Mathématiques « anciennes » pour l'Imagerie Numérique

Jean Sequeira

Le 4 mai 2016

Centre International de Rencontres Mathématiques - Luminy

Imagerie Numérique

L’image :

Principal moyen de communication entre « l’être humain » et « son environnement »

L’image « classique » :

- Acquisition par la rétine (capteurs : perception « bas niveau »)
- Interprétation par le cerveau (« modélisation » : perception « haut niveau »)
- Expression par un support matériel (parois de grottes, papier, … et même sculptures)

L’image « numérique » :

- Support électronique (écran, capteurs, mémoire d’ordinateur, …)
- Traitement par un ordinateur (analyse, modélisation, interprétation, synthèse)

En quoi les images numériques nous intéressent-elles ?

- Pour analyser les données acquises

  → **analyse d'images**

  Traitement du signal, Segmentation, Reconnaissance des Formes, …

- Pour représenter l'information extraite

  → **modélisation (géométrique)**

  Géométrie (algorithmique, discrète, …), maillages, ...

- Pour communiquer cette information

  → **synthèse d'images**

  Complexité algorithmique, rendu physiquement réaliste, ergonomie, …

Les mathématiques en Imagerie Numérique

- Géométrie différentielle (courbes et surfaces, …)
- Approximation et interpolation (courbes et surfaces, …)
- Géométrie discrète (images, volumes numériques, courbures discrètes)
- Géométrie algorithmique (structuration de nuages de points)
- Rapports entre topologie et géométrie (morphologie mathématique)
- Analyse numérique (éléments finis, optimisation, contours actifs, géodésiques)
- Classification et Analyse de Données (ACP, ACI, …)
- Probabilités et statistiques (texture, Markov, estimateurs robustes, …)
- Traitement du signal (analyse spectrale, ondelettes, prédiction linéaire)
- Théorie de l'information (entropie, compression d'images, codage, ...)
- Cryptographie (tatouage d'images)
- Géométrie fractale (analyse d'images, synthèse d'images, ...)
- ...

Des idées, des concepts, des théories qui « reviennent »

Réutilisation, réinvention

- Bernstein (environ 1912) → Bézier (1964)
- Classification (Lulle 1299 → Condorcet 1785 → réutilisation à la fin des années 70)
- Propriétés des coniques (depuis Menechme ... → caractérisation d'ellipses)
- …
- (Topologie Algébrique) → Morphologie mathématique – Géométrie algorithmique
- …

Des concepts qui prennent une place importante :

- Espaces Projectifs
- Quaternions
- …

Espaces projectifs (historique)

Historique

- Prémices dans l'antiquité (Apollonius de Perga … Pappus d'Alexandrie ...)
- Un temps fort au XVII^{ième} siècle : Mise en place par Desargues, puis Pascal
- Un rebond au début du XIX^{ième} siècle : re-fondation par (Monge et) Poncelet
- Un domaine étudié à fond jusqu'à la fin du XIX^{ième} siècle :
  - Möbius (et Plücker) : coordonnées homogènes
  - Klein (Programme d'Erlangen - 1872) : liens entre les « géométries » (affine, projective, euclidienne, non euclidienne)

- Enseignement en math sup jusqu'à l'année 71-72

- <u>Retour en force</u> : ils sont devenus incontournables dès la fin des années 70 aussi bien en informatique graphique (synthèse d'images), qu'en modélisation géométrique (NURBS) et en analyse d'images (birapport) ... et finalement au niveau des standards (OpenGL, par exemple)

Espaces projectifs (en quelques mots)

Espace Affine A de dimension n (associé à un Espace Vectoriel V, de dimension n)

A → Espace Vectoriel H de dimension n+1 (Espace Homogène)

n = 2 : Point $m(x,y)$ → Vecteur $M(\lambda.x,\lambda.y,\lambda)$

Vecteur $M(X,Y,T)$: si $T \neq 0$ alors → $m(X/T,Y/T)$

R : Relation d'Equivalence « appartenir à la même droite vectorielle de H »

P = H/R (Espace Projectif) : ensemble des droites vectorielles de H

A ≡ {droites vectorielles de H $\not\subset$ le plan {T=0}}

Soit $\Delta \subset \{T=0\}$ (dans H) ; soit m un point d'une droite de A de même direction que Δ et soit D la droite de H associée à m ; alors, Δ est la limite de D lorsque m tend vers l'infini → Δ (en tant qu'élément de P) est un « point à l'infini »

Quatre bonnes raisons d'aimer les espaces projectifs

Existence des points « à l'infini » dans P (représentés dans H)

→ Traitement « unifié » de situations similaires

Bijection entre les homographies de A et les applications linéaires de H

→ Mise en œuvre matricielle dans H des homographies de A

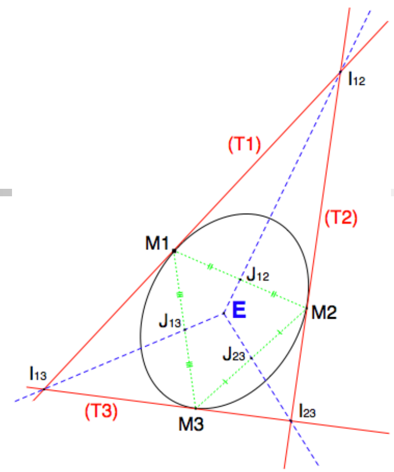
Unicité d'expression de certaines familles de courbes et de surfaces

→ NURBS (Non Uniform Rational B-Splines)

Conservation du birapport

→ Reconnaissance de configurations (analyse d'images)

1. Existence de points à l'infini



On traite de manière unique les cas similaires :

→ par exemple, ici, (T1) et (T2) peuvent être sécantes ou parallèles

Les termes des équations polynomiales sont tous de même degré (homogènes)

→ Points à l'infini, expression de produits scalaires, …

On traite de la même manière les points de A et les vecteurs de V

m(x,y) → M(x,y,1) u(a,b) → U(a,b,0)

On n'a plus de problème de cas limite ni de précision ni de division par 0

→ Test sur la composante homogène T (si |T| < ε alors …)

"La plus belle géométrie est la géométrie projective sur le corps des complexes"

(© d'un mathématicien ... dont j'ai oublié le nom

2. Homographies de A – Applications linéaires de H

Toutes les transformations projectives (homographies) de A ont leur pendant sous la forme d'une application linéaire dans H (et réciproquement)

Matrice (dans H) :

- de rotation, de symétrie, d'affinité, d'homothétie
- mais aussi de translation, de perspective, ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+v_1 \\ y+v_2 \\ z+v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traitement uniforme de toutes les transformations

Produit des matrices correspondantes (et empilement éventuel)

Pas de risque de « division par 0 » (on obtient un résultat et on teste T)

→ m(x,y) → M(x,y,1) → M'(X',Y',T') → (test sur T') m'(X'/T',Y'/T') ou u'(X',Y')

… de base dans les standards (bibliothèque OpenGL par exemple)

3. Unicité d'expression de courbes et de surfaces

Courbes et surfaces « de forme libre » en représentation paramétrique :

→ Courbes de Bézier, Splines, B-Splines, …

(expression polynomiale ou polynomiale par morceaux)

Coniques ... ne peuvent s'exprimer sous forme polynomiale

NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) : Fractions rationnelles

Dans A : $m(t)\ (n_x(t)/d_x(t)\ ,\ n_y(t)/d_y(t))$

→ (dénominateur commun) : $m(t)\ (x(t)/d(t)\ ,\ y(t)/d(t))$

Dans H : $M(t)\ (x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ d(t))$

Par exemple, $\sin(\theta) = 2t/(1+t^2)$ et $\cos(\theta) = (1-t^2)/(1+t^2)$ → expression des coniques sous formes de fractions rationnelles

Les NURBS permettent d'exprimer aussi bien les courbes de forme libre que les coniques → unicité d'expression, de code, …

4. Conservation du birapport

Notion de birapport (ou rapport anharmonique) … évoquée déjà par Pappus d'Alexandrie !

4 points alignés (mais aussi 4 droites, ...) A,B,C et D :

→ r(A,B,C,D) = (AC/AD) / (BC/BD)

Par exemple, pour quatre points équidistants : r(A,B,C,D) = (2/3) / (1/2) = 4/3

r(A,B,C,D) est conservé par transformation homographique

Reconnaissance de l'arrangement des lignes

Matrice 3x3 dans l'espace homogène

Les quaternions (historique)

Historique

- Les nombres complexes :
  - Au XVI$^{\text{ième}}$ siècle : Cardan, Bombelli, Tartaglia et Ferrari
  - Au XIX$^{\text{ième}}$ siècle : Argand, Gauss et Cauchy

- Depuis le XVI$^{\text{ième}}$ siècle : recherche d'une généralisation des nombres complexes en dimension 3 … sans succès ! *Ultérieurement (en 1877), Frobenius démontrera que les seules algèbres associatives à division de dimension finie sur R sont R, C et H (quaternions) – (et les octonions en enlevant certaines contraintes)*

- En 1843, Rowan William Hamilton "découvre" les quaternions (même si l'idée était « présente » - Euler, Gauss) et inscrit sur Brougham bridge :

$$i^2 = j^2 = k^2 = i.j.k = -1$$

Les quaternions (en quelques mots)

H contient R et C

Algèbre à division : tout quaternion non nul admet un inverse

La multiplication des quaternions n'est pas commutative

$q = (a,b,c,d) = a + b.i + c.j + d.k$ Re(q) = a Im(q) = b.i + c.j + d.k

« 1 » et « i , j , k » jouent des rôles différents (« i , j , k » est la partie complexe)

La règle $i^2 = j^2 = k^2 = i.j.k = -1$ induit le mode de multiplication des quaternions

(i.j = k , j.k = i , k.i = j , j.i = -k , k.j = -i , i.k = -j)

H est isomorphe à R^4

Quarternion conjugué : $q' = Re(q) – Im(q) = a – (b.i + c.j + d.k)$

Norme d'un quaternion : $q.q' = q'.q = ||q||^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Inverse d'un quaternion : $q^{-1} = (1/ ||q||^2).q'$

<u>Attention</u> : multiplication non commutative … et donc pas d'expression de type q_1/q_2

Les quaternions (en quelques mots de plus !)

Produit scalaire et produit vectoriel

Soit Im(H) l'ensemble des imaginaires purs (Im(H) est isomorphe à R^3)

Abus (liberté) d'écriture : $q = a + v$ avec $v(b,c,d)$ vecteur de R^3

$q_1.q_2 = (a_1 + v_1).(a_2 + v_2) = a + v$

avec : $a = a_1.a_2 - v_1.v_2$ et $v = a_1.v_2 + a_2.v_1 + v_1 \wedge v_2$

En particulier, si q_1 et q_2 sont des imaginaires purs :

$q_1 = (0,v_1)$ et $q_2 = (0,v_2)$ alors $q_1.q_2 = (-v_1.v_2 \, , \, v_1 \wedge v_2)$

Les quaternions (encore quelques mots de plus !!!)

Quaternions unitaires et rotations dans R3

$q = \rho.u$ avec $\rho = ||q||$ et u quaternion unitaire :

$u = e^{\theta.s} = \cos(\theta) + \sin(\theta).s$

où s est un quaternion unitaire imaginaire pur (s décrit la sphère unitaire de R^3)

$q_{res} = u.q.u^{-1}$ produit une rotation de q de $2.\theta$ autour de s

q : vecteur (quaternion imaginaire pur) ou rotation (quaternion unitaire)

Passage simple d'un quaternion unitaire à une matrice de rotation (et inversement)

Gestion plus simple avec les quaternions (vs. matrices ou angles d'Euler) :

- Trajectoires de « caméras virtuelles » (géodésiques, parcours « naturels »)
- Blocage de cardan (gimbal lock)

En conclusion

Espaces projectifs et quaternions

Deux « théories » riches, intéressantes, … mais dont on a « fait le tour » à la fin du XIX$^{\text{ième}}$ siècle … et qui retrouvent un intérêt fort (en devenant « incontournables ») avec l'imagerie numérique.

Je vous remercie pour votre attention

Thank you for your attention

Muchas gracias por su atención