Ensembles de Kakeya p-adiques

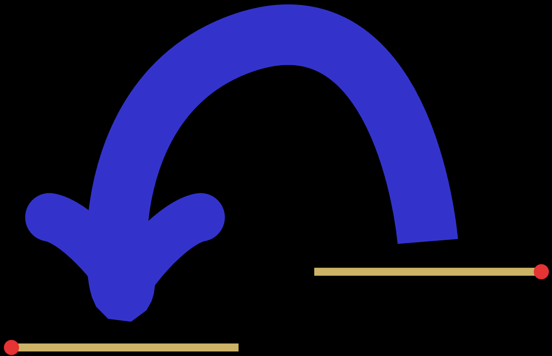
Xavier Caruso
Université Rennes 1
xavier.caruso@normalesup.org

Journées ALEA

23 mars 2017

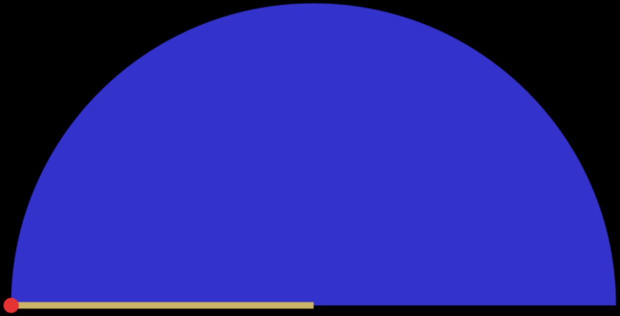
Ensembles de Kakeya réels

Qu'est-ce qu'un ensemble de Kakeya ?



Exemples d'ensembles de Kakeya ?

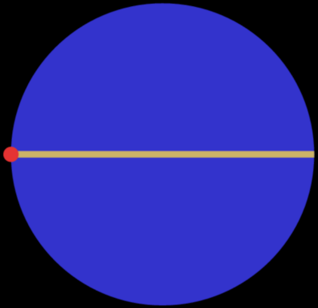
Le demi-cercle



$$\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}5708$$

Exemples d'ensembles de Kakeya ?

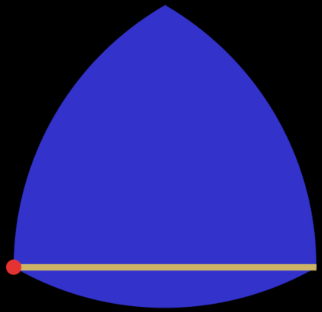
Le cercle



$$\frac{\pi}{4} \simeq 0{,}7854$$

Exemples d'ensembles de Kakeya ?

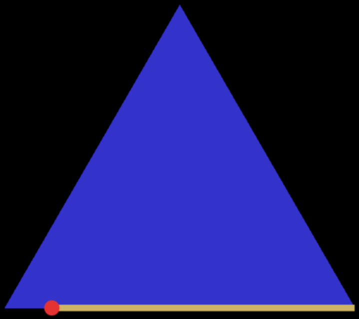
Le triangle de Reuleaux



$$\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}7048$$

Exemples d'ensembles de Kakeya ?

Le triangle équilatéral



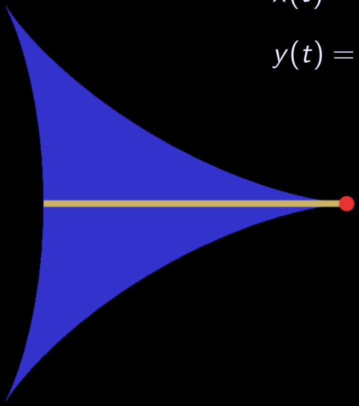
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}5774$$

Exemples d'ensembles de Kakeya ?

Le deltoïde

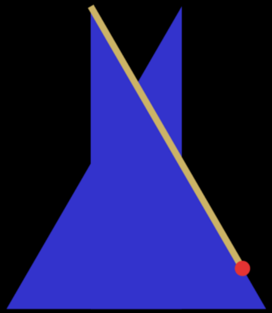
$$x(t) = \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\cos(2t)}{4}$$

$$y(t) = \frac{\sin(t)}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}$$

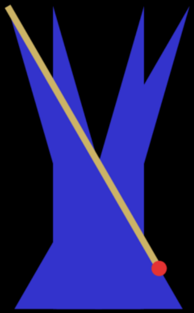


$$\frac{\pi}{8} \simeq 0{,}3927$$

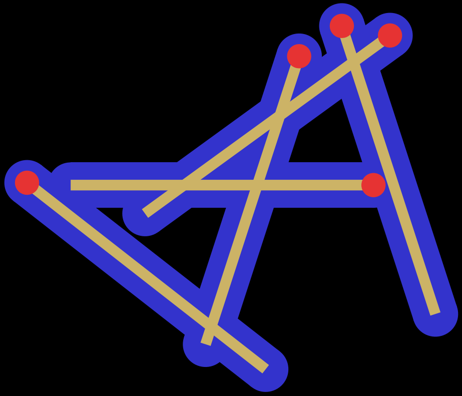
La construction de Besikovitch



La construction de Besikovitch



Dimension de Minkowski d'un ensemble de Besikovitch



$(1/n)$-voisinage

$$\mu(A_i) = \frac{2}{n} + \frac{\pi}{n^2}$$

$$\mu(A_i \cap A_j) \leq \frac{4}{n^2 \cdot \left|\sin \frac{(i-j)\pi}{n}\right|}$$

Cauchy–Schwarz :

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) \geq \frac{\sum \mu(A_i)}{\sum \mu(A_i \cap A_j)}$$

$$\sum_i \mu(A_i) = 2 + \frac{\pi}{n}$$

$$\sum_{i,j} \mu(A_i \cap A_j) \leq \frac{4}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} + O(1) = \frac{4}{\pi} \cdot \log n + O(1)$$

Ensembles de Kakeya p-adiques

Les nombres p-adiques

$$\dots a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \;\; , \;\; a_{-1} a_{-2} \dots a_{-v}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & ^{1} & ^{1} & ^{1} & ^{1} & & & & & \\
 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Les nombres p-adiques

$$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \;\; , \;\; a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-v}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & \cdots & 0 & {}^{1}0 & {}^{1}1 & {}^{1}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & {}^{1}0 \\
- & \cdots & {}^{1+}1 & {}^{1+}0 & {}^{1+}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & {}^{1+}0 & 1 \\
\hline
 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Les nombres p-adiques

$$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \quad , \quad a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-v}$$

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\times & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & \cdots & 0 & & & & & & & & & \\
\hline
 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Les nombres p-adiques

$$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \quad , \quad a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-v}$$

$$\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
\cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{9-16}
\cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
\cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
\cdots & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Valuation et norme

Valuation p-adique

$\mathrm{val}_p(x)$ est la position du dernier chiffre non nul de x

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{val}_2(\ldots 10110010) & = & 1 \\ \mathrm{val}_2(\ldots 10000010,001) & = & -3 \\ \mathrm{val}_2(\ldots 00000000) & \geq & 8 \end{array}$$

Valeur absolue p-adique

$|x|_p = p^{-\mathrm{val}_p(x)}$

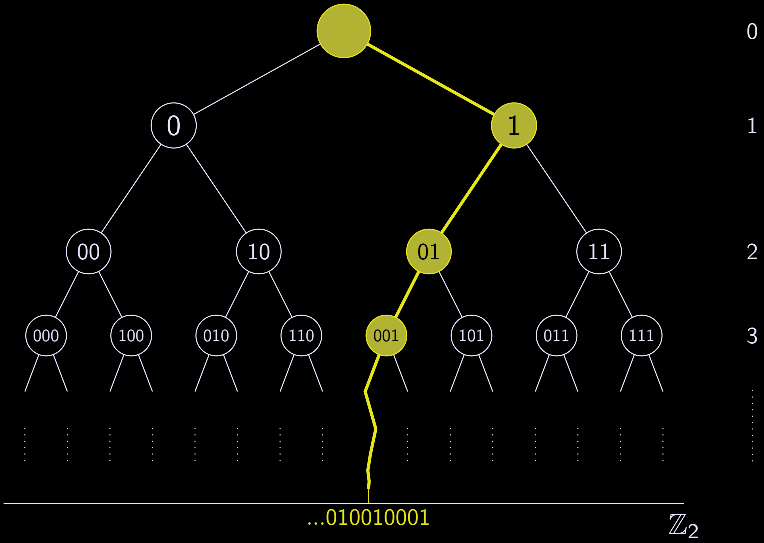
$|x+y|_p \leq \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$

Résultats et observations

$\mathbb{Q}_p$ est complet, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}_p$

$\mathbb{Z}_p = B_{\mathbb{Q}_p}(1)$

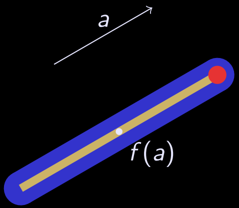
Représentation sous forme d'arbre



Ensembles de Kakeya p-adiques

$f : \mathbb{S}^{d-1}(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p^d$

t.q. $f(\lambda a) = f(a)$ si $|\lambda| = 1$



$S_a(f) = \{\, at + f(a) \text{ avec } |t| \leq 1 \,\}$

$K(f) = \bigcup_a S_a(f)$

$K_n(f) = (1/p^n)$-voisinage de $K(f)$

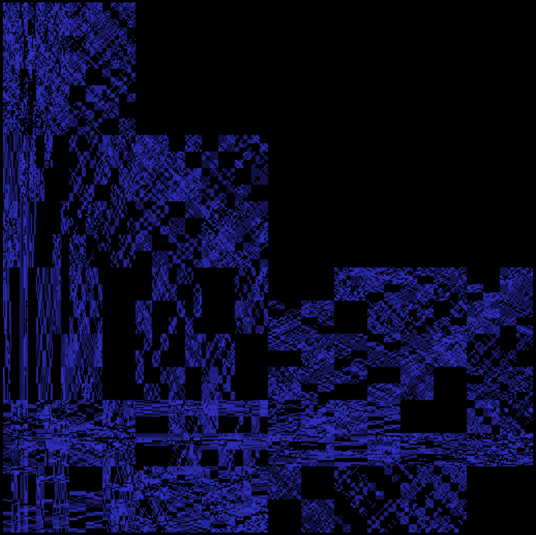
Ensemble de Besikovitch p-adique

Un ensemble de la forme $K(f)$

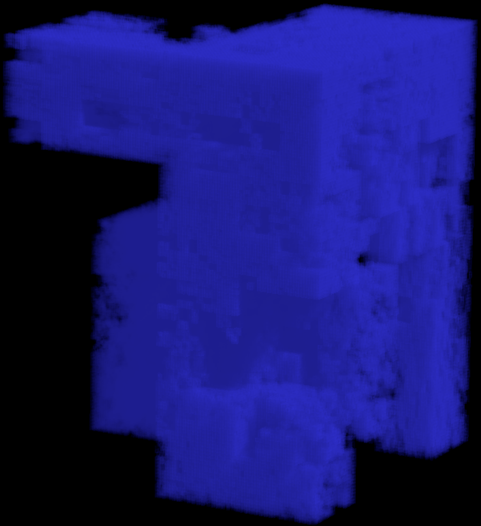
Ensemble de Kakeya p-adique

Un ensemble de la forme $K(f)$ avec f continue

Un ensemble de Kakeya 2-adique en dimension 2



Un ensemble de Kakeya 2-adique en dimension 3



Résultats

Théorème 1

Pour toute fonction bornée $f : \mathbb{S}^1(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p^2$:

$$\mu(K_n(f)) \geq \frac{1}{\frac{p-1}{p+1}n + 1} \sim \frac{p+1}{p-1} \cdot \frac{1}{n}$$

Théorème 2

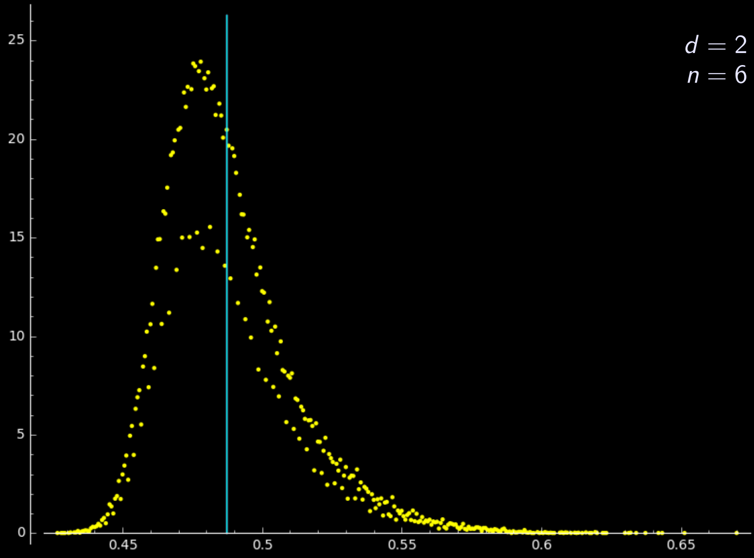
$K(f)$ est de mesure nulle
pour presque toute fonction 1-lipschitzienne $f : \mathbb{S}^{d-1}(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Z}_p^d$

Plus précisément :

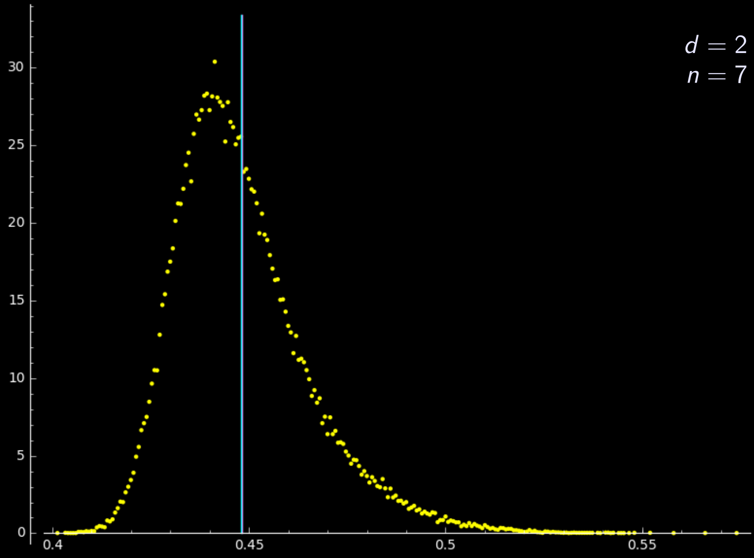
$$\mathbb{E}\big[\mu(K_n(f))\big] \sim \frac{2 \cdot (p^d - 1)}{(p-1)(p^{d-1}-1)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{p+1}{p-1} \cdot \frac{2}{n} \quad \text{si } d{=}2$$

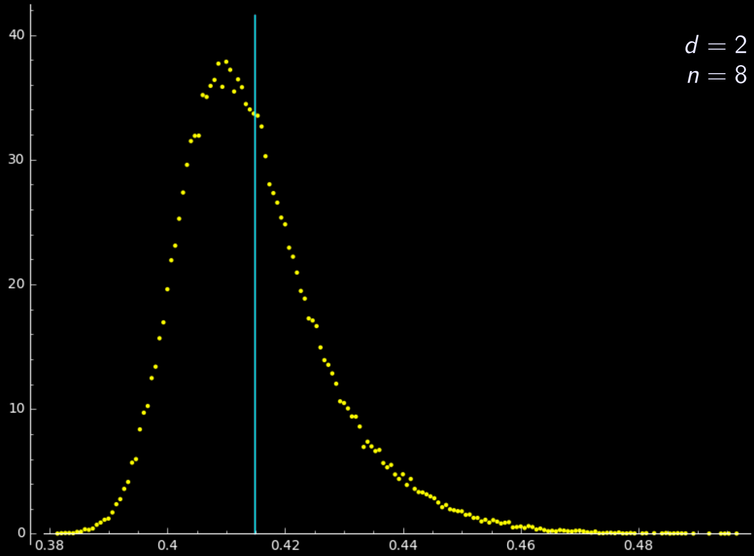
Simulations numériques



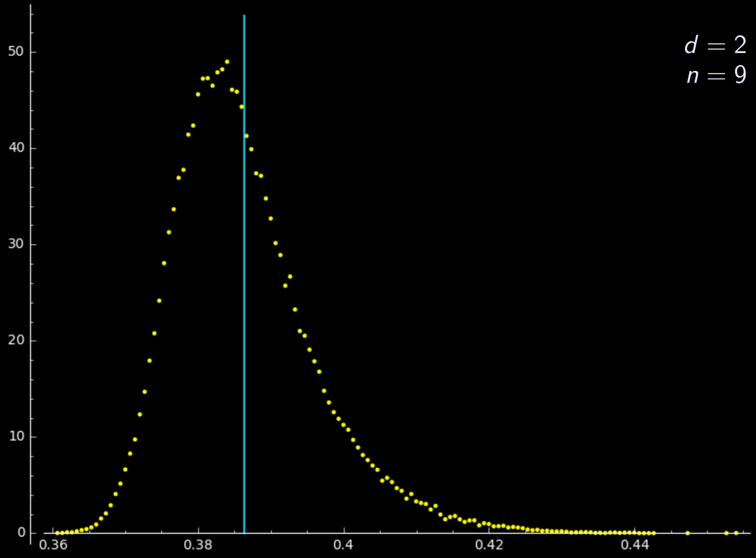
Simulations numériques



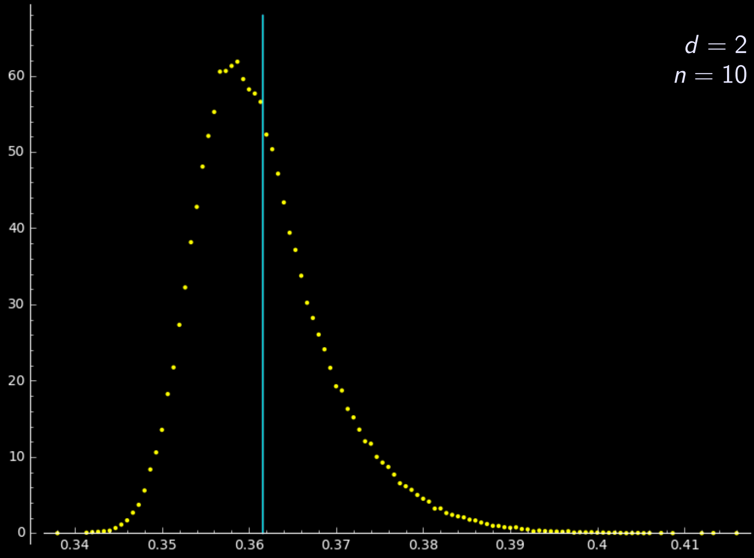
Simulations numériques



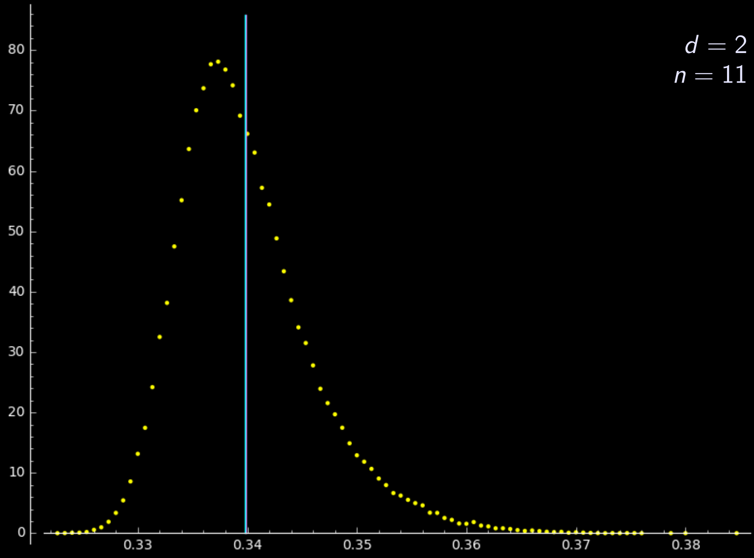
Simulations numériques



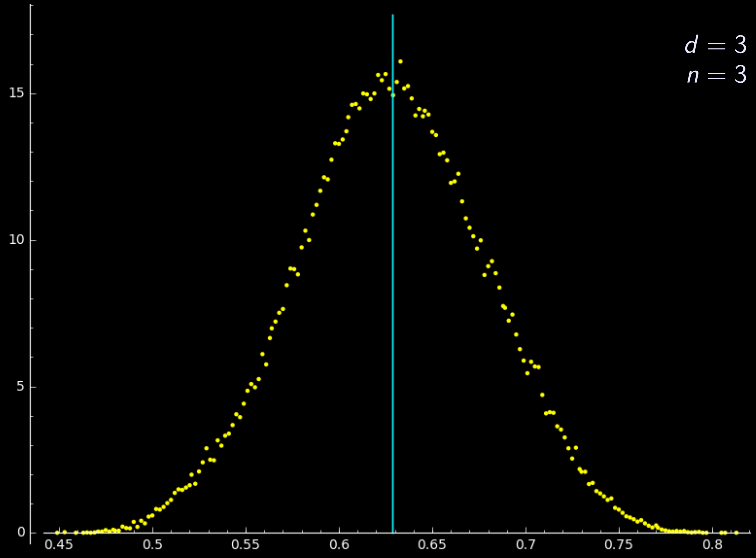
Simulations numériques



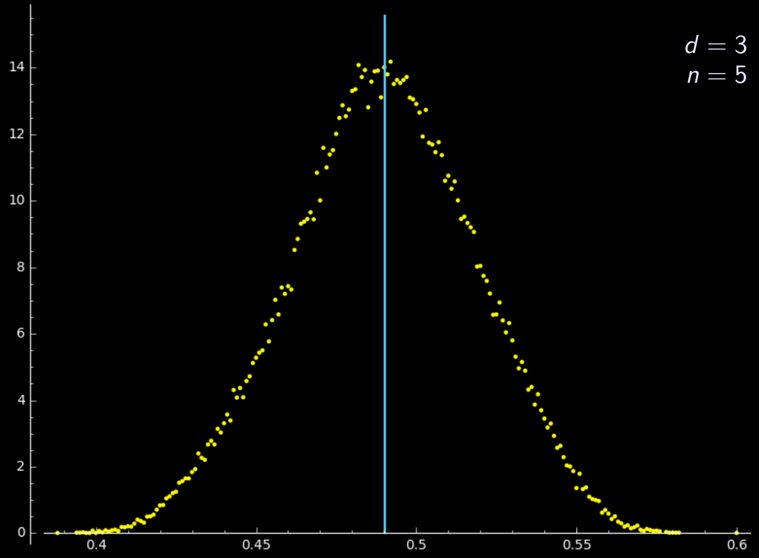
Simulations numériques



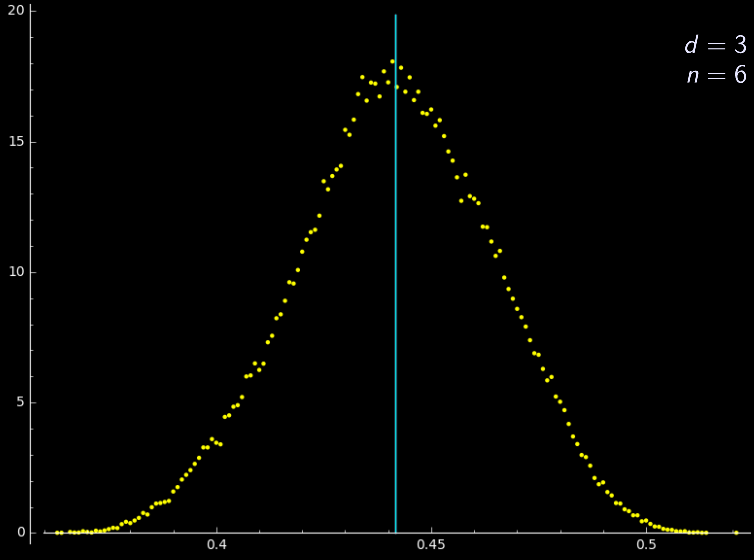
Simulations numériques



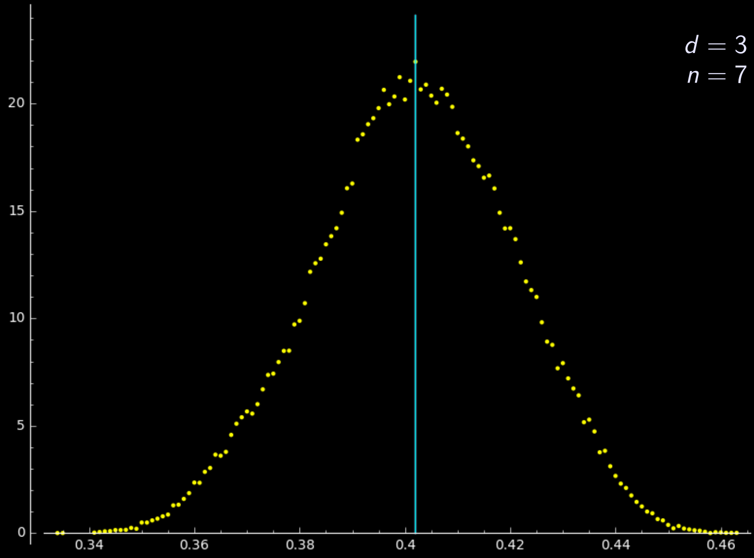
Simulations numériques



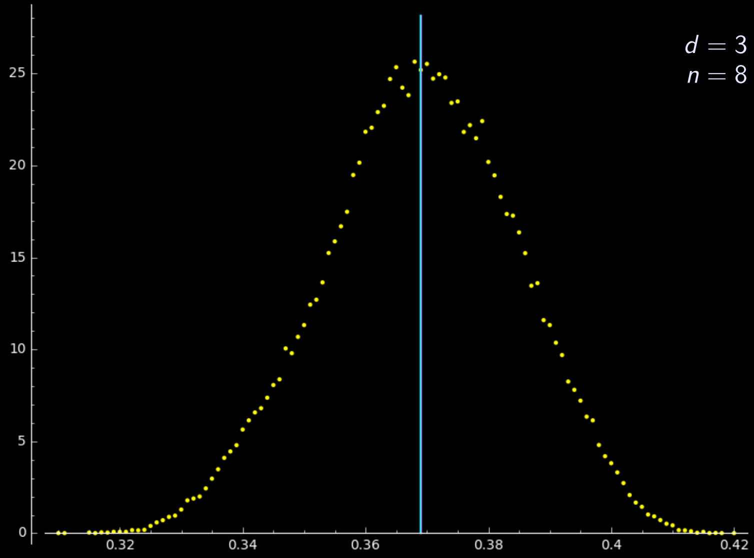
Simulations numériques



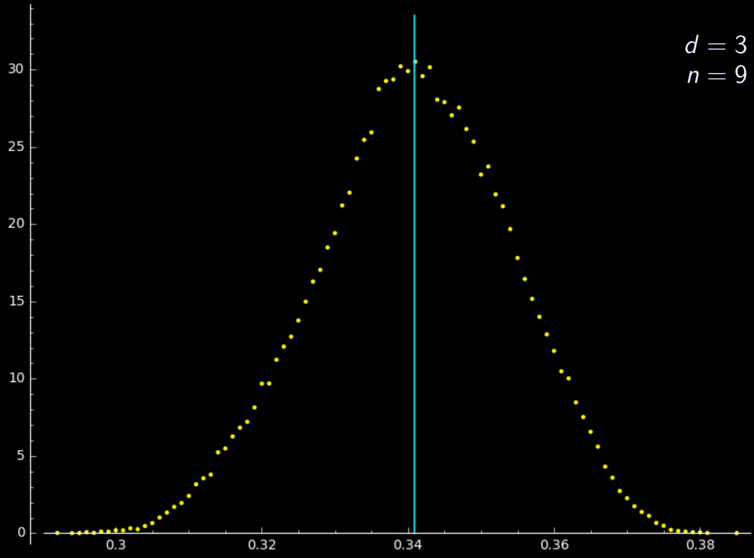
Simulations numériques



Simulations numériques



Simulations numériques



MERCI

DE VOTRE ATTENTION