

# Cartes combinatoires et combinatoire algébrique - partie 1

Guillaume Chapuy,  
European Research Council (projet CombiTop)  
CNRS & IRIF, Université Paris Diderot

# Cartes combinatoires et combinatoire algébrique - partie 1

Guillaume Chapuy,  
European Research Council (projet CombiTop)  
CNRS & IRIF, Université Paris Diderot

# Plan (pour les deux cours)

I. Cartes topologiques

II. Cartes et permutations

III. Quelques éléments de théorie des représentations

# Plan (pour les deux cours)

I. Cartes topologiques

II. Cartes et permutations

III. Quelques éléments de théorie des représentations

IV. Les fonctions symétriques et les fonctions de Schur

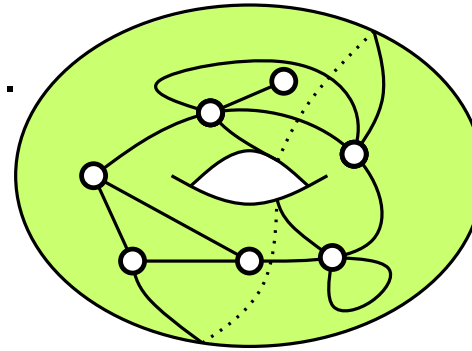
V. Déterminants

VI. Une version de la hiérarchie KP

# **I. Les cartes, avec des dessins**

# Premiers essais de définitions

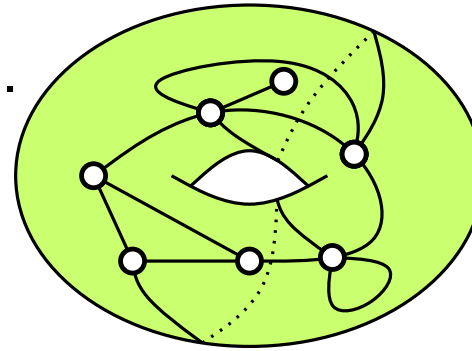
Une **carte** est un graphe dessiné sur une surface.



# Premiers essais de définitions

Une **carte** est un **graphe** dessiné sur une surface.

?

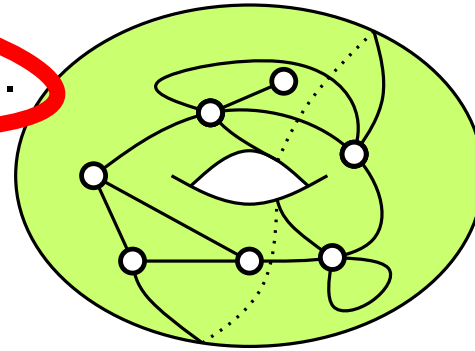


# Premiers essais de définitions

Une **carte** est un **graphe** dessiné sur une **surface**.

?

?





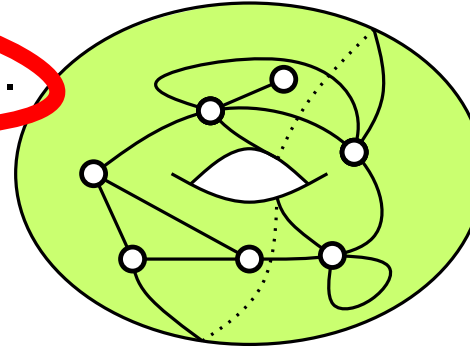
# Premiers essais de définitions

Une **carte** est un **graphe** **dessiné** sur une **surface**.

?

?

?



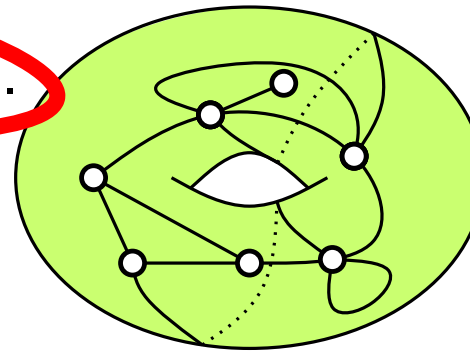
# Premiers essais de définitions

Une **carte** est un **graphe** dessiné sur une **surface**.

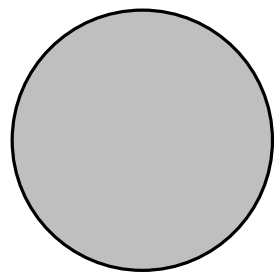
?

?

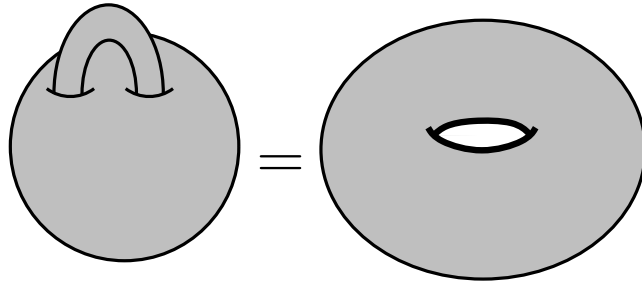
?



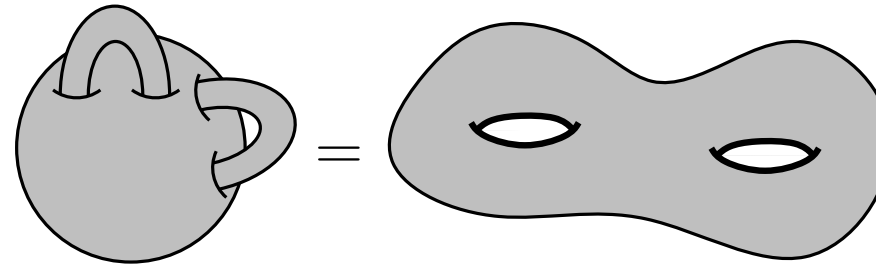
**Surface:**  $S_g$  := le  $g$ -tore = la sphère avec  $g$  anses attachées



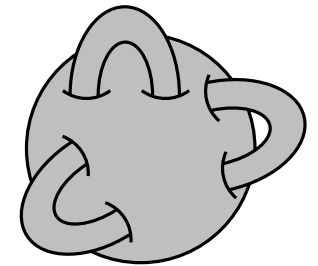
$S_0$



$S_1$



$S_2$



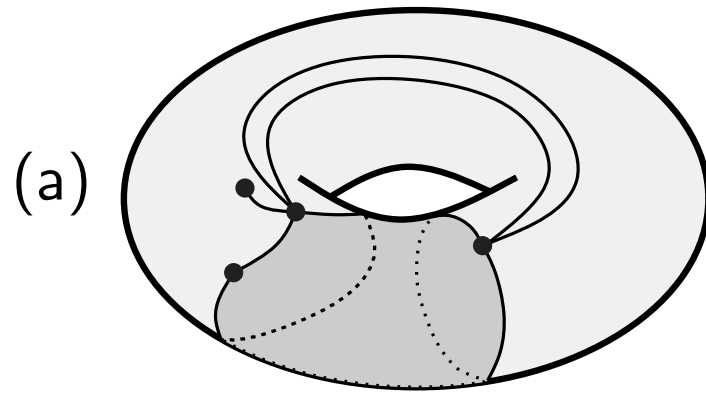
$S_3 \dots$

**Théorème de classification:** toute “surface orientée, compacte, connexe, sans bord” est une des  $S_g$ , pour un  $g \geq 0$  appelé **le genre**. Autant retenir ça comme définition!

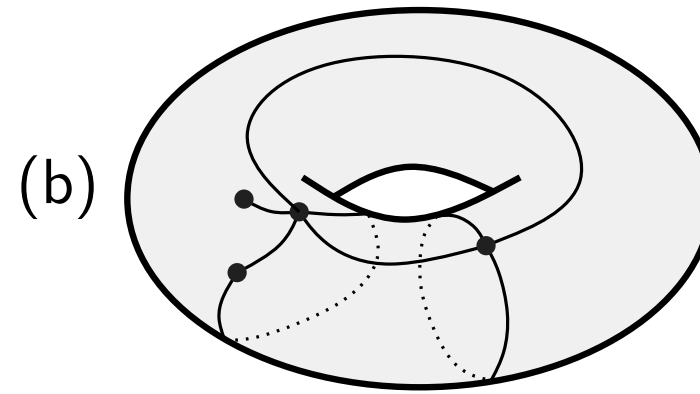
Nos **graphes** sont connexes, et peuvent avoir **boucles** ou **arêtes multiples**.

## Définition topologique d'une carte

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe  $G$  dans une surface  $\mathbb{S}$  tel que les composantes connexes de  $\mathbb{S} \setminus G$  (dites **faces**) sont **topologiquement des polygones**.



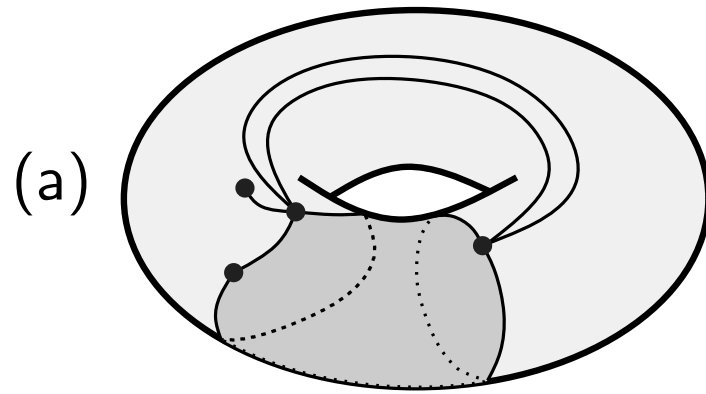
pas une carte



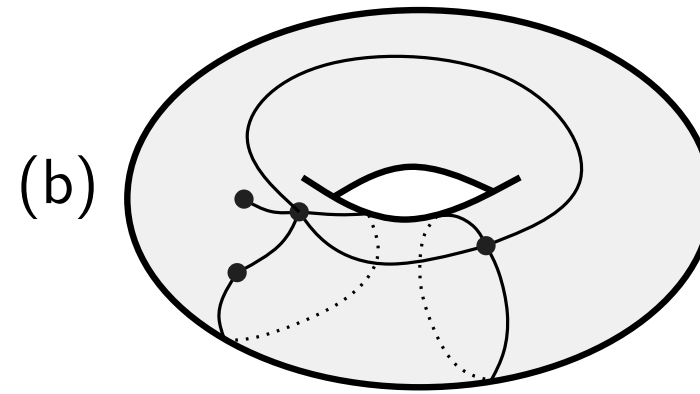
carte valide, de genre 1

## Définition topologique d'une carte

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe  $G$  dans une surface  $\mathbb{S}$  tel que les composantes connexes de  $\mathbb{S} \setminus G$  (dites **faces**) sont **topologiquement des polygones**.



pas une carte

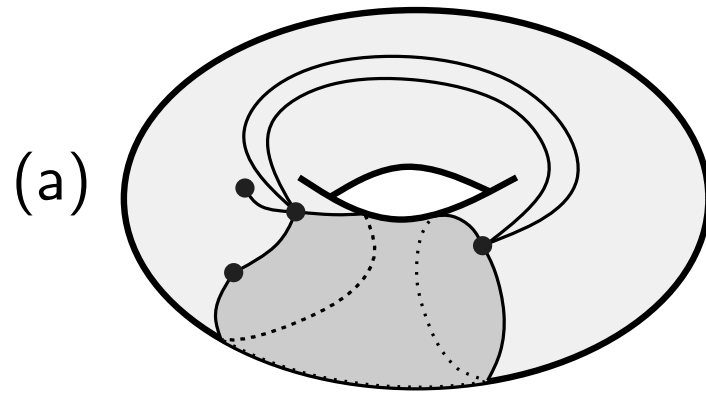


carte valide, de genre 1

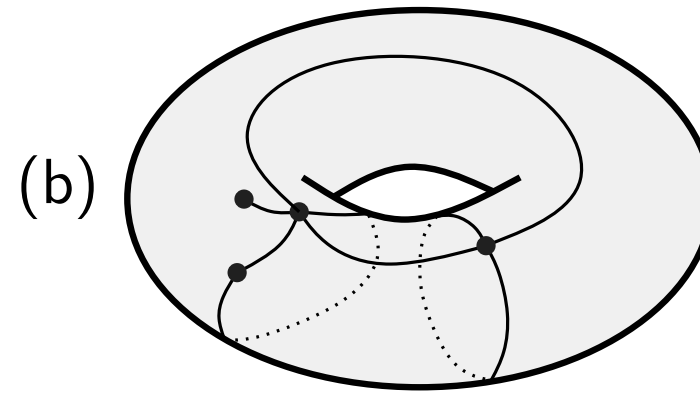
Les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près.

## Définition topologique d'une carte

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe  $G$  dans une surface  $\mathbb{S}$  tel que les composantes connexes de  $\mathbb{S} \setminus G$  (dites **faces**) sont **topologiquement des polygones**.



pas une carte



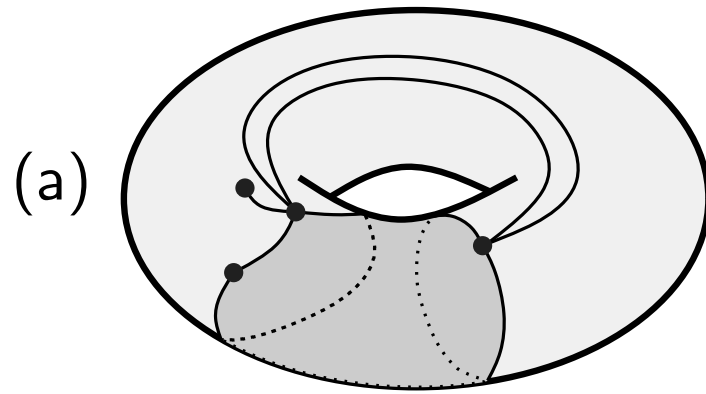
carte valide, de genre 1

Les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près.

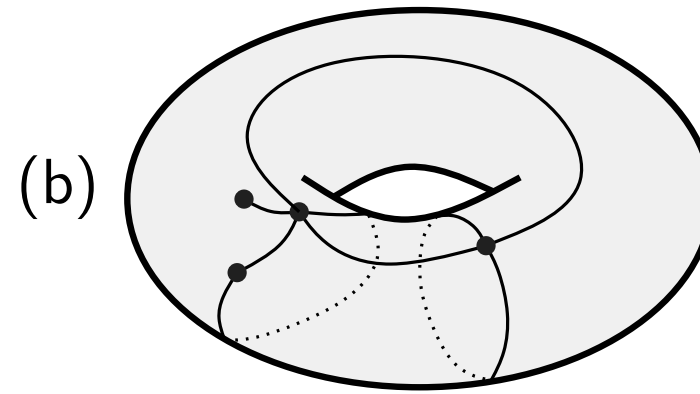
**Remarque:** La contrainte sur les faces est naturelle! Cela dit juste qu'une carte est **une surface "discrète"** fabriquée en recollant des polygones.

# Définition topologique d'une carte

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe  $G$  dans une surface  $\mathbb{S}$  tel que les composantes connexes de  $\mathbb{S} \setminus G$  (dites **faces**) sont **topologiquement des polygones**.



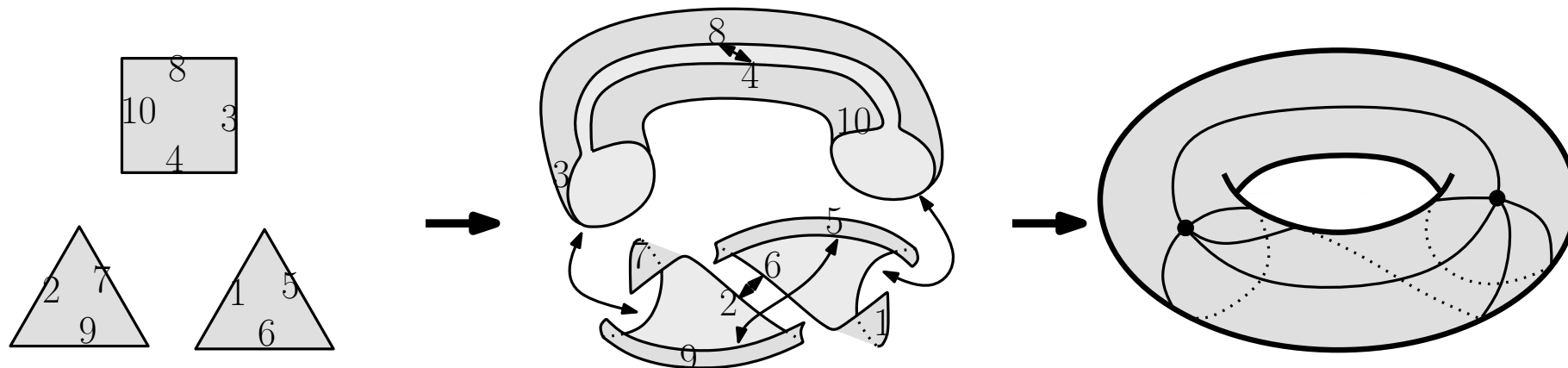
pas une carte



carte valide, de genre 1

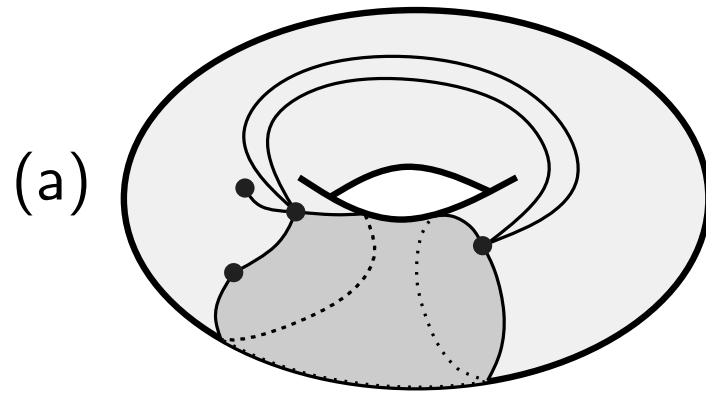
Les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près.

**Remarque:** La contrainte sur les faces est naturelle! Cela dit juste qu'une carte est **une surface "discrète"** fabriquée en recollant des polygones.

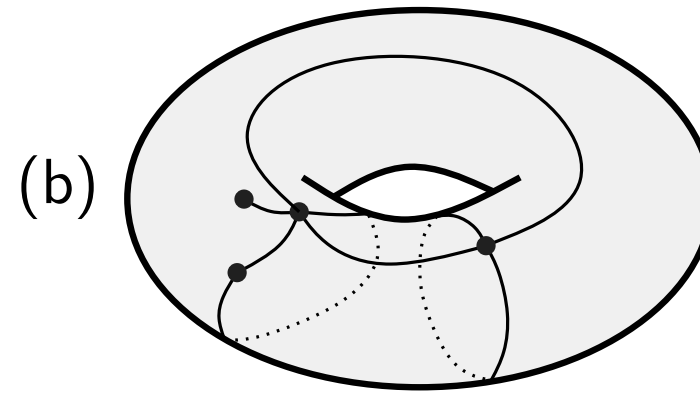


# Définition topologique d'une carte

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe  $G$  dans une surface  $\mathbb{S}$  tel que les composantes connexes de  $\mathbb{S} \setminus G$  (dites **faces**) sont **topologiquement des polygones**.



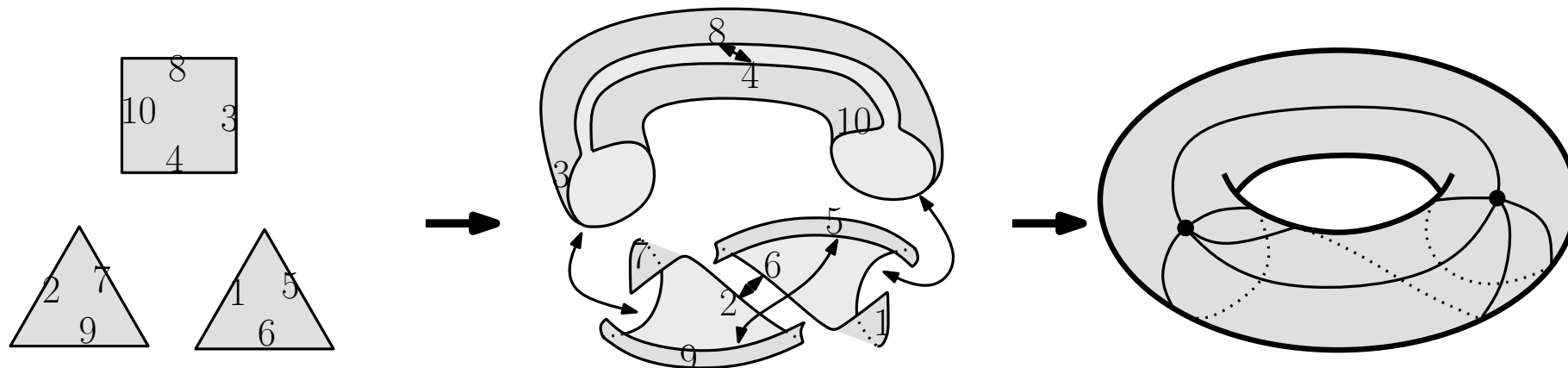
pas une carte



carte valide, de genre 1

Les cartes sont considérées à homéomorphisme orienté près.

**Remarque:** La contrainte sur les faces est naturelle! Cela dit juste qu'une carte est **une surface "discrète"** fabriquée en recollant des polygones.



# Définition comme systèmes de rotation

Un **système de rotation** d'un graphe est la donnée d'un **ordre cyclique** des demi-arêtes autour de chaque sommet.



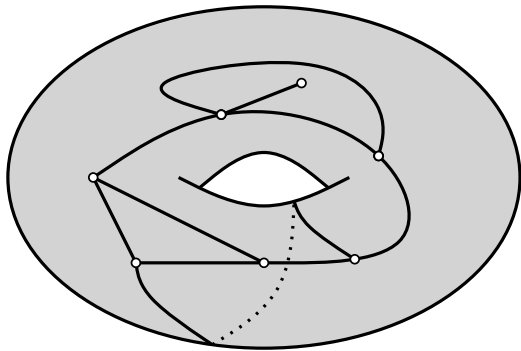
# Définition comme systèmes de rotation

Un **système de rotation** d'un graphe est la donnée d'un **ordre cyclique** des demi-arêtes autour de chaque sommet.

**Fait:** Il y a une **application naturelle**:

Cartes  $\longrightarrow$  Graphes munis d'un système de rotation

...donné par l'ordre horaire!



# Définition comme systèmes de rotation

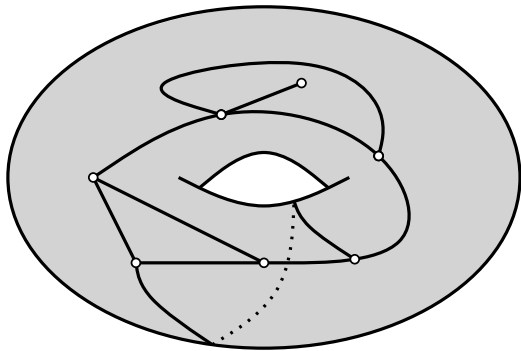
Un **système de rotation** d'un graphe est la donnée d'un **ordre cyclique** des demi-arêtes autour de chaque sommet.

**Fait:** Il y a une **application naturelle**:

Cartes  $\longrightarrow$  Graphes munis d'un système de rotation

...donné par l'ordre horaire!

**Proposition:** C'est en fait une **bijection**.



# Définition comme systèmes de rotation

Un **système de rotation** d'un graphe est la donnée d'un **ordre cyclique** des demi-arêtes autour de chaque sommet.

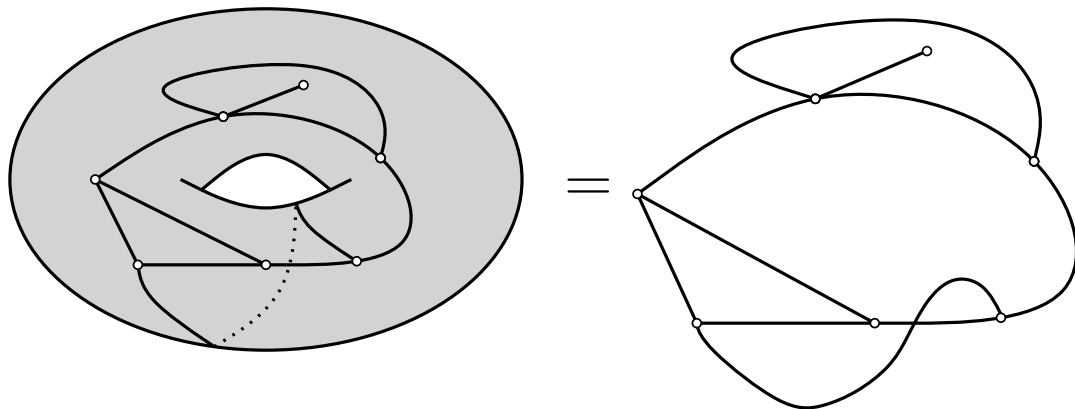
**Fait:** Il y a une **application naturelle**:

Cartes  $\longrightarrow$  Graphes munis d'un système de rotation

...donné par l'ordre horaire!

**Proposition:** C'est en fait une **bijection**.

**Corollaire:** On peut représenter une carte sur **une feuille de papier** en représentant **localement** "l'ordre horaire de la surface" par "l'ordre horaire sur le papier".



# Définition comme systèmes de rotation

Un **système de rotation** d'un graphe est la donnée d'un **ordre cyclique** des demi-arêtes autour de chaque sommet.

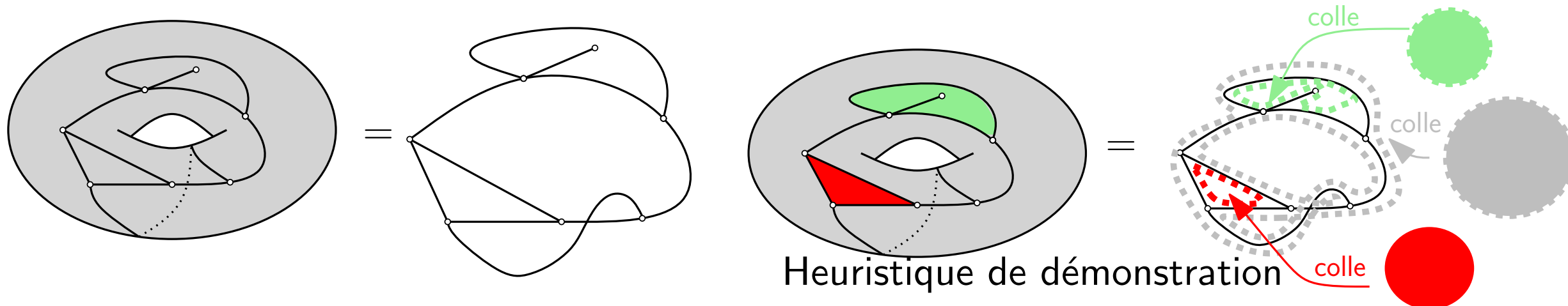
**Fait:** Il y a une **application naturelle**:

Cartes  $\longrightarrow$  Graphes munis d'un système de rotation

...donné par l'ordre horaire!

**Proposition:** C'est en fait une **bijection**.

**Corollaire:** On peut représenter une carte sur **une feuille de papier** en représentant **localement** "l'ordre horaire de la surface" par "l'ordre horaire sur le papier".



# Définition comme systèmes de rotation

Un **système de rotation** d'un graphe est la donnée d'un **ordre cyclique** des demi-arêtes autour de chaque sommet.

**Fait:** Il y a une **application naturelle**:

Cartes  $\longrightarrow$  Graphes munis d'un système de rotation

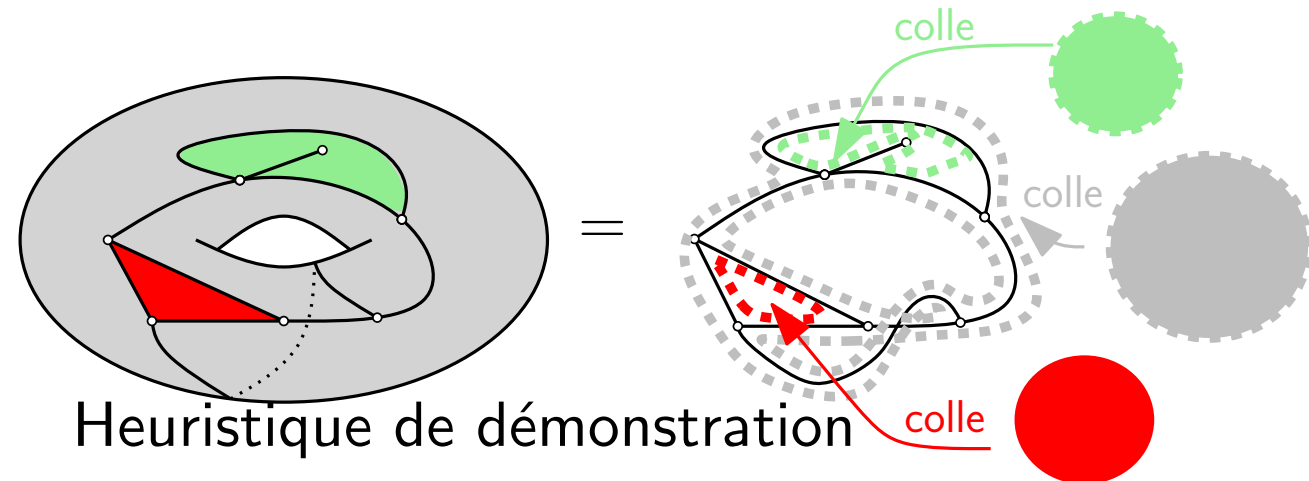
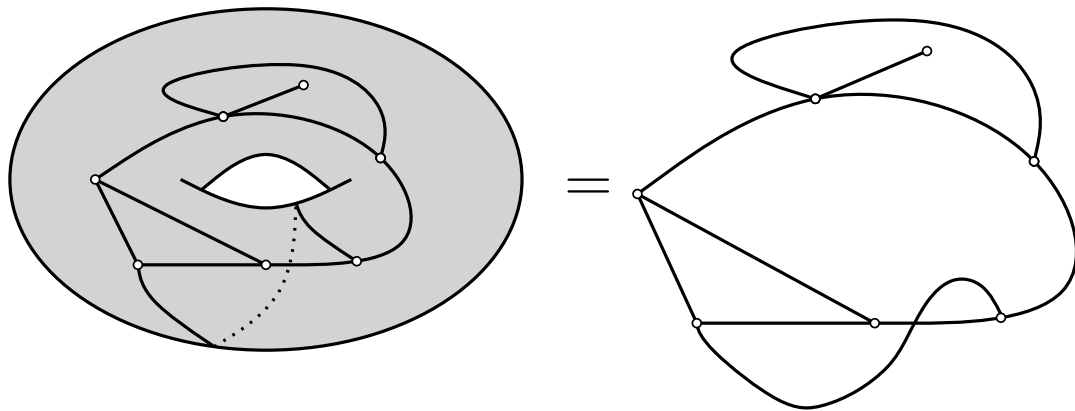
...donné par l'ordre horaire!

**Proposition:** C'est en fait une **bijection**.

FORMULE d'EULER:

$$s + f = a + 2 - 2g$$

**Corollaire:** On peut représenter une carte sur **une feuille de papier** en représentant **localement** "l'ordre horaire de la surface" par "l'ordre horaire sur le papier".



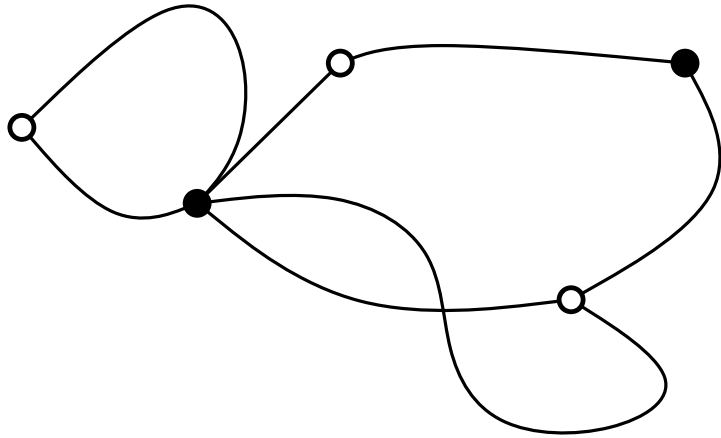
Heuristique de démonstration

## II. Cartes et permutations

# Cartes biparties

- Désormais on ne va plus considérer que des **cartes biparties**, *i.e.* avec sommets coloriés en noir et blanc et pas d'arêtes unicolores

**Définition:** carte bipartie **étiquetée** = carte bipartie dont les  $n$  arêtes sont étiquetées univoquement de 1 à  $n$ .

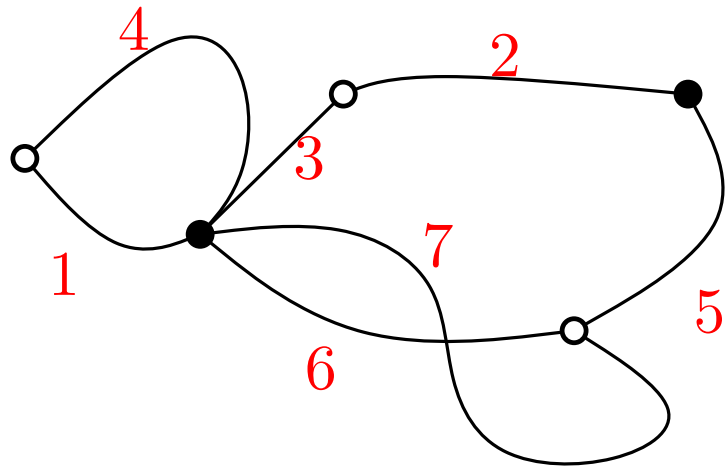


**Théorème:** Il y a une correspondance  $(n - 1)!$ -à-1 entre **cartes biparties étiquetées** et cartes biparties enracinées

# Cartes biparties

- Désormais on ne va plus considérer que des **cartes biparties**, *i.e.* avec sommets coloriés en noir et blanc et pas d'arêtes unicolores

**Définition:** carte bipartie **étiquetée** = carte bipartie dont les  $n$  arêtes sont étiquetées univoquement de 1 à  $n$ .



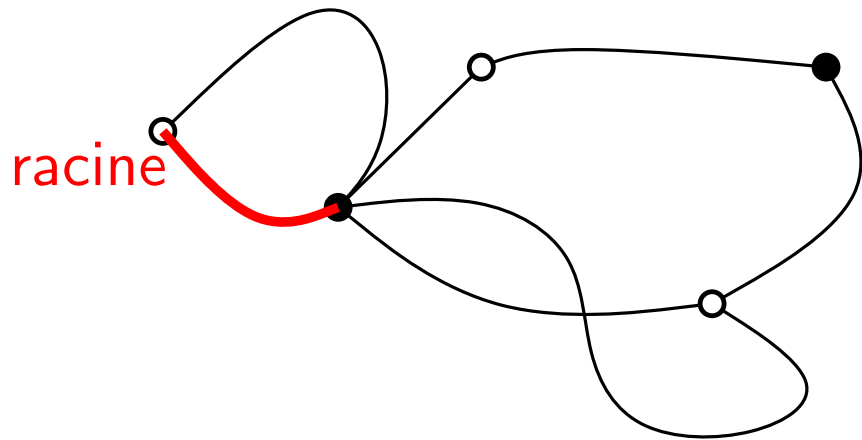
**Théorème:** Il y a une correspondance  $(n - 1)!$ -à-1 entre **cartes biparties étiquetées** et cartes biparties enracinées



# Cartes biparties

- Désormais on ne va plus considérer que des **cartes biparties**, *i.e.* avec sommets coloriés en noir et blanc et pas d'arêtes unicolores

**Définition:** carte bipartie **étiquetée** = carte bipartie dont les  $n$  arêtes sont étiquetées univoquement de 1 à  $n$ .

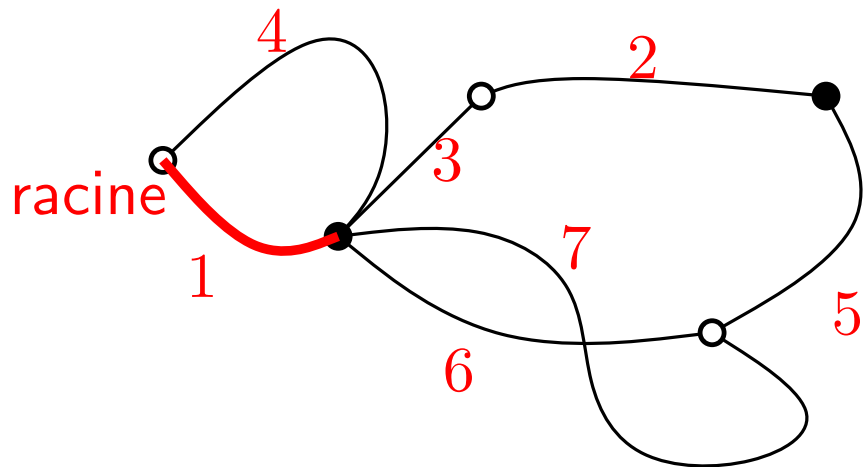


**Théorème:** Il y a une correspondance  $(n - 1)!$ -à-1 entre **cartes biparties étiquetées** et cartes biparties enracinées

# Cartes biparties

- Désormais on ne va plus considérer que des **cartes biparties**, *i.e.* avec sommets coloriés en noir et blanc et pas d'arêtes unicolores

**Définition:** carte bipartie **étiquetée** = carte bipartie dont les  $n$  arêtes sont étiquetées univoquement de 1 à  $n$ .



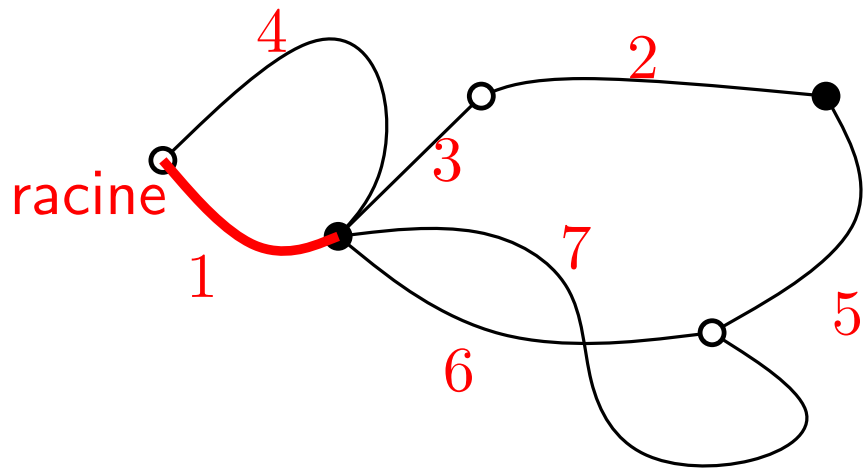
**Théorème:** Il y a une correspondance  $(n - 1)!$ -à-1 entre **cartes biparties étiquetées** et cartes biparties **enracinées**

**pourquoi?** Car toute permutation de  $\{1, \dots, n\}$  qui préserve la structure de carte étiquetée est déterminée par l'image de 1. On utilise ici que le graphe est connexe!

# Cartes biparties

- Désormais on ne va plus considérer que des **cartes biparties**, *i.e.* avec sommets coloriés en noir et blanc et pas d'arêtes unicolores

**Définition:** carte bipartie **étiquetée** = carte bipartie dont les  $n$  arêtes sont étiquetées univoquement de 1 à  $n$ .



**Théorème:** Il y a une correspondance  $(n-1)!$ -à-1 entre **cartes biparties étiquetées** et cartes biparties **enracinées**

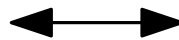
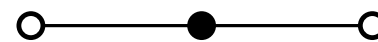
**pourquoi?** Car toute permutation de  $\{1, \dots, n\}$  qui préserve la structure de carte étiquetée est déterminée par l'image de 1. On utilise ici que le graphe est connexe!

**Remarque:**

**cartes (générales)** à  $n$  arêtes



**cartes biparties** à  $2n$  arêtes



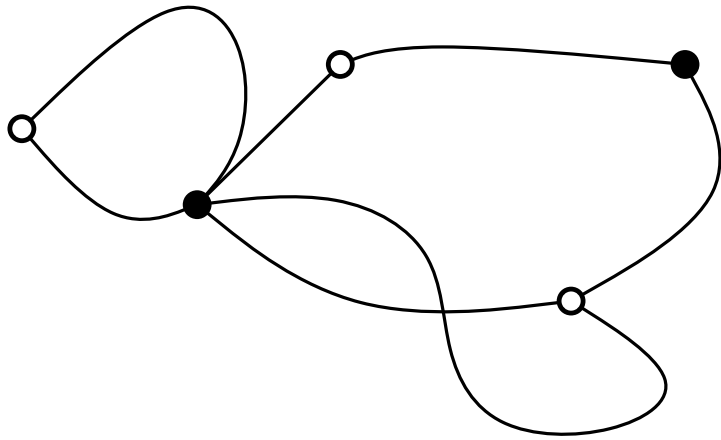
donc travailler avec les "biparties" n'est pas une perte de généralité

# Cartes biparties et permutations

• Il y a une bijection entre les cartes biparties étiquetées à  $n$  arêtes et les triplets de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi)$  tels que:

(i).  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}\phi = 1$

(ii). le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

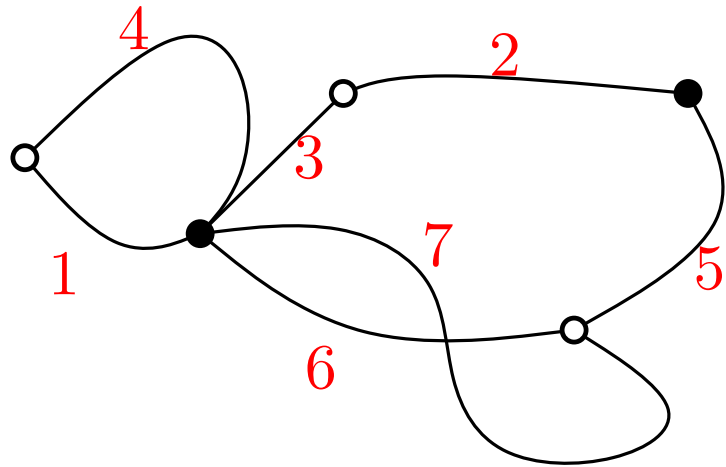


# Cartes biparties et permutations

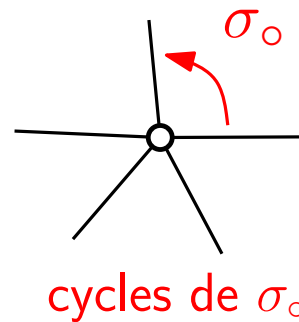
- Il y a une **bijection** entre les **cartes biparties étiquetées à  $n$  arêtes** et les triplets de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi)$  tels que:

(i).  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}\phi = 1$

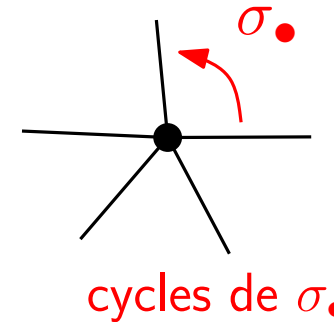
(ii). le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .



sommets blancs



sommets noirs



$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

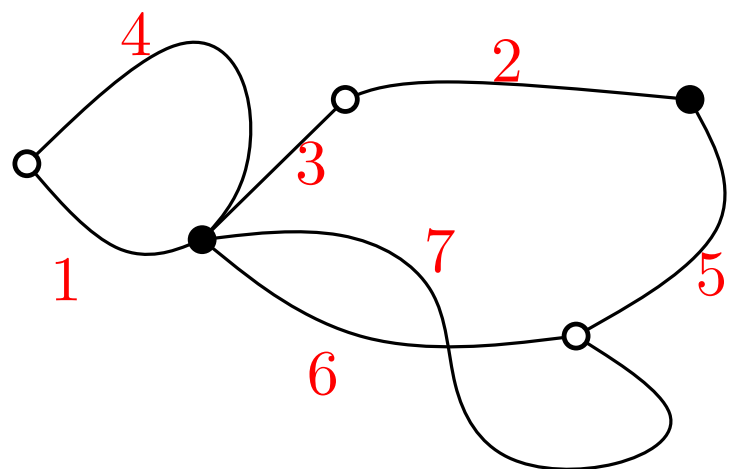
$$\sigma_{\bullet} = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

# Cartes biparties et permutations

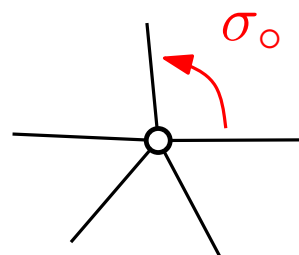
- Il y a une **bijection** entre les **cartes biparties étiquetées à  $n$  arêtes** et les triplets de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi)$  tels que:

(i).  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}\phi = 1$

(ii). le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

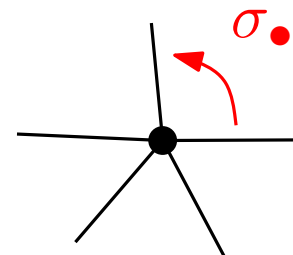


sommets blancs



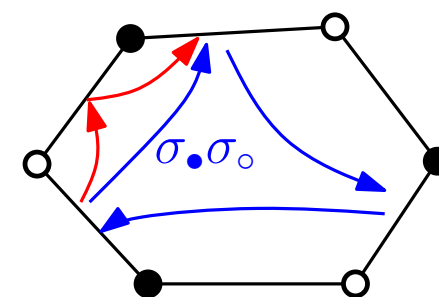
cycles de  $\sigma_{\circ}$

sommets noirs



cycles de  $\sigma_{\bullet}$

faces



cycles de  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}$

= cycles de  $\phi^{-1}$

$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

$$\sigma_{\bullet} = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

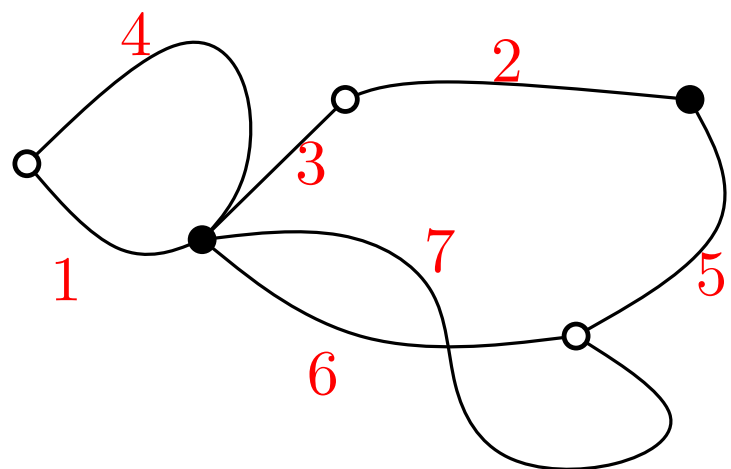
$$\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ} = (1)(2, 4, 6, 3, 5, 7)$$

# Cartes biparties et permutations

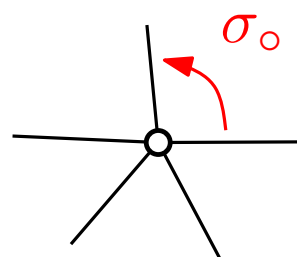
- Il y a une bijection entre les cartes biparties étiquetées à  $n$  arêtes et les triplets de permutations  $(\sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi)$  tels que:

(i).  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}\phi = 1$

(ii). le sous-groupe  $\langle \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet}, \phi \rangle \subset \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .

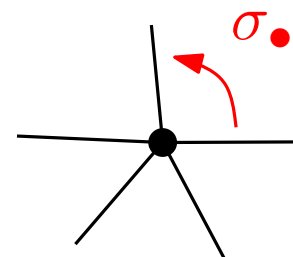


sommets blancs



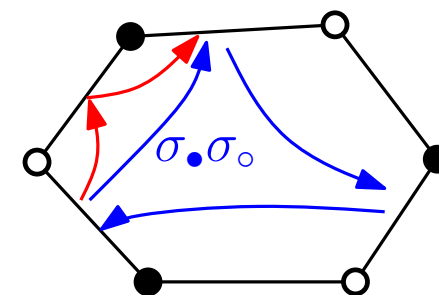
cycles de  $\sigma_{\circ}$

sommets noirs



cycles de  $\sigma_{\bullet}$

faces



cycles de  $\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}$

= cycles de  $\phi^{-1}$

$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

$$\sigma_{\bullet} = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

$$\sigma_{\bullet}\sigma_{\circ} = (1)(2, 4, 6, 3, 5, 7)$$

La formule d'Euler donne le genre:

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$

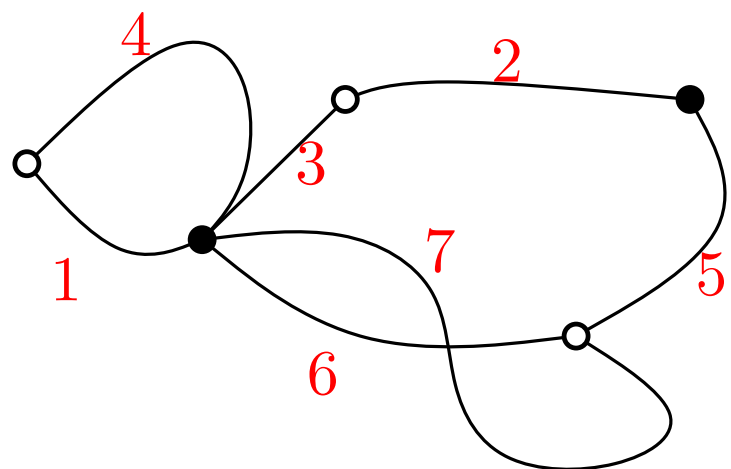
# Cartes biparties et permutations

- Il y a une bijection entre les cartes biparties étiquetées à  $n$  arêtes et les triplets de permutations  $(\sigma_o, \sigma_\bullet, \phi)$  tels que:

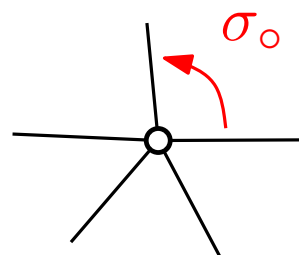
(i).  $\sigma_\bullet \sigma_o \phi = 1$

~~(ii). le sous groupe  $\langle \sigma_o, \sigma_\bullet, \phi \rangle \in \mathfrak{S}_n$  agisse transitivement sur  $[1..n]$ .~~

variante: non nécessairement connexes

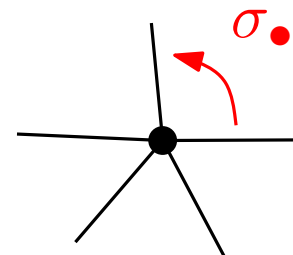


sommets blancs



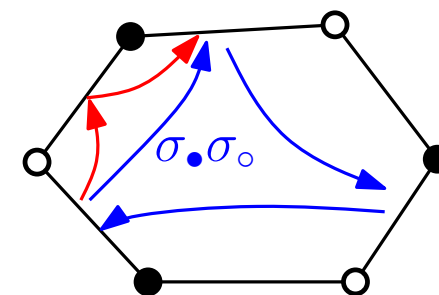
cycles de  $\sigma_o$

sommets noirs



cycles de  $\sigma_\bullet$

faces



cycles de  $\sigma_\bullet \sigma_o$   
= cycles de  $\phi^{-1}$

$$\sigma_o = (1, 4)(2, 3)(5, 6, 7)$$

$$\sigma_\bullet = (1, 6, 7, 3, 4)(2, 5)$$

$$\sigma_\bullet \sigma_o = (1)(2, 4, 6, 3, 5, 7)$$

La formule d'Euler donne le genre:

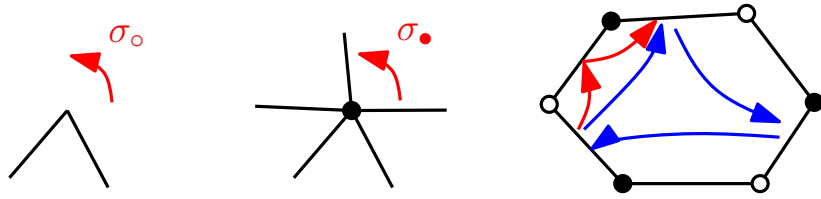
$$c(\sigma_o) + c(\sigma_\bullet) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$

nombre de droite  
devient  $n + 2\kappa - 2g$  où  
 $\kappa$ =nb. de comp. conn.

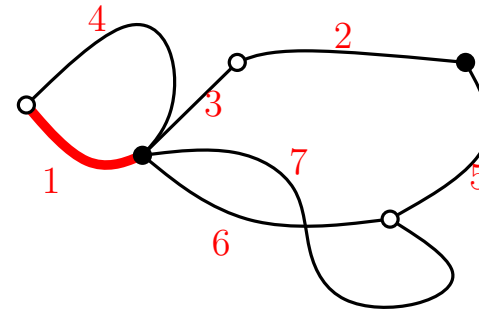


# Énumération

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$



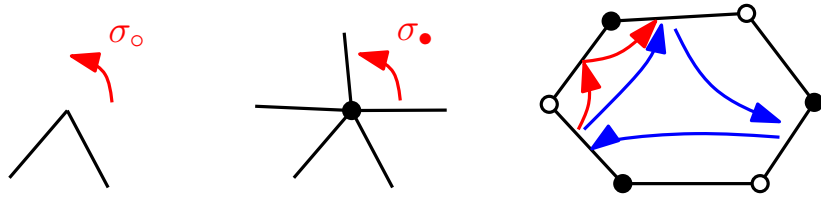
$$\sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} \phi = id$$



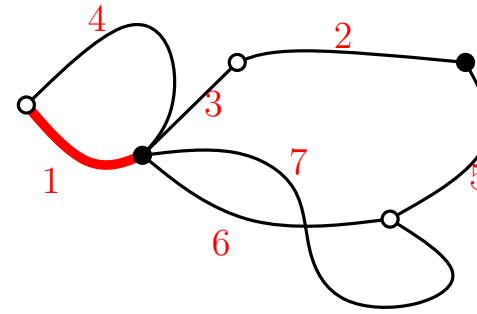
- Facile: il y a  $n!^2$  cartes bip. étiquetées – et on prend le log de la s.g. pour les connexes.
- Le problème devient **intéressant/dur/fun** si on veut contrôler les **trois** permutations.

# Énumération

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$



$$\sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} \phi = id$$



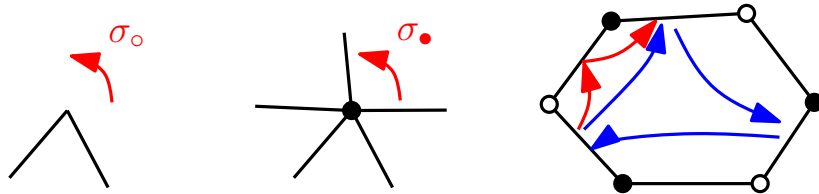
- Facile: il y a  $n!^2$  cartes bip. étiquetées – et on prend le log de la s.g. pour les connexes.
- Le problème devient **intéressant/dur/fun** si on veut contrôler les **trois** permutations.

- Pour  $\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}, \lambda_{\diamond}$  trois partitions de  $n$ , on note

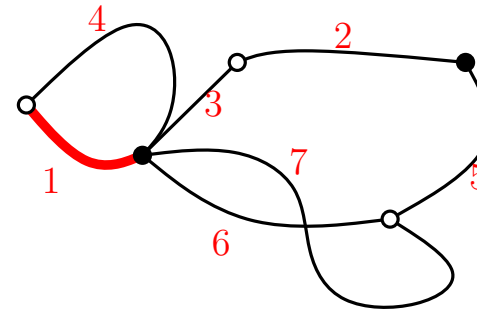
$B_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}, \lambda_{\diamond}}$  le nombre de factorisations telles que

# Énumération

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$



$$\sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} \phi = id$$



- Facile: il y a  $n!^2$  cartes bip. étiquetées – et on prend le log de la s.g. pour les connexes.
- Le problème devient **intéressant/dur/fun** si on veut contrôler les **trois** permutations.

- Pour  $\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}, \lambda_{\diamond}$  trois partitions de  $n$ , on note

$B_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}, \lambda_{\diamond}}$  le nombre de factorisations telles que

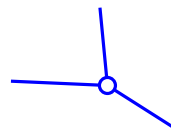
$\sigma_{\circ}$  a type cyclique  $\lambda_{\circ}$

$\sigma_{\bullet}$  a type cyclique  $\lambda_{\bullet}$

$\phi$  a type cyclique  $\lambda_{\diamond}$

Tout le jeu maintenant sera de dire quelque chose sur ces nombres!

Par exemple:  $B_{[3^n], [2^n], \lambda}$  = cartes cubiques de distribution de degrés de faces  $\lambda$



(triangulations par dualité)

### **III. Algèbre de groupe et représentations (éléments)**

# L'algèbre du groupe (symétrique)

- On regarde  $G = \mathfrak{S}_n$ . Les classes de conjugaison de  $G$  sont indexées par les **partitions de  $n$** . On note  $\mathcal{P}_n = \{\lambda, \lambda \vdash n\}$ .

Exemple:  $\mathcal{C}_{[1^n]} = \{id\}$      $\mathcal{C}_{[2,1^{n-2}]} = \{transpositions\}$

# L'algèbre du groupe (symétrique)

- On regarde  $G = \mathfrak{S}_n$ . Les classes de conjugaison de  $G$  sont indexées par les partitions de  $n$ . On note  $\mathcal{P}_n = \{\lambda, \lambda \vdash n\}$ .

$$\text{Exemple: } \mathcal{C}_{[1^n]} = \{id\} \quad \mathcal{C}_{[2,1^{n-2}]} = \{\textit{transpositions}\}$$

- On regarde l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{C}[G]$  = combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $G$ , avec la multiplication de  $G$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -e.v. de dimension  $|G| = n!$ .

Nos nombres favoris s'expriment dans  $\mathbb{C}[G]$ :

$$B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet, \lambda_\diamond} = \#\{\sigma_\circ \sigma_\bullet \phi = id, \sigma_\circ \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}, \dots\}$$

$$= \text{coeff. de } 1 \text{ dans } \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{\lambda_\bullet}} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{\lambda_\diamond}} \sigma \right)$$

$$= [1] K_{\lambda_\circ} K_{\lambda_\bullet} K_{\lambda_\diamond} \quad \text{où } K_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\lambda} \sigma$$

# L'algèbre du groupe (symétrique)

- On regarde  $G = \mathfrak{S}_n$ . Les classes de conjugaison de  $G$  sont indexées par les **partitions de  $n$** . On note  $\mathcal{P}_n = \{\lambda, \lambda \vdash n\}$ .

$$\text{Exemple: } \mathcal{C}_{[1^n]} = \{id\} \quad \mathcal{C}_{[2,1^{n-2}]} = \{\textit{transpositions}\}$$

- On regarde l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{C}[G]$  = combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $G$ , avec la multiplication de  $G$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -e.v. de **dimension  $|G| = n!$** .

Nos nombres favoris s'expriment dans  $\mathbb{C}[G]$ :

$$B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet, \lambda_\diamond} = \#\{\sigma_\circ \sigma_\bullet \phi = id, \sigma_\circ \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}, \dots\}$$

$$= \text{coeff. de } 1 \text{ dans } \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{\lambda_\bullet}} \sigma \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{\lambda_\diamond}} \sigma \right)$$

$$= [1] K_{\lambda_\circ} K_{\lambda_\bullet} K_{\lambda_\diamond} \quad \text{où } K_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\lambda} \sigma$$

- On a juste reformulé le problème! Ce n'est utile que si l'on dispose d'une **bonne théorie pour calculer dans  $\mathbb{C}[G]$**

→ la théorie des représentations des groupes finis fait justement ça.

# Représentations des groupes finis (éléments) -I

- Une représentation de  $G$  de dimension  $k \geq 1$  est un morphisme

$$G \longrightarrow GL(\mathbb{C}^k)$$

Autrement dit on se donne une matrice inversible  $k \times k$  pour chaque  $g \in G$ , et on veut que ça se multiplie bien.

<b>Exemples</b>	$\sigma \longmapsto 1$
$\mathfrak{S}_n \ni$	$\sigma \longmapsto \epsilon(\sigma)$
$\mathfrak{S}_n \ni$	$\sigma \longmapsto MatPerm(\sigma)$







# Représentations des groupes finis (éléments) -I

- Une représentation de  $G$  de dimension  $k \geq 1$  est un morphisme

$$G \longrightarrow GL(\mathbb{C}^k)$$

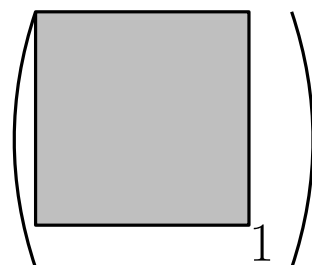
Autrement dit on se donne une matrice inversible  $k \times k$  pour chaque  $g \in G$ , et on veut que ça se multiplie bien.

<b>Exemples</b>	$\sigma \longmapsto 1$
$\mathfrak{S}_n \ni$	$\sigma \longmapsto \epsilon(\sigma)$
$\mathfrak{S}_n \ni$	$\sigma \longmapsto MatPerm(\sigma)$

- Une représentation est **réductible** s'il existe un sous-espace stable non trivial.

**Exemple:**  $v_0 = (1, \dots, 1)$

$$MatPerm(\sigma) \approx$$



dans une base adaptée à  $\mathbb{C}^n = v_0^\perp \oplus v_0$

Exo: montrer que la rep.correspondante sur  $v_0^\perp$  est irréductible.

- **Théorème:** L'ensemble  $\mathcal{R}$  des représentations irréductibles de  $G$  (à changement de base près) est **FINI**. En fait  $|\mathcal{R}| =$  le nb. de classes de conjugaisons de  $G$ .

**Exemple:**  $\mathfrak{S}_3$ : on a 1, *sign*, et la rep. de dimension 2 déjà vue sur  $v_0^\perp$ .

Toute représentation se décompose en somme directe de tels irréductibles.

- Pour le groupe symétrique on note  $V^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  ses représentations qui sont indexées par les partitions et **bien décrites** dans la littérature.

## Représentations des groupes finis (éléments) -II

- Le caractère d'une représentation  $\rho \in \mathcal{R}$  sur  $g \in G$  est  $\chi^\rho(g) = \text{Tr} \rho(G)$   
Par exemple  $\chi^\rho(id) = n_\rho$  la dimension de  $\rho$ .

- **Formule de Frobenius:** Notre nombre favori s'exprime comme:

$$B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet, \lambda_\diamond} = \#\{\sigma_\circ \sigma_\bullet \phi = id, \sigma_\circ \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}, \sigma_\bullet \in \mathcal{C}_{\lambda_\bullet}, \phi \in \mathcal{C}_{\lambda_\diamond}\}$$

$$= [id] K_{\lambda_\circ} K_{\lambda_\bullet} K_{\lambda_\diamond}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \mathcal{R}} n_\rho^2 \nu_\rho(\lambda_\circ) \nu_\rho(\lambda_\bullet) \nu_\rho(\lambda_\diamond)$$

$$\nu_\rho = \frac{1}{n_\rho} \sum_{g \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}} \chi^\rho(g)$$

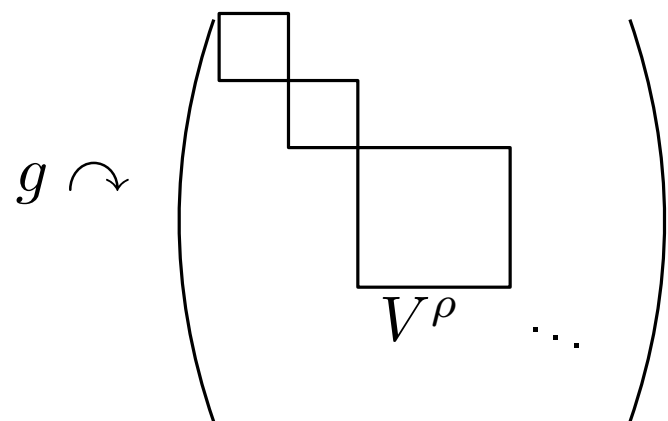
# Représentations des groupes finis (éléments) -II

- Le caractère d'une représentation  $\rho \in \mathcal{R}$  sur  $g \in G$  est  $\chi^\rho(g) = \text{Tr} \rho(G)$   
Par exemple  $\chi^\rho(id) = n_\rho$  la dimension de  $\rho$ .

- Formule de Frobenius:** Notre nombre favori s'exprime comme:

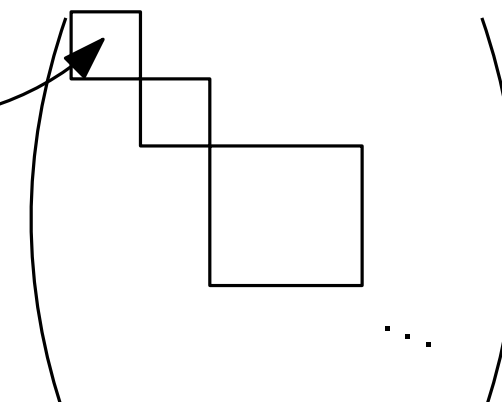
$$\begin{aligned}
 B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet, \lambda_\diamond} &= \#\{\sigma_\circ \sigma_\bullet \phi = id, \sigma_\circ \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}, \sigma_\bullet \in \mathcal{C}_{\lambda_\bullet}, \phi \in \mathcal{C}_{\lambda_\diamond}\} \\
 &= [id] K_{\lambda_\circ} K_{\lambda_\bullet} K_{\lambda_\diamond} \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \mathcal{R}} n_\rho^2 \nu_\rho(\lambda_\circ) \nu_\rho(\lambda_\bullet) \nu_\rho(\lambda_\diamond) \qquad \nu_\rho = \frac{1}{n_\rho} \sum_{g \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}} \chi^\rho(g)
 \end{aligned}$$

**Éléments de la preuve** Cela vient du fait que  $\mathbb{C}[G] \approx \bigoplus_{\rho \in \mathcal{R}} \text{End}(V^\rho)$



Et du fait que  $K_\lambda$  est **central** dans  $\mathbb{C}[G]$  et donc de la forme:

$\nu_\rho(\lambda) \cdot id$   
sur chaque bloc  $\rho$



## Représentations des groupes finis (éléments) -II

- Le caractère d'une représentation  $\rho \in \mathcal{R}$  sur  $g \in G$  est  $\chi^\rho(g) = \text{Tr} \rho(G)$   
Par exemple  $\chi^\rho(\text{id}) = n_\rho$  la dimension de  $\rho$ .

- Formule de Frobenius** (Version un peu moins gourmande)

$$\begin{aligned} B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet}(u) &= \sum_k u^k \#\{\sigma_\circ \sigma_\bullet \phi = \text{id}, \sigma_\circ \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}, \sigma_\bullet \in \mathcal{C}_{\lambda_\bullet}, \ell(\phi) = k\} \\ &= [\text{id}] K_{\lambda_\circ} K_{\lambda_\bullet} L(u) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \mathcal{R}} n_\rho^2 \nu_\rho(\lambda_\circ) \nu_\rho(\lambda_\bullet) f_\rho(u) \end{aligned}$$

où  $\nu_\rho(\lambda) = \frac{1}{n_\rho} \sum_{g \in \mathcal{C}_{\lambda_\circ}} \chi^\rho(g)$  valeur de  $K_\lambda$  sur le bloc  $V^\rho$

$f_\rho(u)$  valeur de  $L(u)$  sur le bloc  $V^\rho$ .

$$L(u) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} u^{\ell(\sigma)} \cdot \sigma \quad \text{permutations avec poids } u \text{ par cycle}$$

# **Cartes combinatoires et combinatoire algébrique - partie 2**

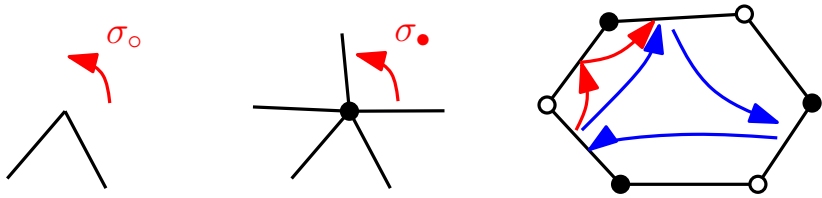
# Cartes combinatoires et combinatoire algébrique - partie 2

Guillaume Chapuy,  
European Research Council (projet CombiTop)  
CNRS & IRIF, Université Paris Diderot

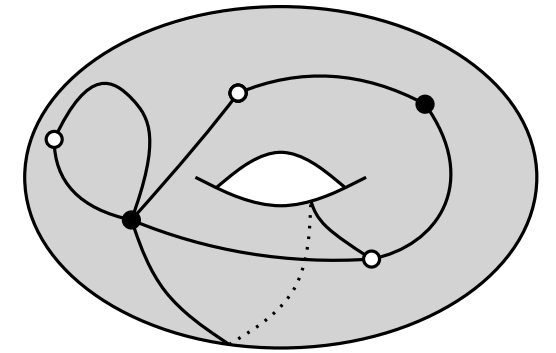
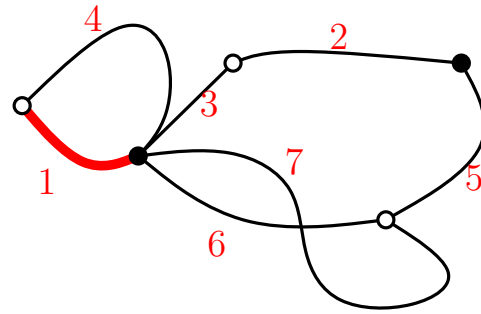


# Rappel de la situation

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$

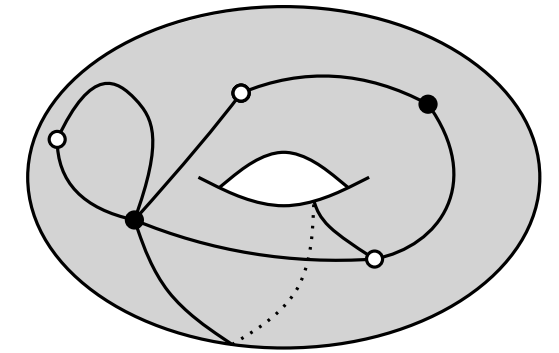
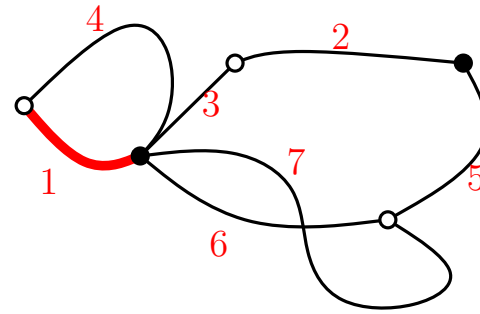
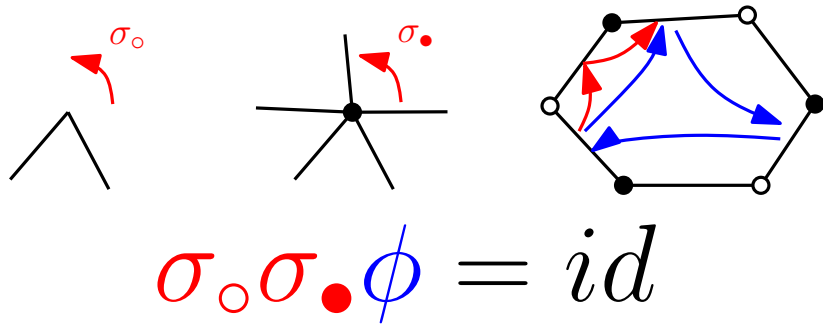


$$\sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} \phi = id$$



# Rappel de la situation

$$c(\sigma_{\circ}) + c(\sigma_{\bullet}) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$



$B_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}}(u)$  la somme des factorisations telles que  $\sigma_{\circ/\bullet} \in \mathcal{C}_{\lambda_{\circ/\bullet}}$  avec poids  $u^{\ell(\phi)}$

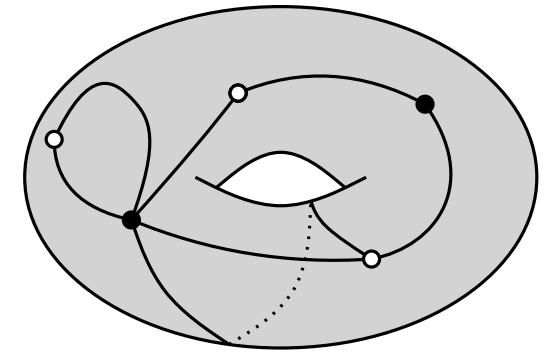
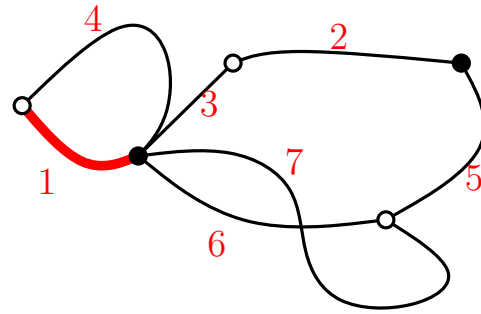
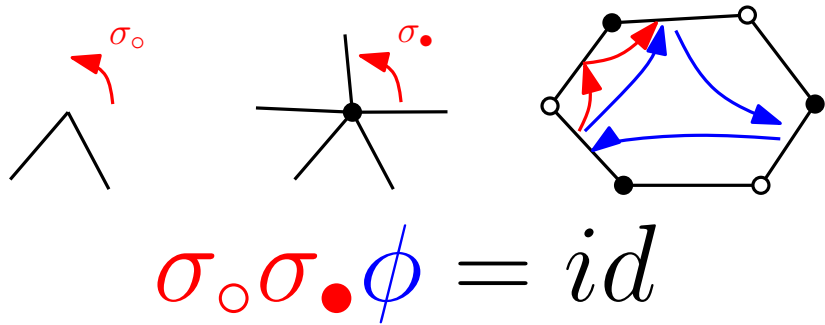
= nombre de **cartes biparties étiquetées** dont la distribution de degrés noirs/blancs est donnée par  $\lambda_{\circ}/\lambda_{\bullet}$  avec poids  $u$  par face.

$$= [id] K_{\lambda_{\circ}} K_{\lambda_{\bullet}} L(u)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \mathcal{R}} n_{\rho}^2 \nu_{\rho}(\lambda_{\circ}) \nu_{\rho}(\lambda_{\bullet}) f_{\rho}(u)$$

# Rappel de la situation

$$c(\sigma_o) + c(\sigma_\bullet) + c(\phi) = n + 2 - 2g$$



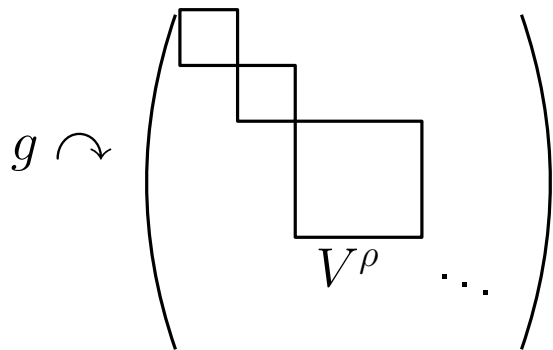
$B_{\lambda_o, \lambda_\bullet}(u)$  la somme des factorisations telles que  $\sigma_{o/\bullet} \in \mathcal{C}_{\lambda_{o/\bullet}}$  avec poids  $u^{\ell(\phi)}$

= nombre de **cartes biparties étiquetées** dont la distribution de degrés noirs/blancs est donnée par  $\lambda_o/\lambda_\bullet$  avec poids  $u$  par face.

$$= [id] K_{\lambda_o} K_{\lambda_\bullet} L(u)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \mathcal{R}} n_\rho^2 \nu_\rho(\lambda_o) \nu_\rho(\lambda_\bullet) f_\rho(u)$$

$$\mathbb{C}[G] \approx \bigoplus_{\rho \in \mathcal{R}} \text{End}(V^\rho)$$



$K_\lambda$  = sommes des éléments de  $\mathcal{C}_\lambda$

$L(u)$  = sommes de toutes les perm. avec poids  $u^{\#\text{cycles}}$ .

Sur le bloc  $V^\rho$ :  $L(u)$  = homothétie de rapport  $f_\rho(u)$

$K_\lambda$  = homothétie de rapport  $\nu_\rho(\lambda)$

## IV. Fonctions symétriques

## Les fonctions symétriques: les bases $h_\lambda$ et $p_\lambda$ .

- On regarde  $\Lambda_n$  l'espace vectoriel des séries formelles en une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  qui sont **symétriques**, et **homogènes** de degré  $n$ .

Exemples:  $1 \in \Lambda_0$ ,  $\sum_i x_i \in \Lambda_1$ ,  $\sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$ ,  $\sum_i x_i^2 - 2 \sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$

# Les fonctions symétriques: les bases $h_\lambda$ et $p_\lambda$ .

- On regarde  $\Lambda_n$  l'espace vectoriel des séries formelles en une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  qui sont **symétriques**, et **homogènes** de degré  $n$ .

Exemples:  $1 \in \Lambda_0$ ,  $\sum_i x_i \in \Lambda_1$ ,  $\sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$ ,  $\sum_i x_i^2 - 2 \sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$

- $\Lambda_n$  a une base naturellement indexée par les **partitions de  $n$**

$$m_\emptyset = 1$$

$$\square \quad m_{[1]} = \sum_i x_i$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[2]} = \sum_i x_i^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad m_{[1,1,1]} = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad m_{[2,1]} = \sum_{i,j} x_i^2 x_j$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[3]} = \sum_i x_i^3$$

( $m_\lambda$ : fonctions **symétriques** “**monomiales**”)  
(on regroupe juste tous les monômes “d'exposant  $\lambda$ ”)

# Les fonctions symétriques: les bases $h_\lambda$ et $p_\lambda$ .

- On regarde  $\Lambda_n$  l'espace vectoriel des séries formelles en une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  qui sont **symétriques**, et **homogènes** de degré  $n$ .

Exemples:  $1 \in \Lambda_0$ ,  $\sum_i x_i \in \Lambda_1$ ,  $\sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$ ,  $\sum_i x_i^2 - 2 \sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$

- $\Lambda_n$  a une base naturellement indexée par les **partitions de  $n$**

$$m_\emptyset = 1$$

$$\square \quad m_{[1]} = \sum_i x_i$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[2]} = \sum_i x_i^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad m_{[1,1,1]} = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad m_{[2,1]} = \sum_{i,j} x_i^2 x_j$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[3]} = \sum_i x_i^3$$

( $m_\lambda$ : fonctions **symétriques** "monomiales")

(on regroupe juste tous les monômes "d'exposant  $\lambda$ ")

- $\Lambda_n$  a plein d'autres bases naturelles! Toutes indexées par les partitions.

$$h_k(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

( $h_\lambda$ : fonctions **symétriques** "complètes")

$$\text{et } h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\ell(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemple: } h_{[2,1]} &= h_2 h_1 = \sum_{i \leq j, k} x_i x_j x_k \\ &= m_{[3]} + 2m_{[2,1]} + 3m_{[1,1,1]} \end{aligned}$$

# Les fonctions symétriques: les bases $h_\lambda$ et $p_\lambda$ .

- On regarde  $\Lambda_n$  l'espace vectoriel des séries formelles en une infinité de variables  $x_1, x_2, \dots$  qui sont **symétriques**, et **homogènes** de degré  $n$ .

Exemples:  $1 \in \Lambda_0$ ,  $\sum_i x_i \in \Lambda_1$ ,  $\sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$ ,  $\sum_i x_i^2 - 2 \sum_{i,j} x_i x_j \in \Lambda_2$

- $\Lambda_n$  a une base naturellement indexée par les **partitions de  $n$**

$$m_\emptyset = 1$$

$$\square \quad m_{[1]} = \sum_i x_i$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[2]} = \sum_i x_i^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad m_{[1,1,1]} = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad m_{[2,1]} = \sum_{i,j} x_i^2 x_j$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad m_{[3]} = \sum_i x_i^3$$

( $m_\lambda$ : fonctions **symétriques** "monomiales")  
(on regroupe juste tous les monômes "d'exposant  $\lambda$ ")

- $\Lambda_n$  a plein d'autres bases naturelles! Toutes indexées par les partitions.

$$h_k(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

( $h_\lambda$ : fonctions **symétriques** "complètes")

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_i x_i^k \quad \text{et} \quad p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\ell(\lambda)}$$

( $p_\lambda$ : fonctions "sommés de puissances" (powersums))

$$\text{et } h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\ell(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemple: } h_{[2,1]} &= h_2 h_1 = \sum_{i \leq j, k} x_i x_j x_k \\ &= m_{[3]} + 2m_{[2,1]} + 3m_{[1,1,1]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemple: } p_{[2,2,1]} &= p_2^2 p_1 = \sum_{i,j,k} x_i^2 x_j^2 x_k \\ &= \dots \end{aligned}$$



## Une autre base: les fonctions de Schur

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$**  (SSYT) est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1) \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$
$$x^T = x_2^2 x_3^2 x_5 x_7 x_9^3 x_{12}$$

La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

# Une autre base: les fonctions de Schur

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1) \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$x^T = x_2^2 x_3^2 x_5 x_7 x_9^3 x_{12}$$

$$s_{[2]} = \sum_{i \leq j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array}$$

$$s_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

$$s_{[3,1]} = \sum_{\substack{i \leq j \leq k \\ m > i}} x_i x_j x_k x_m \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline m & & \\ \hline i & j & k \\ \hline \end{array}$$

La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandards de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

# Une autre base: les fonctions de Schur

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$**  (SSYT) est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1) \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} s_{[2]} = \sum_{i \leq j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \\ s_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array} \end{array} \quad s_{[3,1]} = \sum_{\substack{i \leq j \leq k \\ m > i}} x_i x_j x_k x_m \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline m & & \\ \hline i & j & k \\ \hline \end{array}$$

La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

**Théorème:** Les  $s_\lambda$  pour  $\lambda \vdash n$  forment une base de  $\Lambda_n$ .

# Une autre base: les fonctions de Schur

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$**  (SSYT) est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

$$\lambda = (4, 4, 2, 1) \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} s_{[2]} = \sum_{i \leq j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \\ s_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} s_{[3,1]} = \sum_{\substack{i \leq j \leq k \\ m > i}} x_i x_j x_k x_m \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline m & & \\ \hline i & j & k \\ \hline \end{array} \end{array}$$

La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandards de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

**Théorème:** Les  $s_\lambda$  pour  $\lambda \vdash n$  forment une base de  $\Lambda_n$ .

**dém:** 1. ce sont bien des fonctions symétriques!

2. le changement de  $s_\lambda$  à  $m_\mu$  est triangulaire

# Une autre base: les fonctions de Schur

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

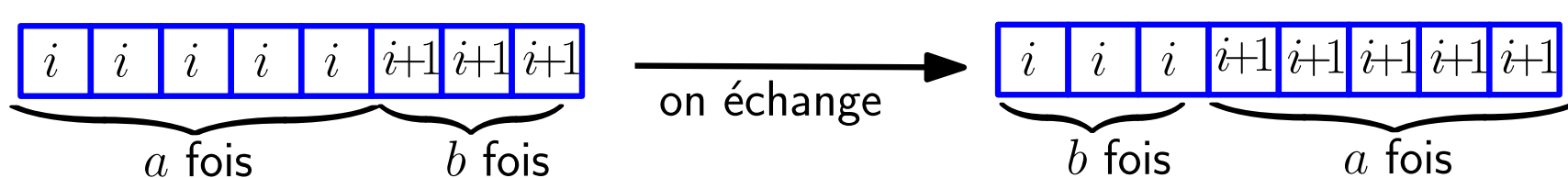
$$\lambda = (4, 4, 2, 1) \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} s_{[2]} = \sum_{i \leq j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \\ s_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array} \end{array} \quad s_{[3,1]} = \sum_{\substack{i \leq j \leq k \\ m > i}} x_i x_j x_k x_m \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline m & & \\ \hline i & j & k \\ \hline \end{array}$$

La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

**Théorème:** Les  $s_\lambda$  pour  $\lambda \vdash n$  forment une base de  $\Lambda_n$ .

**dém:** 1. **ce sont bien des fonctions symétriques!**  
 Il y a deux sortes d'entrées  $i, i + 1$ . Celles qui sont comme ça:  $\begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline i \\ \hline \end{array}$  et les autres:



2. **le changement de  $s_\lambda$  à  $m_\mu$  est triangulaire**

# Une autre base: les fonctions de Schur

- Si  $\lambda$  est une partition, un **tableau semistandard de forme  $\lambda$  (SSYT)** est un remplissage de  $\lambda$  qui est  $\leq$  en lignes et  $\vee$  en colonnes.

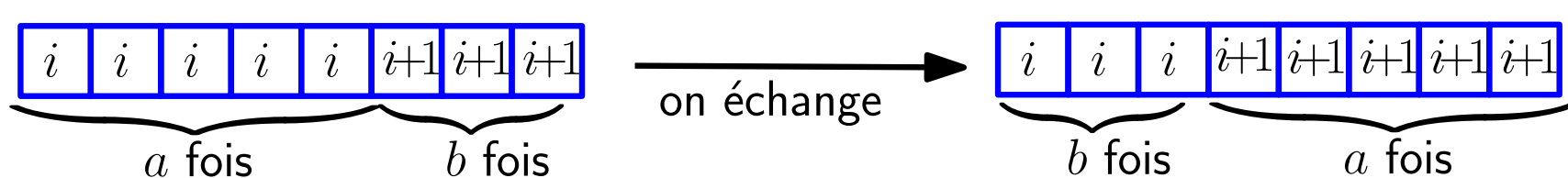
$$\lambda = (4, 4, 2, 1) \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & & & \\ \hline 5 & 12 & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} s_{[2]} = \sum_{i \leq j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \\ s_{[1,1]} = \sum_{i < j} x_i x_j \quad \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array} \end{array} \quad s_{[3,1]} = \sum_{\substack{i \leq j \leq k \\ m > i}} x_i x_j x_k x_m \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline m & & \\ \hline i & j & k \\ \hline \end{array}$$

La **fonction de Schur**  $s_\lambda$  est la série génératrice des tableaux semistandard de forme  $\lambda$

$$s_\lambda(x) = \sum_{T:SSYT(\lambda)} x^T$$

**Théorème:** Les  $s_\lambda$  pour  $\lambda \vdash n$  forment une base de  $\Lambda_n$ .

**dém:** 1. **ce sont bien des fonctions symétriques!**  
 Il y a deux sortes d'entrées  $i, i + 1$ . Celles qui sont comme ça:  $\begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline i \\ \hline \end{array}$  et les autres:



2. **le changement de  $s_\lambda$  à  $m_\mu$  est triangulaire** pour l'ordre de dominance:

$$\lambda \leq \mu \text{ ssi } \lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k \text{ pour tout } k. \quad \square$$

## Et revoilà les caractères!

**Théorème:** Les coefficients de changement de base des  $s_\lambda$  aux powersums  $p_\mu$  sont donnés par les caractères du groupe symétrique!

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} n_\lambda \nu_\lambda(\mu) p_\mu \stackrel{\text{not.}}{=} s_\lambda(\mathbf{p})$$

où les  $\nu_\lambda(\mu) = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{g \in \mathcal{C}_\mu} \chi^\lambda(g)$  sont les “caractères” vus hier!

## Et revoilà les caractères!

**Théorème:** Les coefficients de changement de base des  $s_\lambda$  aux powersums  $p_\mu$  sont donnés par les caractères du groupe symétrique!

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} n_\lambda \nu_\lambda(\mu) p_\mu \stackrel{\text{not.}}{=} s_\lambda(\mathbf{p})$$

où les  $\nu_\lambda(\mu) = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{g \in \mathcal{C}_\mu} \chi^\lambda(g)$  sont les “caractères” vus hier!

On va admettre ce résultat comme les autres éléments de théorie des représentations. Mais il implique:



## Et revoilà les caractères!

**Théorème:** Les coefficients de changement de base des  $s_\lambda$  aux powersums  $p_\mu$  sont donnés par les caractères du groupe symétrique!

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} n_\lambda \nu_\lambda(\mu) p_\mu \stackrel{\text{not.}}{=} s_\lambda(\mathbf{p})$$

où les  $\nu_\lambda(\mu) = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{g \in \mathcal{C}_\mu} \chi^\lambda(g)$  sont les “caractères” vus hier!

On va admettre ce résultat comme les autres éléments de théorie des représentations. Mais il implique:

**Théorème:** La série génératrice des cartes biparties  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$  où l'on a mis un poids

$p_i$  pour les sommets blancs de degré  $i$

$q_i$  pour les sommets noirs de degré  $i$

$u$  pour chaque face

s'écrit

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet \vdash n} B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet}(u) p_{\lambda_\circ} q_{\lambda_\bullet}$$

$$= \sum_{\rho \in \mathcal{P}} f_\rho(u) s_\rho(\mathbf{p}) s_\rho(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{P} = \cup_n \mathcal{P}_n = \{\text{partitions}\}$$

## Et revoilà les caractères!

**Théorème:** Les coefficients de changement de base des  $s_\lambda$  aux powersums  $p_\mu$  sont donnés par les caractères du groupe symétrique!

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} n_\lambda \nu_\lambda(\mu) p_\mu \stackrel{\text{not.}}{=} s_\lambda(\mathbf{p})$$

où les  $\nu_\lambda(\mu) = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{g \in \mathcal{C}_\mu} \chi^\lambda(g)$  sont les “caractères” vus hier!

On va admettre ce résultat comme les autres éléments de théorie des représentations. Mais il implique:

**Théorème:** La série génératrice des cartes biparties  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$  où l'on a mis un poids

$p_i$  pour les sommets blancs de degré  $i$

$q_i$  pour les sommets noirs de degré  $i$

$u$  pour chaque face

s'écrit

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet \vdash n} B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet}(u) p_{\lambda_\circ} q_{\lambda_\bullet}$$

$$= \sum_{\rho \in \mathcal{P}} f_\rho(u) s_\rho(\mathbf{p}) s_\rho(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{P} = \cup_n \mathcal{P}_n = \{\text{partitions}\}$$

dém:  $B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet}(u) = \sum \#\{\sigma_\circ \sigma_\bullet \phi = id\} u^{\ell(\phi)} = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \vdash n} n_\rho^2 \nu_\rho(\lambda_\circ) \nu_\rho(\lambda_\bullet) f_\rho(u)$

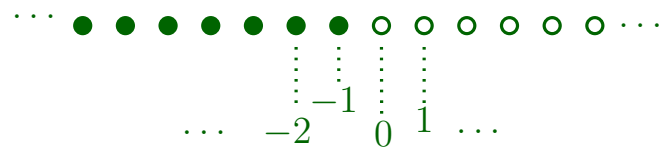
## **V. Des déterminants**

**(= de la combinatoire bijective!)**

# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$



# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$





# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

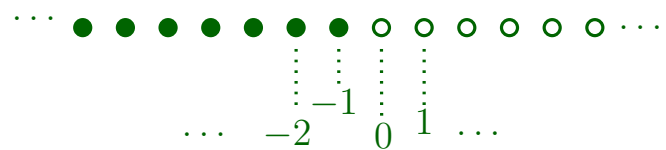
$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



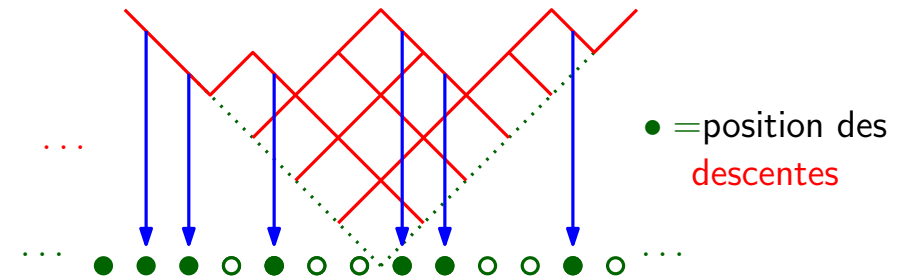
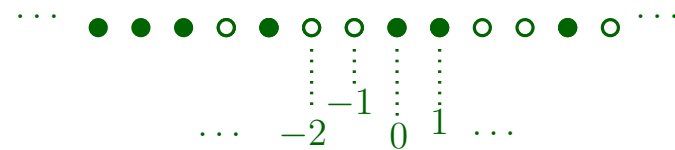
# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$



$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$

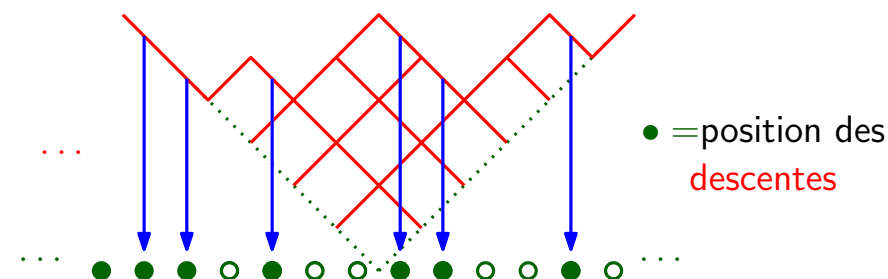


# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



- Si  $M = (M_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  est une matrice **biinfinie** on note  $[M]_{\lambda}^{\mu}$  le sous-déterminant de  $M$  induit par les lignes/colonnes des diagrammes mayas de  $\lambda$  et  $\mu$

$$[M]_{\lambda}^{\mu} = \det \left( M_{\lambda_i - i, \mu_j - j} \right)_{i,j \geq 1}$$

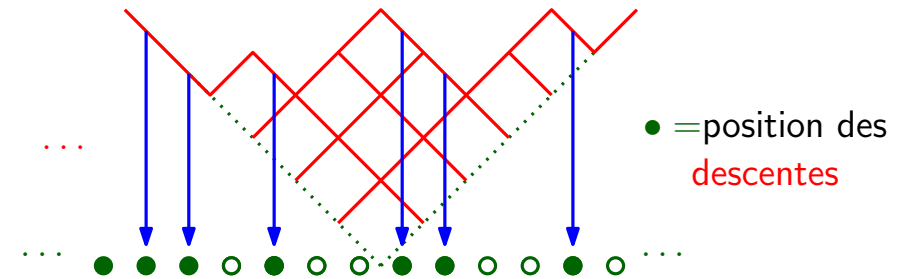
dans les bons cas, c'est bien défini! Par exemple:

# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



- Si  $M = (M_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  est une matrice **biinfinie** on note  $[M]_{\lambda}^{\mu}$  le sous-déterminant de  $M$  induit par les lignes/colonnes des diagrammes mayas de  $\lambda$  et  $\mu$

$$[M]_{\lambda}^{\mu} = \det \left( M_{\lambda_i - i, \mu_j - j} \right)_{i,j \geq 1}$$

dans les bons cas, c'est bien défini! Par exemple:

**Théorème (Jacobi-Trudi):** La fonction de Schur  $s_{\lambda}(x)$  s'exprime en fonction des fonctions complètes  $h_k$  par

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = [H]_{\emptyset}^{\lambda} \quad \text{où } H = (h_{j-i}(\mathbf{x}))_{i,j}$$

$$= \det(h_{\lambda_j - j + i})_{i,j \geq 1}$$

$$H = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

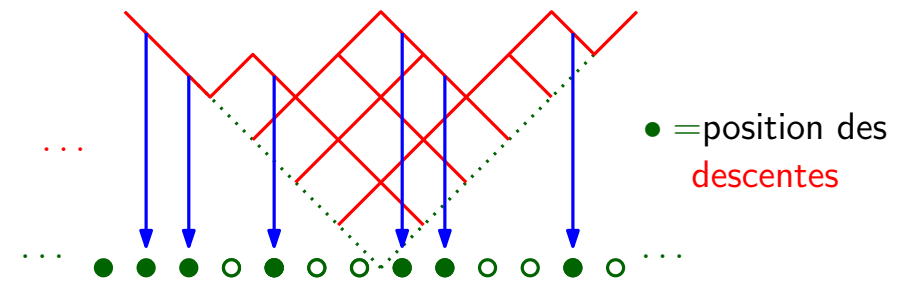
$0$        $h_1$        $h_2$   
 $1$

# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



- Si  $M = (M_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  est une matrice **biinfinie** on note  $[M]_{\lambda}^{\mu}$  le sous-déterminant de  $M$  induit par les lignes/colonnes des diagrammes mayas de  $\lambda$  et  $\mu$

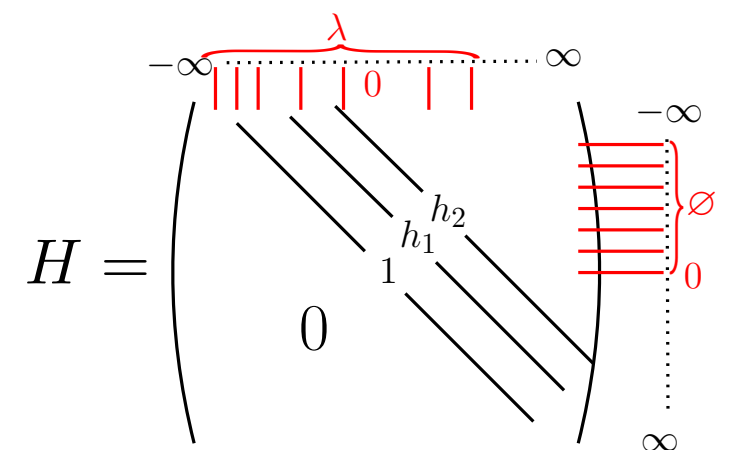
$$[M]_{\lambda}^{\mu} = \det \left( M_{\lambda_i - i, \mu_j - j} \right)_{i,j \geq 1}$$

dans les bons cas, c'est bien défini! Par exemple:

**Théorème (Jacobi-Trudi):** La fonction de Schur  $s_{\lambda}(x)$  s'exprime en fonction des fonctions complètes  $h_k$  par

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = [H]_{\emptyset}^{\lambda} \quad \text{où } H = (h_{j-i}(\mathbf{x}))_{i,j}$$

$$= \det(h_{\lambda_j - j + i})_{i,j \geq 1}$$

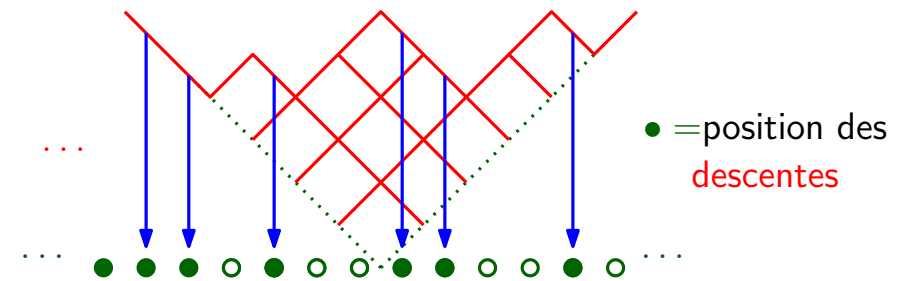


# Identité de Jacobi-Trudi

- Étant donnée une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  on peut regarder le sous-ensemble  $\{\lambda_i - i, i \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$  appelé le **diagramme Maya** de  $\lambda$ .

$$\lambda = \emptyset = (0, 0, \dots)$$

$$\lambda = [5, 3, 3, 1]$$



- Si  $M = (M_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  est une matrice **biinfinie** on note  $[M]_{\lambda}^{\mu}$  le sous-déterminant de  $M$  induit par les lignes/colonnes des diagrammes mayas de  $\lambda$  et  $\mu$

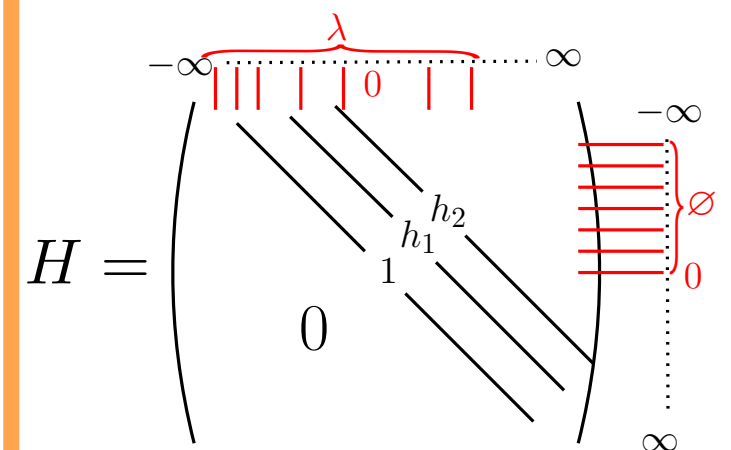
$$[M]_{\lambda}^{\mu} = \det \left( M_{\lambda_i - i, \mu_j - j} \right)_{i,j \geq 1}$$

dans les bons cas, c'est bien défini! Par exemple:

**Théorème (Jacobi-Trudi):** La fonction de Schur  $s_{\lambda}(x)$  s'exprime en fonction des fonctions complètes  $h_k$  par

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = [H]_{\emptyset}^{\lambda} \quad \text{où } H = (h_{j-i}(\mathbf{x}))_{i,j}$$

$$= \det(h_{\lambda_j - j + i})_{i,j \geq 1}$$



# Identité de Jacobi-Trudi: démonstration!?

- $s_\lambda$  compte les tableaux de Young de forme  $\lambda$

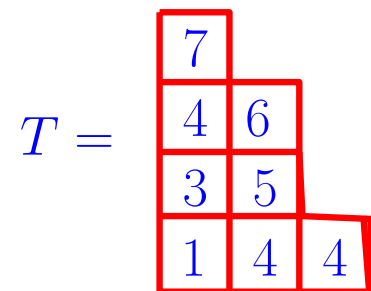
$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$x^T = x_1 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7$$

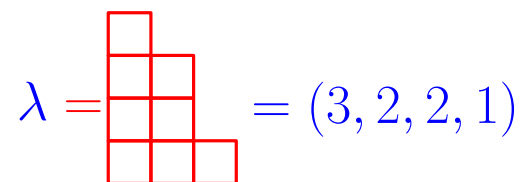
$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = (3, 2, 2, 1)$$

# Identité de Jacobi-Trudi: démonstration!?

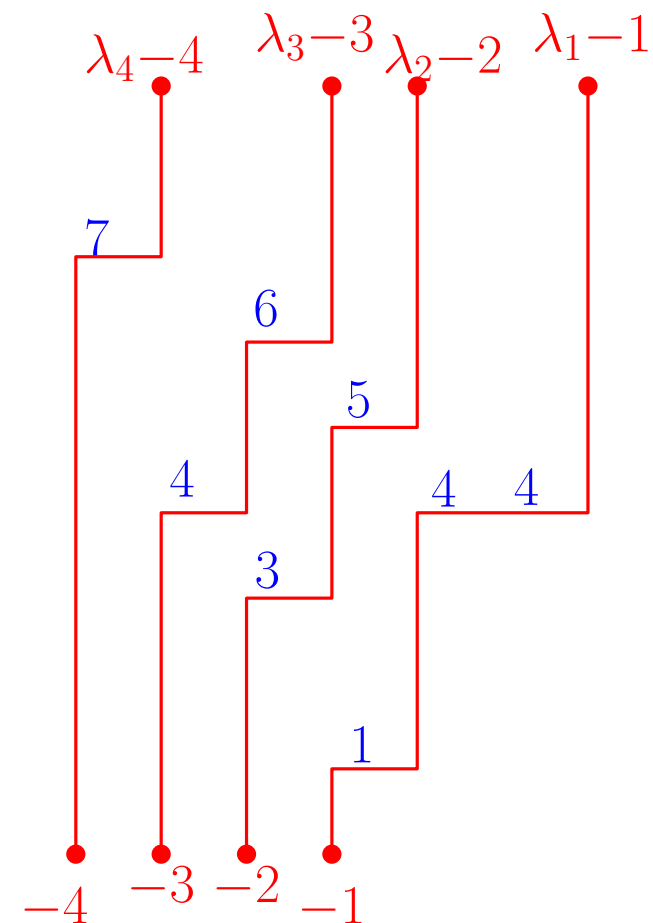
- $s_\lambda$  compte les tableaux de Young de forme  $\lambda$



$$x^T = x_1 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7$$



- Il y a une bijection avec des systèmes de chemins sur  $\mathbb{N}^2$  qui ne se coupent pas:

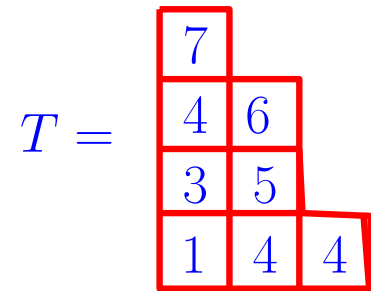


Le  $i$ ème chemin va de  $(-i, 0)$  à  $(\lambda_i - i, \infty)$  et collecte un poids  $x_j$  par pas — à la hauteur  $j$

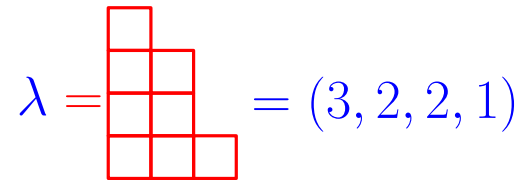


# Identité de Jacobi-Trudi: démonstration!?

- $s_\lambda$  compte les tableaux de Young de forme  $\lambda$



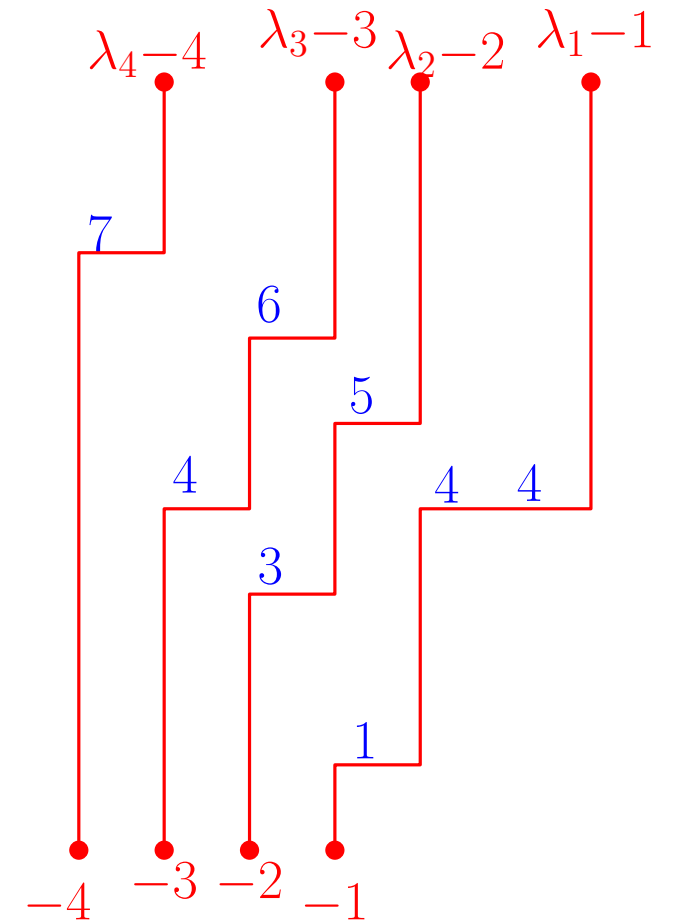
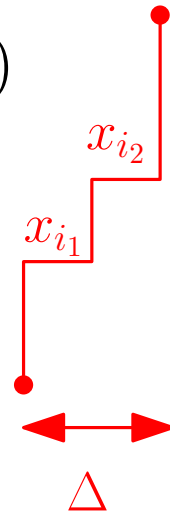
$$x^T = x_1 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7$$



- Il y a une bijection avec des systèmes de chemins sur  $\mathbb{N}^2$  qui ne se coupent pas:

- La série des chemins de  $(-i, 0)$  à  $(-i + k, \infty)$  vaut clairement:

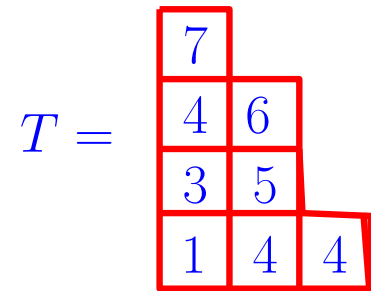
$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = h_k(\mathbf{x})$$



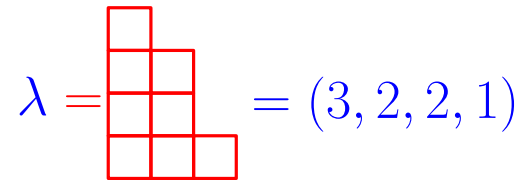
Le  $i$ ème chemin va de  $(-i, 0)$  à  $(\lambda_i - i, \infty)$  et collecte un poids  $x_j$  par pas — à la hauteur  $j$

# Identité de Jacobi-Trudi: démonstration!?

- $s_\lambda$  compte les tableaux de Young de forme  $\lambda$



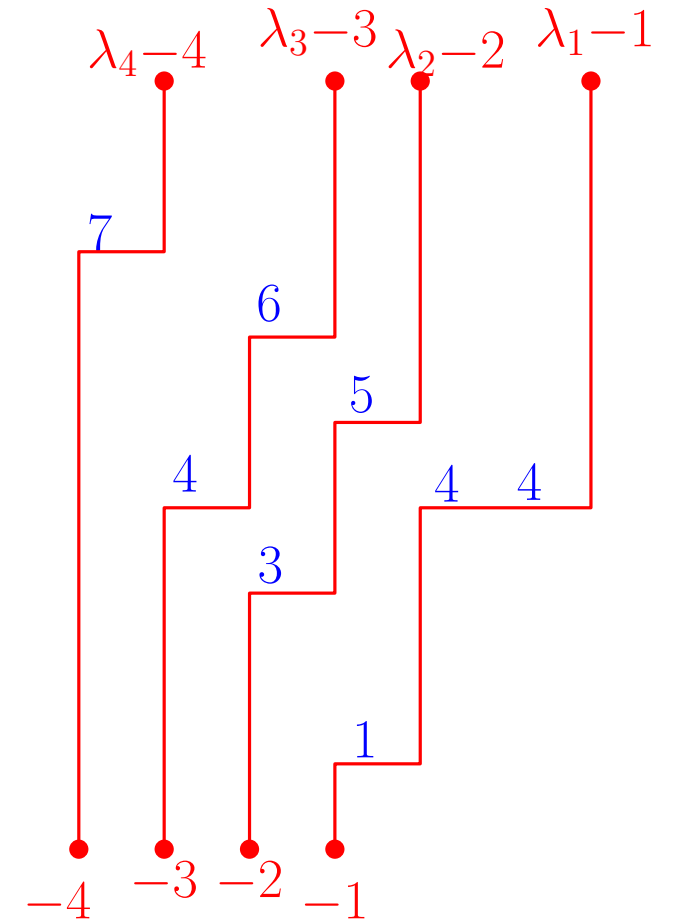
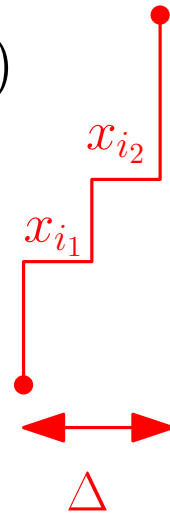
$$x^T = x_1 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7$$



- Il y a une bijection avec des systèmes de chemins sur  $\mathbb{N}^2$  qui ne se coupent pas:

- La série des chemins de  $(-i, 0)$  à  $(-i + k, \infty)$  vaut clairement:

$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = h_k(\mathbf{x})$$



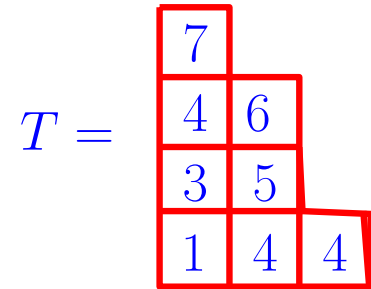
Le  $i$ ème chemin va de  $(-i, 0)$  à  $(\lambda_i - i, \infty)$  et collecte un poids  $x_j$  par pas — à la hauteur  $j$

Par le lemme de Gessel-Viennot:

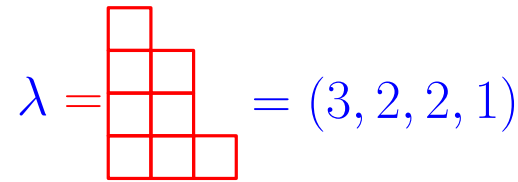
$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det(h_{\lambda_j - j + i})_{i,j \geq 1} \quad \square$$

# Identité de Jacobi-Trudi: démonstration!?

- $s_\lambda$  compte les tableaux de Young de forme  $\lambda \dots$



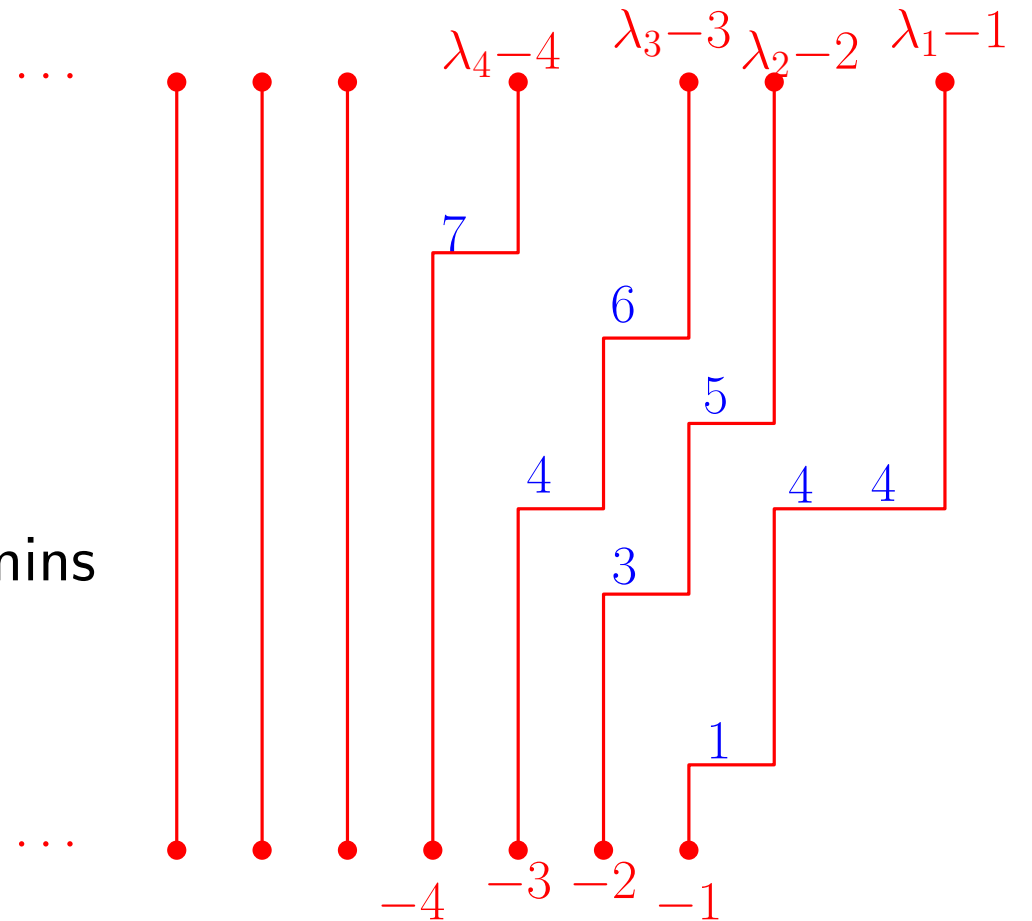
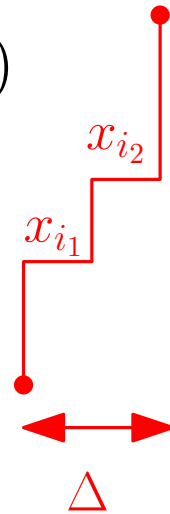
$$x^T = x_1 x_3 x_4^2 x_5 x_6 x_7$$



- Il y a une bijection avec des systèmes de chemins sur  $\mathbb{N}^2$  qui ne se coupent pas:

- La série des chemins de  $(-i, 0)$  à  $(-i + k, \infty)$  vaut clairement:

$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = h_k(\mathbf{x})$$



Le  $i$ ème chemin va de  $(-i, 0)$  à  $(\lambda_i - i, \infty)$  et collecte un poids  $x_j$  par pas  $\rightarrow$  à la hauteur  $j$

Par le lemme de Gessel-Viennot:

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det(h_{\lambda_j - j + i})_{i,j \geq 1} \quad \square$$

$$= [H]_\emptyset^\lambda$$

# **IV. Cartes et hiérarchie de Kadomtsev-Petviashvili (=hiérarchie KP)**

Note: la bonne façon de construire la hiérarchie KP est de construire proprement l'espace de Fock et la Grassmannienne de Sato.

Ce n'est pas si compliqué, on consultera les références en dernière page de ces transparents.

Néanmoins pour la fin de ces transparents on se contentera de donner une brève idée, incomplète, en parlant uniquement de matrices infinies et de mineurs, et en utilisant la matrice de Jacobi-Trudi en place des "opérateurs de vertex".

# Un gros théorème

**Théorème:** La série génératrice des cartes biparties (connexes)

$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$  avec poids  $p_i$  pour les sommets blancs de degré  $i$   
 $q_i$  pour les sommets noirs de degré  $i$   
 $u$  pour chaque face

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet} \vdash n} B_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}}(u) p_{\lambda_{\circ}} q_{\lambda_{\bullet}}$$

est une **fonction tau** de la hiérarchie KP en les variables  $p_i$ . Concrètement cela signifie qu'elle satisfait plein d'EDP **non triviales** en les  $p_i$ . Par exemple (données ici pour  $G = \ln F$ )

$$G_{2,2} - G_{3,1} + \frac{1}{12} G_{1^4} + \frac{1}{2} (G_{1^2})^2 = 0 \quad (\text{KP})$$

$$G_{3,2} - G_{4,1} + \frac{1}{6} G_{2,1^3} + G_{1,1} G_{2,1} = 0$$

$$G_{4,2} - G_{5,1} + \frac{1}{4} G_{3,1^3} - \frac{1}{120} G_{1^6} + G_{1^2} G_{3,1} - \frac{1}{2} G_{2,1}^2 - \frac{1}{8} G_{3,1}^2 - \frac{1}{12} G_{1^2} G_{1^4} = 0$$

...

Rien que la première équation donne des résultats qui ne sont accessibles par aucune autre méthode! cf exo du TD pour voir comment Goulden et Jackson s'en servent pour compter les **triangulations** ( $p_k = x \delta_{k,3}$ ,  $q_k = \delta_{k,2}$ ).

# La hiérarchie KP - I - relations de Plücker

**Définition:** On dit que  $\tau(\mathbf{p}) \equiv \tau(p_1, p_2, \dots)$  est une **fonction tau** s'il existe une **matrice biinfinie**  $A = (A_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} [A]_{\emptyset}^{\lambda} s_{\lambda}(p)$$

(note: la matrice  $A$  peut être très peu explicite voire pas du tout! On lui demande juste d'exister, et aussi que les déterminants  $[A]_{\emptyset}^{\rho}$  soient bien définis. Cela nécessiterait des considérations plus poussées comme annoncé en préambule).

# La hiérarchie KP - I - relations de Plücker

**Définition:** On dit que  $\tau(\mathbf{p}) \equiv \tau(p_1, p_2, \dots)$  est une **fonction tau** s'il existe une **matrice biinfinie**  $A = (A_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} [A]_{\emptyset}^{\lambda} s_{\lambda}(p)$$

(note: la matrice  $A$  peut être très peu explicite voire pas du tout! On lui demande juste d'exister, et aussi que les déterminants  $[A]_{\emptyset}^{\rho}$  soient bien définis. Cela nécessiterait des considérations plus poussées comme annoncé en préambule).

- Question: si  $\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} s_{\lambda}$  pour des coefficients  $a_{\lambda}$ , comment savoir si  $\tau$  est de cette forme ???, i.e. si les  $a_{\lambda}$  sont tous les **mineurs d'une même grande matrice  $A$  ???**



# La hiérarchie KP - I - relations de Plücker

**Définition:** On dit que  $\tau(\mathbf{p}) \equiv \tau(p_1, p_2, \dots)$  est une **fonction tau** s'il existe une **matrice biinfinie**  $A = (A_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} [A]_{\emptyset}^{\lambda} s_{\lambda}(p)$$

(note: la matrice  $A$  peut être très peu explicite voire pas du tout! On lui demande juste d'exister, et aussi que les déterminants  $[A]_{\emptyset}^{\rho}$  soient bien définis. Cela nécessiterait des considérations plus poussées comme annoncé en préambule).

• Question: si  $\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} s_{\lambda}$  pour des coefficients  $a_{\lambda}$ , comment savoir si  $\tau$  est de cette forme ???, i.e. si les  $a_{\lambda}$  sont tous les **mineurs d'une même grande matrice  $A$  ???**

• Les sous-déterminants d'une même matrice satisfont des relations quadratiques appelées **relations de Plücker**. Exemple, matrice  $2 \times 4$ :  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

# La hiérarchie KP - I - relations de Plücker

**Définition:** On dit que  $\tau(\mathbf{p}) \equiv \tau(p_1, p_2, \dots)$  est une **fonction tau** s'il existe une **matrice biinfinie**  $A = (A_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} [A]_{\emptyset}^{\lambda} s_{\lambda}(p)$$

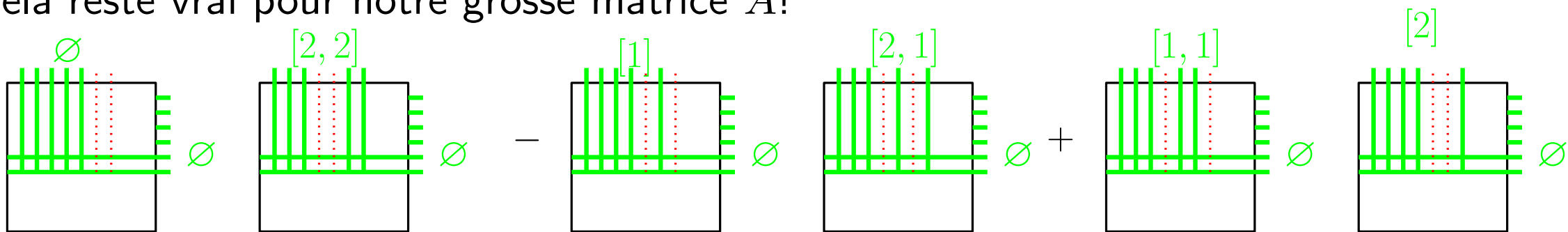
(note: la matrice  $A$  peut être très peu explicite voire pas du tout! On lui demande juste d'exister, et aussi que les déterminants  $[A]_{\emptyset}^{\rho}$  soient bien définis. Cela nécessiterait des considérations plus poussées comme annoncé en préambule).

- Question: si  $\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} s_{\lambda}$  pour des coefficients  $a_{\lambda}$ , comment savoir si  $\tau$  est de cette forme ???, i.e. si les  $a_{\lambda}$  sont tous les **mineurs d'une même grande matrice  $A$  ???**

- Les sous-déterminants d'une même matrice satisfont des relations quadratiques appelées **relations de Plücker**. Exemple, matrice  $2 \times 4$ :  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

- Cela reste vrai pour notre grosse matrice  $A$ !



$$a_{\emptyset} a_{[2,2]} - a_{[1]} a_{[2,1]} + a_{[2]} a_{[1,1]} = 0$$

exemple de condition nécessaire sur les  $a_{\lambda}$

## La hiérarchie KP -II

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- $a_{\lambda}$  est le “coefficient” de  $s_{\lambda}$ . Par exemple,  $a_{[1]}$  est le coefficient de  $s_{[1]} = p_1$

$$\rightarrow a_{[1]} = \left. \frac{\partial}{\partial p_1} \tau(\mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}=0}$$

## La hiérarchie KP -II

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- $a_{\lambda}$  est le “coefficient” de  $s_{\lambda}$ . Par exemple,  $a_{[1]}$  est le coefficient de  $s_{[1]} = p_1$

$$\rightarrow a_{[1]} = \left. \frac{\partial}{\partial p_1} \tau(\mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}=0}$$

Et ça continue...  $a_{[2]}$  est le coefficient de  $s_{[2]} = p_1^2 + p_2$

...  $a_{[1,1]}$  est le coefficient de  $s_{[1,1]} = p_1^2 - p_2$

## La hiérarchie KP -II

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- $a_{\lambda}$  est le “coefficient” de  $s_{\lambda}$ . Par exemple,  $a_{[1]}$  est le coefficient de  $s_{[1]} = p_1$

$$\rightarrow a_{[1]} = \left. \frac{\partial}{\partial p_1} \tau(\mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}=0}$$

Et ça continue...  $a_{[2]}$  est le coefficient de  $s_{[2]} = p_1^2 + p_2$

...  $a_{[1,1]}$  est le coefficient de  $s_{[1,1]} = p_1^2 - p_2$

$$\rightarrow a_{[2]} = \left. \left( \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} \tau(\mathbf{p}) - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_2} \tau(\mathbf{p}) \right) \right|_{\mathbf{p}=0} \quad \rightarrow a_{[1,1]} = \left. \left( \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} \tau(\mathbf{p}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial p_2} \tau(\mathbf{p}) \right) \right|_{\mathbf{p}=0}$$

→ chaque relation entre les sous-déterminants induit des relations entre les dérivées partielles à  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .

# La hiérarchie KP -II

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- $a_{\lambda}$  est le “coefficient” de  $s_{\lambda}$ . Par exemple,  $a_{[1]}$  est le coefficient de  $s_{[1]} = p_1$

$$\rightarrow a_{[1]} = \left. \frac{\partial}{\partial p_1} \tau(\mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}=0}$$

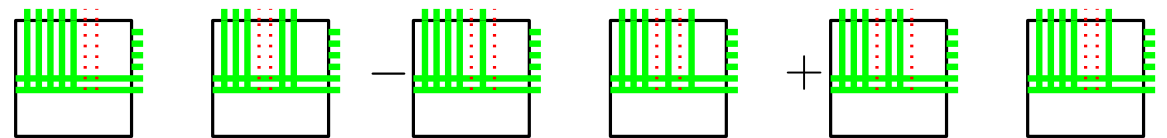
Et ça continue...  $a_{[2]}$  est le coefficient de  $s_{[2]} = p_1^2 + p_2$

...  $a_{[1,1]}$  est le coefficient de  $s_{[1,1]} = p_1^2 - p_2$

$$\rightarrow a_{[2]} = \left. \left( \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} \tau(\mathbf{p}) - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_2} \tau(\mathbf{p}) \right) \right|_{\mathbf{p}=0} \quad \rightarrow a_{[1,1]} = \left. \left( \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} \tau(\mathbf{p}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial p_2} \tau(\mathbf{p}) \right) \right|_{\mathbf{p}=0}$$

→ chaque relation entre les sous-déterminants induit des relations entre les dérivées partielles à  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .

- Exemple: par un **petit** calcul, on trouve:



$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{11111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) \Big|_{\mathbf{p}=0} = 0$$

## La hiérarchie KP -III

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- On a démontré:

**Proposition A:** les dérivées en  $\mathbf{p} = 0$  d'une fonction tau satisfont des relations quadratiques non triviales, comme:

$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{1111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) \Big|_{\mathbf{p}=0} = 0$$

## La hiérarchie KP -III

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- On a démontré:

**Proposition A:** les dérivées en  $\mathbf{p} = 0$  d'une fonction tau satisfont des relations quadratiques non triviales, comme:

$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{1111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) \Big|_{\mathbf{p}=0} = 0$$



# La hiérarchie KP -III

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- On a démontré:

**Proposition A:** les dérivées en  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  d'une fonction tau satisfont des relations quadratiques non triviales, comme:

$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{1111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = 0$$

- Le point crucial est maintenant

**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

En particulier on peut remplacer  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  par  $\mathbf{p} = \mathbf{r}$  et donc on a une **VRAIE EDP**:

$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{1111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) = 0$$

# La hiérarchie KP -III

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

- On a démontré:

**Proposition A:** les dérivées en  $\mathbf{p} = 0$  d'une fonction tau satisfont des relations quadratiques non triviales, comme:

$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{1111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) \Big|_{\mathbf{p}=0} = 0$$

- Le point crucial est maintenant

**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

En particulier on peut remplacer  $\mathbf{p} = 0$  par  $\mathbf{p} = \mathbf{r}$  et donc on a une **VRAIE EDP**:

$$\frac{1}{12} \tau (\tau_{1111} - 12\tau_{13} + 12\tau_{22}) - \frac{1}{3} \tau_1 (\tau_{111} - 3\tau_3) + \frac{1}{4} (\tau_{11} + 2\tau_2) (\tau_{11} - 2\tau_2) = 0$$

Plus généralement  $A + B$  implique:

**Théorème (A+B)** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction tau alors elle satisfait une infinité d'équations aux dérivées partielles quadratiques. Chacune de ces équations est une relation de type Plücker sur les déterminants  $A_{[\emptyset]}^{\lambda}$  d'une grande matrice infinie.  
 $\implies$  l'ensemble de ces équations est appelé **hiérarchie KP**.

## Démonstration de la proposition B?

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_{\lambda} = [A]_{\emptyset}^{\lambda}$$

**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

**étape 1:** Comprendre comment se shiftent les fonctions de Schur. On a:

$$s_{\lambda}(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} (???) (\mathbf{r}) s_{\mu}(\mathbf{p})$$

## Démonstration de la proposition B?

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_\lambda = [A]_\emptyset^\lambda$$

**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

**étape 1:** Comprendre comment se shiftent les fonctions de Schur. On a:

$$s_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} [H(\mathbf{r})]_\mu^\lambda s_\mu(\mathbf{p})$$

# Démonstration de la proposition B?

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_\lambda = [A]_\emptyset^\lambda$$

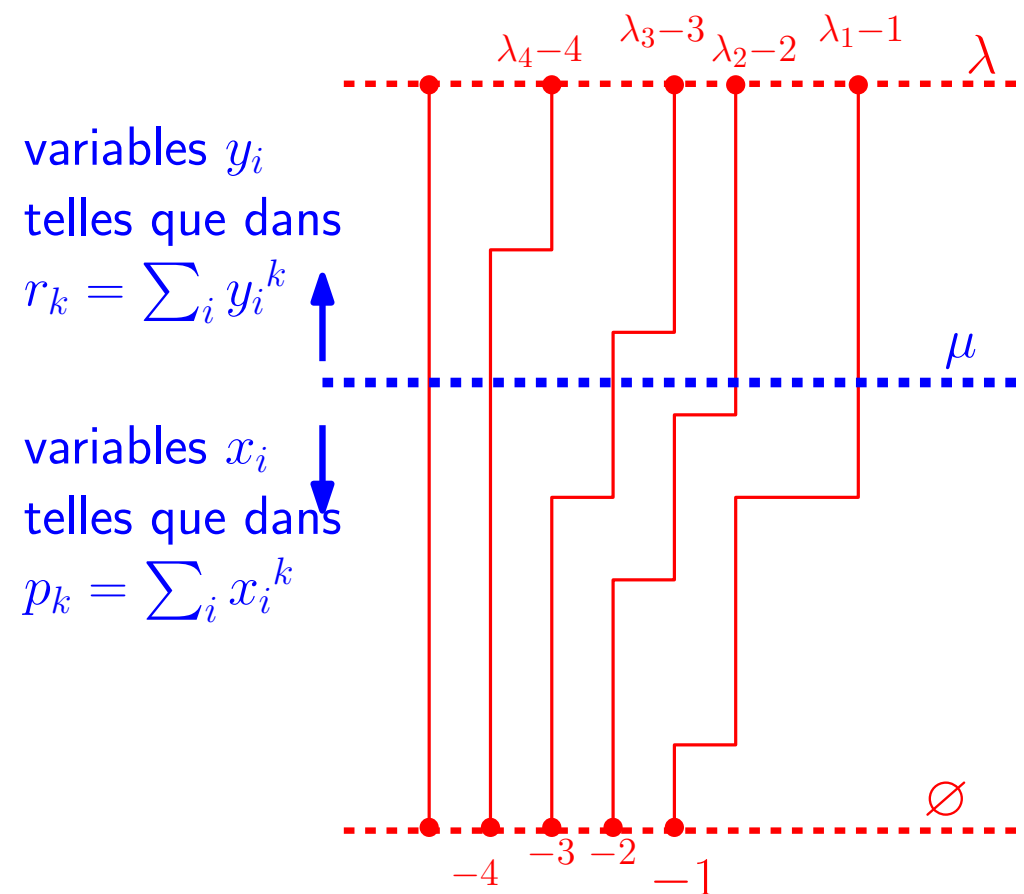
**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

**étape 1:** Comprendre comment se shiftent les fonctions de Schur. On a:

$$s_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} [H(\mathbf{r})]_\mu^\lambda s_\mu(\mathbf{p})$$

$$(p + r)_k = \sum_i x_i^k + \sum_j y_j^k$$

“ajouter les powersums” = “faire l’union des alphabets”



# Démonstration de la proposition B?

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_\lambda = [A]_\emptyset^\lambda$$

**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

**étape 1:** Comprendre comment se shiftent les fonctions de Schur. On a:

$$s_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} [H(\mathbf{r})]_\mu^\lambda s_\mu(\mathbf{p})$$

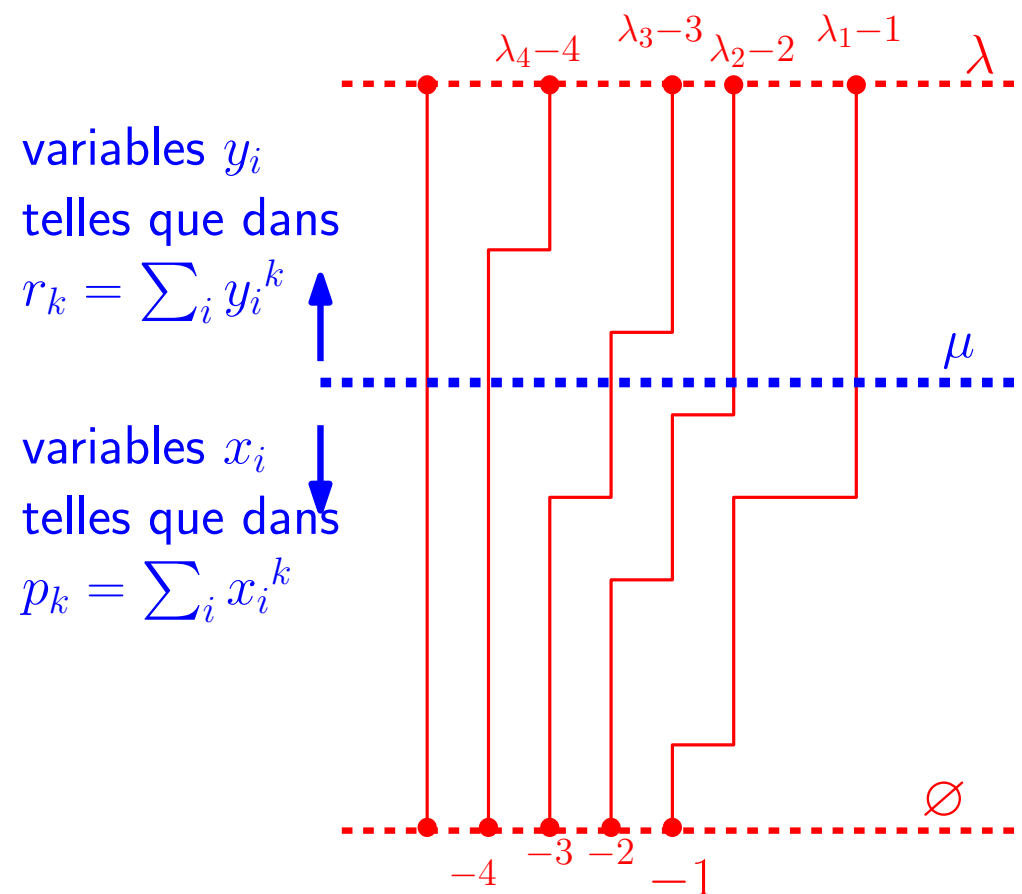
$$(p + r)_k = \sum_i x_i^k + \sum_j y_j^k$$

“ajouter les powersums” = “faire l’union des alphabets”

**étape 2: formule de Cauchy-Binet!**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices et  $I, J$  sous-ensembles de lignes/colonnes

$$[AB]_I^J := \det(AB)_{i \in I, j \in J} = \sum_K [A]_I^K [B]_K^J$$



# Démonstration de la proposition B?

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} a_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}) \quad \text{où } a_\lambda = [A]_\emptyset^\lambda$$

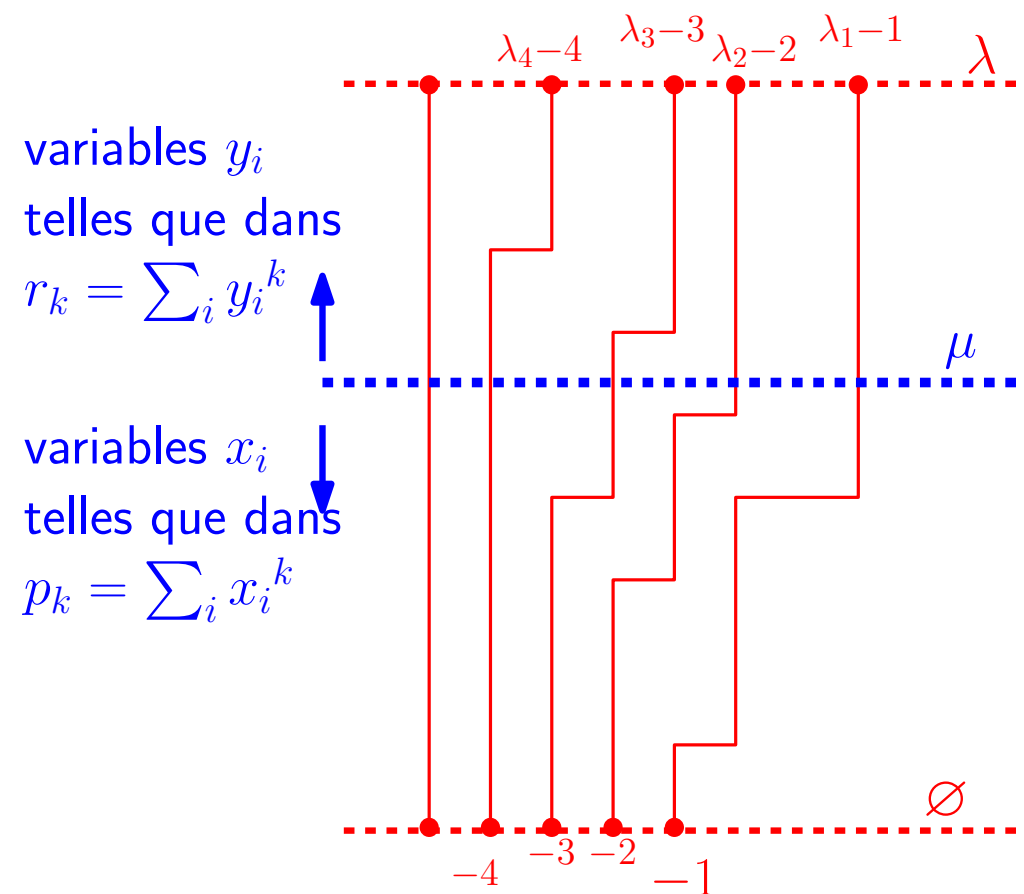
**Proposition B:** Si  $\tau(\mathbf{p})$  est une fonction  $\tau$  alors pour toute suite  $r_i$  la fonction  $\mathbf{p} \mapsto \tau(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ , est encore une fonction  $\tau$  !!!

**étape 1:** Comprendre comment se shiftent les fonctions de Schur. On a:

$$s_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} [H(\mathbf{r})]_\mu^\lambda s_\mu(\mathbf{p})$$

$$(p + r)_k = \sum_i x_i^k + \sum_j y_j^k$$

“ajouter les powersums” = “faire l’union des alphabets”



**étape 2: formule de Cauchy-Binet!**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices et  $I, J$  sous-ensembles de lignes/colonnes

$$[AB]_I^J := \det(AB)_{i \in I, j \in J} = \sum_K [A]_I^K [B]_K^J$$

On en déduit (à la régularisation des produits infinis près):

$$\tau(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} [A]_\emptyset^\lambda s_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \sum_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}} [A]_\emptyset^\lambda [H(\mathbf{r})]_\mu^\lambda s_\mu(\mathbf{p}) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} "[AH(\mathbf{r})^t]_\emptyset^\mu" s_\mu(\mathbf{p})$$

## Conclusion -I

**Théorème:** La série génératrice des cartes biparties

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_o, \lambda_\bullet \vdash n} B_{\lambda_o, \lambda_\bullet}(u) p_{\lambda_o} p_{\lambda_\bullet}$$

est une **fonction tau** de la hiérarchie KP. Concrètement cela signifie qu'elle satisfait plein d'EDP **vraiment non triviales** en les  $p_i$  (ici  $G = \ln F$ )

$$G_{2,2} - G_{3,1} + \frac{1}{12} G_{1^4} + \frac{1}{2} G_{1^2}^2 = 0 \quad (\text{KP})$$

...



## Conclusion - I

**Théorème:** La série génératrice des cartes biparties

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_o, \lambda_\bullet \vdash n} B_{\lambda_o, \lambda_\bullet}(u) p_{\lambda_o} p_{\lambda_\bullet}$$

est une **fonction tau** de la hiérarchie KP. Concrètement cela signifie qu'elle satisfait plein d'EDP **vraiment non triviales** en les  $p_i$  (ici  $G = \ln F$ )

$$G_{2,2} - G_{3,1} + \frac{1}{12} G_{1^4} + \frac{1}{2} G_{1^2}^2 = 0 \quad (\text{KP})$$

...

À vrai dire on n'a pas encore expliqué pourquoi  $F$  est une fonction tau

On voudrait  $F = \sum_{\rho \in \mathcal{P}} [A]_{\emptyset}^{\rho} s_{\rho}(p)$

et on a vu:  $F = \sum_{\rho \in \mathcal{P}} f_{\rho}(u) s_{\rho}(\mathbf{p}) s_{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{\rho \in \mathcal{P}} f_{\rho}(u) [H(\mathbf{q})]_{\emptyset}^{\rho} s_{\rho}(\mathbf{p})$

## Conclusion - I

**Théorème:** La série génératrice des cartes biparties

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet} \vdash n} B_{\lambda_{\circ}, \lambda_{\bullet}}(u) p_{\lambda_{\circ}} p_{\lambda_{\bullet}}$$

est une **fonction tau** de la hiérarchie KP. Concrètement cela signifie qu'elle satisfait plein d'EDP **vraiment non triviales** en les  $p_i$  (ici  $G = \ln F$ )

$$G_{2,2} - G_{3,1} + \frac{1}{12} G_{1^4} + \frac{1}{2} G_{1^2}^2 = 0 \quad (\text{KP})$$

...

À vrai dire on n'a pas encore expliqué pourquoi  $F$  est une fonction tau

On voudrait  $F = \sum_{\rho \in \mathcal{P}} [A]_{\emptyset}^{\rho} s_{\rho}(p)$

et on a vu:  $F = \sum_{\rho \in \mathcal{P}} f_{\rho}(u) s_{\rho}(\mathbf{p}) s_{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{\rho \in \mathcal{P}} f_{\rho}(u) [H(\mathbf{q})]_{\emptyset}^{\rho} s_{\rho}(\mathbf{p})$

Mais il se trouve que  $f_{\rho}(u)$  est une fonction très spéciale: une fonction multiplicative des contenus. On démontre en exercice (voir feuille d'exos!) que cela implique

$$f_{\rho}(u) [H]_{\emptyset}^{\rho} = [D^{-1} H D]_{\emptyset}^{\rho} \text{ où } D = D(u) \text{ est une matrice diagonale!}$$

## Conclusion -II

La théorie des représentations ramène en théorie l'énumération de cartes à des calculs avec les caractères. La théorie des fonctions symétriques ramène cela à des calculs avec des déterminants.

Il est très compliqué de calculer à partir de ça!

Mais le miracle des relations déterminantales permet de déduire tout un tas d'équations pour ces grosses sommes de déterminants, bien que chaque terme soit atrocement compliqué.

Dans le cas des cartes, les relations qu'on a vues sont extrêmement simples et très puissantes. Rien que la première équation de la hiérarchie implique (voir TD)

**Théorème (Goulden-Jackson '09):** Le nombre  $t_g(n)$  de triangulations à  $2n$  faces de genre  $g$  satisfait:

$$t_g(n) = \frac{1}{3n+2} f_g^n \text{ où } f_g^n = \frac{4(3n+2)}{n+1} \left( n(3n-2) f_{g-1}^{n-2} + \sum_{\substack{i+j=n-2 \\ h+k=g}} f_h^i f_k^j \right).$$

Dans le cas d'une seule face, c'est la relation montrée bijectivement hier en TD. Pour plus de faces, on ne sait pas!

Les choses démontrées avec KP restent très isolées par rapport aux approches plus combinatoires (bijectives, séries génératrices...) qui sont plus robustes.

# Références.

Pour la combinatoire des cartes en genre  $g > 0$ , lire des [introductions de thèses](#) sur le sujet.

Pour la combinatoire des cartes en genre  $g = 0$ , et quelques éléments en genre  $g > 0$ , le chapitre de Gilles dans [“Handbook of Combinatorial Enumeration”](#)

Pour les fonctions symétriques et le lien avec les représentations du groupe symétrique, les deux livres de références:

[Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials](#)

[Stanley, Combinatorial Enumeration, vol II, Chap 7](#)

Pour la théorie générale de la hiérarchie KP, le livre de référence (100 pages, self-contained) de l'école de Kyoto:

[Miwa, Jimbo, Date. Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras](#)

ou alors l'appendice très clair du papier suivant qui explique tout en 4 pages à partir de zéro:

[Okounkov. Infinite Wedge and Random Partitions](#)

Pour l'application aux cartes

[Goulden, Jackson. The KP hierarchy, branched covers, and triangulations](#)

[Carrell, G.C.. Simple recurrence formulas to count maps on orientable surfaces](#)

mais rien ne vaut ce limpide papier (10 pages) qui traite le cas des nombres de Hurwitz

[Okounkov. Toda equations for Hurwitz numbers](#)

*He never ever learned to read and write so well,  
But he could play the guitar just like a ringin' a bell*

*He never ever learned to read and write so well,  
But he could play the guitar just like a ringin' a bell*

Merci de votre attention!