}{n!}$$

la fonction génératice des graphes planaires 4-réguliers, où x encode le nombre de sommets. Alors $G(x)$ est algébrique et peut être déterminée comme la solution d'un système d'équations.

Introduction : les premiers nombres

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons donc calculer leur nombre :

n	g_n	c_n	t_n
6	15	15	15
7	0	0	0
8	2520	2520	2520
9	30240	30240	30240
10	1315440	1315440	1315440
11	39916800	39916800	39916800
12	1591786350	1591682400	1546776000
13	66102220800	66102220800	63826963200
14	3041137499400	3041023986000	2879997120000
15	151320414219975	151318143951975	142057025510400

- g_n = nb. graphes planaires 4-réguliers à n sommets
- c_n = nb. graphes connexes planaires 4-réguliers à n sommets
- t_n = nb. graphes 3-connexes planaires 4-réguliers à n sommets

Première différence à $n = 12 \rightarrow$ union disjointe de deux octahèdres.

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$
\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r, "\int"] & C(x) \arrow[r, "\exp"] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

D = réseaux 4-réguliers $\rightarrow$ C = graphes connexes $\rightarrow$ G = graphes

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$
\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & {} \arrow[r, phantom, "\text{Réseaux graphes}"] & {} & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

T = graphes 3-connexes $\longrightarrow$ D = réseaux 4-réguliers

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[dd] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Whitney}"'] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}$$

T_3 = cartes 3-connexes $\longleftrightarrow$ T = graphes 3-connexes

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\text{Réseaux cartes}"] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) \arrow[uu, bend left, "\text{Inversion algébrique}"] & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}$$

M = cartes 4-régulières $\longrightarrow$ T_3 = cartes 3-connexes

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$
\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Dualité}"] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

M = quadrangulations $\longleftrightarrow$ M = cartes 4-régulières

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[dd] \arrow[r, leftrightarrow] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}$$

Q = quadrangulations simples $\longrightarrow$ M = quadrangulations

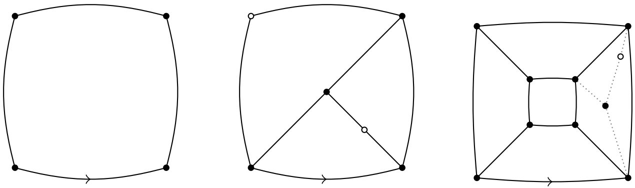
Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}$$

S = quadrangulations non-séparables $\longrightarrow$ Q = quad. simples

Quadrangulations simples



$$Q = z + 2N + R \qquad N_0 = (\tilde{N} + R)(\tilde{N} + R + N_0 + (2w)^{-1}N_1)$$

$$R = S(z + 2\widetilde{N} + R) \quad N_1 = 2zw(\tilde{N} + R + N_0 + 2^{-1}N_1)$$

$$P(z, S) = 0 \qquad N_2 = z^2w^3 + zw(N_2 + 2^{-1}N_1),$$

z = faces internes $\quad w$ = sommets isolés de degré deux.

- P is a quadratic polynomial in S,
- $N := N_0 + N_1 + N_2, \quad \widetilde{N} := N_0 + w^{-1}N_1 + w^{-2}N_2$.

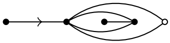
Le(s) système(s) d'équations

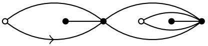
- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

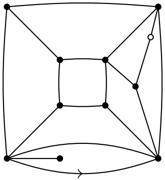
$$
\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

Q = quadrangulations simples $\longrightarrow$ M = quadrangulations

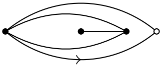
Quadrangulations

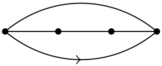






$$\tilde{A} := A_0 + 2w^{-1}A_1$$

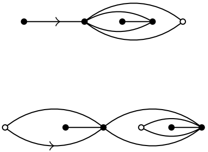


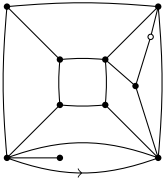


$$x := z(1+\tilde{A})^2 \qquad y := ((1+\tilde{A})^2 - 1 + w)(1+\tilde{A})^{-2}$$

- $Q_1(z,w) = x^2 y^{-1}(N_1 + 2N_2)$,
- $Q_0(z,w) = x^2(2N_0 + N_1 + R) + (2\tilde{A} + \tilde{A}^2)Q_1$.

Quadrangulations





$$A_1 = zw(1 + A_0)(1 - z(w+1))^{-1}$$

$$A_0 = 2z\tilde{A}(1 + A_0 + A_1(1 + w^{-1})) + z(Q_0 + Q_1 + z(1+\tilde{A})^4 + 2z\tilde{A}(w-1)(1+\tilde{A}))$$

$$M_1 = 2zA_1 + 2zA_1(A_0 + A_1(1 + w^{-1})) + zw(Q_1 + 2z\tilde{A}^2)$$

$$M_0 = 2z(1 + 2A_0 + A_1(1 + 2w^{-1})) + 2z(A_0 + A_1(1 + w^{-1}))(A_0 + A_1 w^{-1}) + z(Q_0 + z(1+\tilde{A})^4 + z\tilde{A}^2(2w-4) - 2z\tilde{A})$$

$$M_0' = 2z\tilde{A}.$$

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$
\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\text{Réseaux cartes}"] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) \arrow[uu, bend left, "\text{Inversion algébrique}"] & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

M = cartes 4-régulières $\longrightarrow$ T_3 = cartes 3-connexes

Les réseaux 4-réguliers

Réseau 4-régulier : multigraphe 4-régulier enraciné en une arête et tel que le graphe résultant de la suppression de la racine est simple.

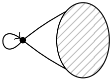
Pour les cartes, la même définition s'applique, sans la condition de simplicité.

Les réseaux 4-réguliers

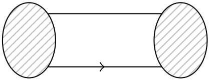
Réseau 4-régulier : multigraphe 4-régulier enraciné en une arête et tel que le graphe résultant de la suppression de la racine est simple.

Pour les cartes, la même définition s'applique, sans la condition de simplicité.

Types de réseaux selon la nature de la racine (pas d'isthme):



Réseaux boucles L



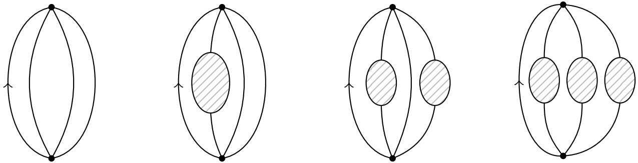
Réseaux en série S

Les réseaux 4-réguliers

Réseau 4-régulier : multigraphe 4-régulier enraciné en une arête et tel que le graphe résultant de la suppression de la racine est simple.

Pour les cartes, la même définition s'applique, sans la condition de simplicité.

Types de réseaux selon la nature de la racine (pas d'isthme):



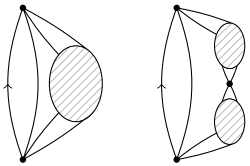
Réseaux en parallèle $P(x)$

Les réseaux 4-réguliers

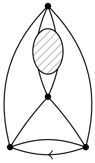
Réseau 4-régulier : multigraphe 4-régulier enraciné en une arête et tel que le graphe résultant de la suppression de la racine est simple.

Pour les cartes, la même définition s'applique, sans la condition de simplicité.

Types de réseaux selon la nature de la racine (pas d'isthme):



Réseaux doubles D_2



Réseaux hyperèdres H_1 et H_2

Décomposition en réseaux pour les cartes planaires

Toutes les fonctions génératrices sont en deux variables:
q = moitié des arêtes ordinaires et w = arêtes doubles isolées.

$$M_1 = S_1 + P_1 + 2wD_2$$

$$M_0 = S_0 + P_0 + L + H$$

$$M_0' = 2q^2 D$$

$$D = M_0 + qw^{-1} M_1 + wq^{-1} M_0'$$

$$L = 2q(1 + D - L) + L(w + q)$$

$$S_1 = wq^{-1} \frac{L^2}{2}$$

$$S_0 = \frac{D^2}{1 + D} - qw^{-1} S_1$$

$$P_1 = 2wqD^2$$

$$P_0 = q^2(1 + D + D^2 + D^3) + 2qDD_2$$

$$H = \frac{T_3(q(1 + D)^2, w + q(2D + D^2) + D_2)}{1 + D}$$

Décomposition en réseaux pour les cartes planaires

Toutes les fonctions génératrices sont en deux variables:
q = moitié des arêtes ordinaires et w = arêtes doubles isolées.

$$M_1 = S_1 + P_1 + 2wD_2$$
$$M_0 = S_0 + P_0 + L + H$$
$$M_0' = 2q^2 D$$
$$D = M_0 + qw^{-1} M_1 + wq^{-1} M_0'$$
$$L = 2q(1 + D - L) + L(w + q)$$
$$S_1 = wq^{-1} \frac{L^2}{2}$$
$$S_0 = \frac{D^2}{1 + D} - qw^{-1} S_1$$
$$P_1 = 2wqD^2$$
$$P_0 = q^2(1 + D + D^2 + D^3) + 2qDD_2$$
$$H = \frac{T_3(q(1 + D)^2, w + q(2D + D^2) + D_2)}{1 + D}$$

q et w forment une partition des arêtes $\rightarrow$ paramètres "disjoints"

Équation à inverser algébriquement

L'inversion algébrique

Changement de variables

$$u = q(1+D)^2 \quad \text{and} \quad v = w + q(2D + D^2) + D_2.$$

Les premiers termes du développement en séries de u et v sont

$$u(q,w) = q + 4q^2(1 + w + 2w^2 + \dots) + \dots$$

$$v(q,w) = w + w(13q^2 + 86q^3 + \dots) + \dots$$

$\Rightarrow$ Jacobienne à $(0,0)$ = 1 et le système est invertible:

$$q = a(u,v) \quad \text{et} \quad w = b(u,v)$$

$$T_3(u,v) = \Big(1 + D(a(u,v), b(u,v))\Big) H(a(u,v), b(u,v)).$$

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$
\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & \text{Réseaux graphes} & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r] & C(x) \arrow[r] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

T = graphes 3-connexes $\longrightarrow$ D = réseaux 4-réguliers

Décomposition en réseaux pour les graphes planaires

- $T(u,v) =$ cartes 4-régulières 3-connexes
- $T^{(1)}(x,u,v) = \frac{1}{2}T(ux^{1/2}, vx) =$ arête-racine simple
- $uT_u^{(2)}(x,u,v) = vT_v^{(1)}(x,u,v) =$ arête-racine double

$$D = L + S + P + H_1 + D_2$$

$$P = x^2\left(\frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6}\right) + \frac{D_2 D}{2}$$

$$D_2 = S_2 + H_2$$

$$H_2 = \frac{T^{(2)}\left(x, 1+D, D + \frac{D^2}{2} + \frac{D_2}{x^2}\right)}{D + \frac{D^2}{2} + \frac{D_2}{x^2}}$$

$$H_1 = \frac{T^{(1)}\left(x, 1+D, D + \frac{D^2}{2} + \frac{D_2}{x^2}\right)}{1+D} + D \cdot H_2$$

$$L = \frac{x}{2}(D - L)$$

$$S = D(D - S)$$

$$S_2 = \frac{D_2}{x}(D_2 - S_2)$$

Le(s) système(s) d'équations

- x = sommets et z = faces.
- w = 2-faces isolées / sommets de degré deux isolés.
- q = arêtes ordinaires, u = arêtes simples et v = arêtes doubles.

$$\begin{tikzcd}
S(z) \arrow[d] & T_3(u,v) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & T(u,v) \arrow[dd] & & \\
Q(z,w) \arrow[d] & & & & \\
M(z,w) \arrow[r, leftrightarrow] & M(q,w) & D(x) \arrow[r, "\int"] & C(x) \arrow[r, "\exp"] & G(x)
\end{tikzcd}$$

D = réseaux 4-réguliers $\to$ C = graphes connexes $\to$ G = graphes

Les graphes planaires 4-réguliers

$$4C^\bullet(x) = D(x) - D_2(x) - L(x) - L(x)^2 - x^2\frac{D(x)^2}{2}$$

$$C(x) = \int \frac{C^\bullet(x)}{x}dx$$

$$G(x) = \exp(C(x))$$

$$G(x) = 1 + \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{16}x^8 + \frac{1}{12}x^9 + \frac{29}{80}x^{10} + x^{11} + \frac{15313}{4608}x^{12} + \dots$$

Conclusion

- $G(x)$ est algrébrique $\rightarrow$ ses coefficients sont calculables.
- Énumération asymptotique $\rightarrow$ des complications (calcul formel) mais on va le faire !

Conclusion

- $G(x)$ est algrébrique $\rightarrow$ ses coefficients sont calculables.
- Énumération asymptotique $\rightarrow$ des complications (calcul formel) mais on va le faire !

FIN ! Et merci de votre attention.