Un comptage de méandres

Vincent Delecroix (avec É. Goujard, P. Zograf et A. Zorich)

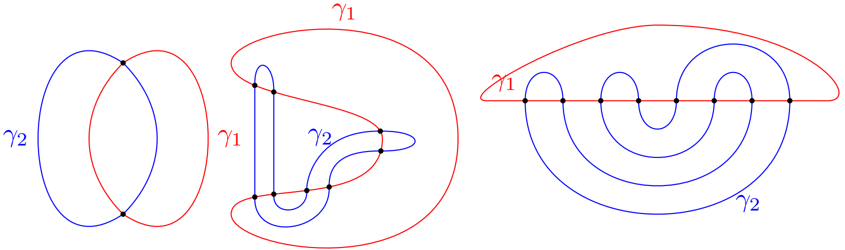
LaBRI, Bordeaux

Aléa 2017

Qu'est-ce qu'un méandre ?

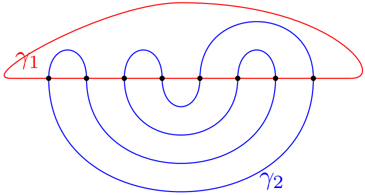
Definition

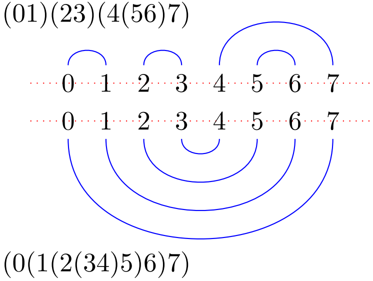
Un méandre est une paire de courbes de Jordan (γ_1, γ_2) dont les intersections sont finies et transverses. On identifie deux méandres lorsque on peut les joindre par une isotopie de la sphère.



Codage avec des arches (injection !)

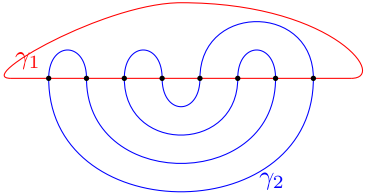
Si on marque un des points d'intersection entre γ_1 et γ_2 alors on peut coder un méandre par une paire de configuration d'arches.

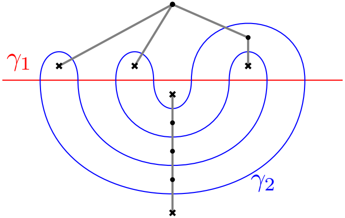




Codage avec des arbres (injection !)

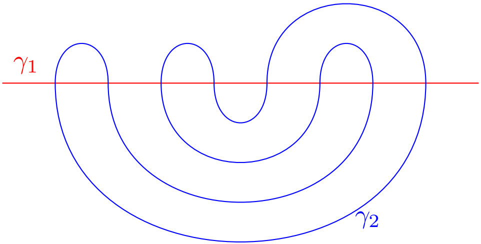
Si on marque un des points d'intersection entre γ_1 et γ_2 alors on peut coder un méandre par une paire d'arbres.





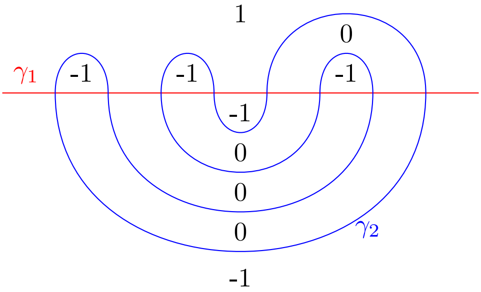
Carte combinatoire

Un méandre définit une carte combinatoire (sans boucle). Chaque sommet est de valence 4, chaque face est de valence paire.



Carte combinatoire

Un méandre définit une carte combinatoire (sans boucle). Chaque sommet est de valence 4, chaque face est de valence paire.



Si une face est un $2j$-gone on lui associe un degré $j-2$. La somme des degrés est -4 (formule d'Euler).

Un théorème de comptage

Théorème

Soit $M_{n,k}$ le nombre de méandres avec au plus $2n$ intersections et dont la carte a $k+4$ bigones (ie degré -1). On a l'équivalent en $n \to \infty$

$$M_{n,k} \sim \frac{1}{k!(k+4)!} \frac{\left(2\binom{2k+4}{k+2}\right)^2}{4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

Un théorème de comptage

Théorème

Soit $M_{n,k}$ le nombre de méandres avec au plus $2n$ intersections et dont la carte a $k+4$ bigones (ie degré -1). On a l'équivalent en $n \to \infty$

$$M_{n,k} \sim \frac{1}{k!(k+4)!} \frac{\left(2\binom{2k+4}{k+2}\right)^2}{4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

- $k!(k+4)!$ étiquetage

Un théorème de comptage

Théorème

Soit $M_{n,k}$ le nombre de méandres avec au plus $2n$ intersections et dont la carte a $k+4$ bigones (ie degré -1). On a l'équivalent en $n \to \infty$

$$M_{n,k} \sim \frac{1}{k!(k+4)!} \frac{\left(2\binom{2k+4}{k+2}\right)^2}{4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

- $k!(k+4)!$ étiquetage
- $2\binom{2k+4}{k+2}$ comptage des "surfaces à 1 cylindre"

Un théorème de comptage

Théorème

Soit $M_{n,k}$ le nombre de méandres avec au plus $2n$ intersections et dont la carte a $k+4$ bigones (ie degré -1). On a l'équivalent en $n \to \infty$

$$M_{n,k} \sim \frac{1}{k!(k+4)!} \frac{\left(2\binom{2k+4}{k+2}\right)^2}{4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

- $k!(k+4)!$ étiquetage
- $2\binom{2k+4}{k+2}$ comptage des "surfaces à 1 cylindre"
- $v_k = 4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}$ un volume !

Un théorème de comptage

Théorème

Soit $M_{n,k}$ le nombre de méandres avec au plus $2n$ intersections et dont la carte a $k+4$ bigones (ie degré -1). On a l'équivalent en $n \to \infty$

$$M_{n,k} \sim \frac{1}{k!(k+4)!} \frac{\left(2\binom{2k+4}{k+2}\right)^2}{4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

- $k!(k+4)!$ étiquetage
- $2\binom{2k+4}{k+2}$ comptage des "surfaces à 1 cylindre"
- $v_k = 4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1}$ un volume !
- $v_k \frac{n^{2k+2}}{4k+4}$ asymptotique de "toutes les surfaces" avec $k+4$ bigones.

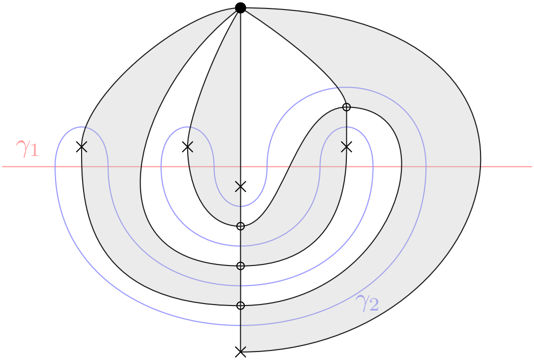
Un corollaire

Corollaire

Parmi les méandres avec au plus $2n$ intersections et $k+4$ bigones, presque tous vérifient que la carte combinatoire est faite seulement de carrés sauf $k-4$ hexagones et k bigones.

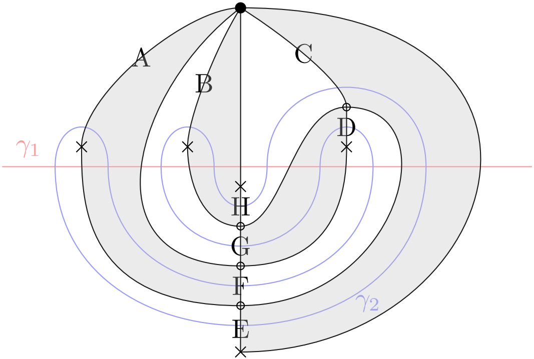
Quadrangulation duale - surface à petits carreaux

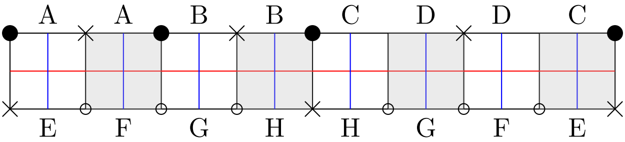
La carte duale d'un méandre est une "quadrangulation bipartie".



Quadrangulation duale - surface à petits carreaux

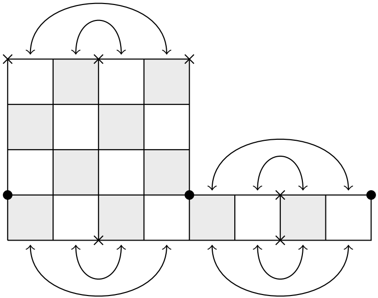
La carte duale d'un méandre est une "quadrangulation bipartie". On la géométrise en rendant chaque carré isométrique à un carré $1/2 \times 1/2$.





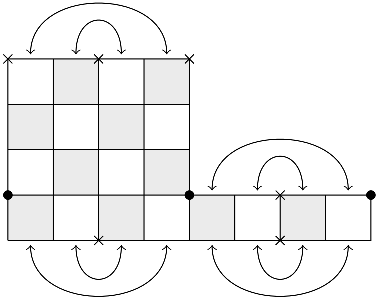
Surfaces à petits carreaux

Une surface à petits carreaux (sur la sphère) est une surface obtenue en recollant des petits carreaux $1/2 \times 1/2$ et dont tous les sommets sont de valence paire.



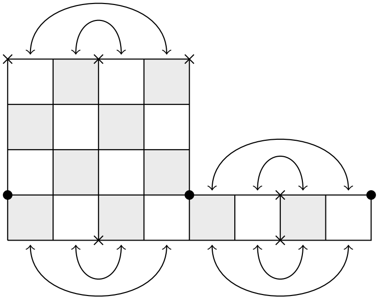
Surfaces à petits carreaux

Une surface à petits carreaux (sur la sphère) est une surface obtenue en recollant des petits carreaux $1/2 \times 1/2$ et dont tous les sommets sont de valence paire.
Aux sommets de valence j on associe le degré $j/2 - 2$ et on ignore les sommets de degré 0 ("sommets plats").



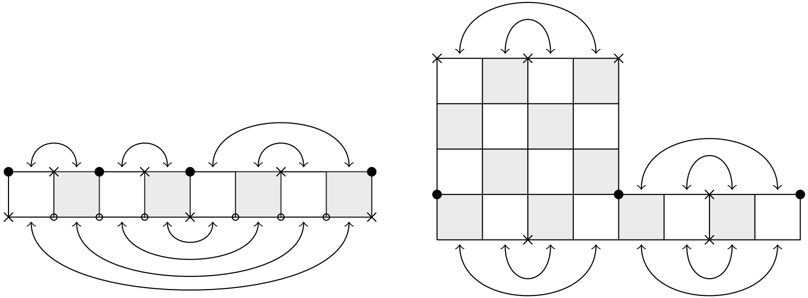
Surfaces à petits carreaux

Une surface à petits carreaux (sur la sphère) est une surface obtenue en recollant des petits carreaux $1/2 \times 1/2$ et dont tous les sommets sont de valence paire.
Aux sommets de valence j on associe le degré $j/2 - 2$ et on ignore les sommets de degré 0 ("sommets plats"). Dans l'exemple $\nu = (-1^5, 1)$.



Surfaces à petits carreaux vs méandres

définition alternative : Un méandre est une surface à petits carreaux dont les décompositions horizontale et verticale sont faites d'un seul cylindre de diamètre 1/2.



Preuve (?)

1. Seule la partition $\nu = (-1^{k+4}, 1^k)$ intervient.

Preuve (?)

1. Seule la partition $\nu = (-1^{k+4}, 1^k)$ intervient.
2. Comptage de toutes les surfaces à petits carreaux

$$4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}$$

(Athreya, Eskin, Goujard, Kontsevich, Okounkov, Zorich, ...)

Preuve (?)

1. Seule la partition $\nu = (-1^{k+4}, 1^k)$ intervient.
2. Comptage de toutes les surfaces à petits carreaux

$$4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}$$

(Athreya, Eskin, Goujard, Kontsevich, Okounkov, Zorich, ...)

3. Comptage des surfaces à petits carreaux ayant dans la direction horizontale un cylindre de hauteur $1/2$.

$$2\binom{2k+4}{k+2}\frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

Preuve (?)

1. Seule la partition $\nu = (-1^{k+4}, 1^k)$ intervient.
2. Comptage de toutes les surfaces à petits carreaux

$$4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}$$

(Athreya, Eskin, Goujard, Kontsevich, Okounkov, Zorich, ...)

3. Comptage des surfaces à petits carreaux ayant dans la direction horizontale un cylindre de hauteur $1/2$.

$$2\binom{2k+4}{k+2}\frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

Preuve (?)

1. Seule la partition $\nu = (-1^{k+4}, 1^k)$ intervient.
2. Comptage de toutes les surfaces à petits carreaux

$$4\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{k+1} \frac{n^{2k+2}}{4k+4}$$

(Athreya, Eskin, Goujard, Kontsevich, Okounkov, Zorich, ...)

3. Comptage des surfaces à petits carreaux ayant dans la direction horizontale un cylindre de hauteur $1/2$.

$$2\binom{2k+4}{k+2}\frac{n^{2k+2}}{4k+4}.$$

4. Indépendance des directions horizontale et verticale.

Deux questions

1. Terme d'erreur dans l'asymptotique des méandres avec k bigones ?
2. Distribution du nombre de bigones pour un méandre aléatoire avec $2n$ intersections ?