Quelques questions à propos des palindromes

Patrice Séébold

Université Paul Valéry - Montpellier 3

6 mai 2016

Conférence Algorithmique et Programmation - CIRM

1. Définitions de base
2. Palindromes et mots de Fibonacci
3. Longueur palindromique
4. Une conjecture
5. Quelques résultats
6. Une suite des plus petits facteurs du mot de Fibonacci à longueur palindromique strictement croissante
7. Un autre problème (assez) ancien

Alphabet $\mathcal{A}$: ensemble d'éléments indécomposables (*lettres*).
Ex : $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, 134, 135\}$

Alphabet $\mathcal{A}$: ensemble d'éléments indécomposables (*lettres*).
Ex : $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, 134, 135\}$

Mot $=$ suite, finie ou infinie, de lettres.
Ex : *abbabaab* et a^ω sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Alphabet $\mathcal{A}$: ensemble d'éléments indécomposables (*lettres*).
Ex : $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, 134, 135\}$

Mot $=$ suite, finie ou infinie, de lettres.
Ex : *abbabaab* et a^ω sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Opération interne : concaténation (non commutative)
Si u et v sont deux mots (u fini) sur $\mathcal{A}$ alors uv est un mot sur $\mathcal{A}$.
Ex : la concaténation des mots *ab* et *ba* donne le mot *abba*

Alphabet $\mathcal{A}$: ensemble d'éléments indécomposables (*lettres*).
Ex : $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, 134, 135\}$

Mot = suite, finie ou infinie, de lettres.
Ex : *abbabaab* et a^ω sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Opération interne : concaténation (non commutative)
Si u et v sont deux mots (u fini) sur $\mathcal{A}$ alors uv est un mot sur $\mathcal{A}$.
Ex : la concaténation des mots *ab* et *ba* donne le mot *abba*

Élément neutre : le mot vide ε
Ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$: monoïde $\mathcal{A}^*$
Ensemble des mots infinis : $\mathcal{A}^\omega$

Alphabet $\mathcal{A}$: ensemble d'éléments indécomposables (*lettres*).
Ex : $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, 134, 135\}$

Mot $=$ suite, finie ou infinie, de lettres.
Ex : *abbabaab* et a^ω sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Opération interne : concaténation (non commutative)
Si u et v sont deux mots (u fini) sur $\mathcal{A}$ alors uv est un mot sur $\mathcal{A}$.
Ex : la concaténation des mots *ab* et *ba* donne le mot *abba*

Élément neutre : le mot vide ε
Ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$: monoïde $\mathcal{A}^*$
Ensemble des mots infinis : $\mathcal{A}^\omega$

u est un *facteur* de v s'il existe deux mots x et y tels que $v = xuy$.

Alphabet $\mathcal{A}$: ensemble d'éléments indécomposables (*lettres*).
Ex : $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, 134, 135\}$

Mot = suite, finie ou infinie, de lettres.
Ex : *abbabaab* et a^ω sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Opération interne : concaténation (non commutative)
Si u et v sont deux mots (u fini) sur $\mathcal{A}$ alors uv est un mot sur $\mathcal{A}$.
Ex : la concaténation des mots *ab* et *ba* donne le mot *abba*

Élément neutre : le mot vide ε
Ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$: monoïde $\mathcal{A}^*$
Ensemble des mots infinis : $\mathcal{A}^\omega$

u est un *facteur* de v s'il existe deux mots x et y tels que $v = xuy$.

$|u|$ = longueur du mot u = nombre de lettres de u : $|abbab| = 5$.

Définition

L'*image-miroir* d'un mot $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, $u_i \in \mathcal{A}$,
est le mot $\tilde{u} = u_n \cdots u_2 u_1$.

Exemple

L'image-miroir de CASSER est RESSAC
celle de 01001010 est 01010010.

Définition

L'*image-miroir* d'un mot $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, $u_i \in \mathcal{A}$, est le mot $\tilde{u} = u_n \cdots u_2 u_1$.

Exemple

L'image-miroir de CASSER est RESSAC
celle de 01001010 est 01010010.

Définition

Un mot est un *palindrome* s'il est égal à son image-miroir.

Exemple

KAYAK, 011010010110 sont des palindromes.

Définition

L'*image-miroir* d'un mot $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, $u_i \in \mathcal{A}$,
est le mot $\tilde{u} = u_n \cdots u_2 u_1$.

Exemple

L'image-miroir de CASSER est RESSAC
celle de 01001010 est 01010010.

Définition

Un mot est un *palindrome* s'il est égal à son image-miroir.

Exemple

KAYAK, 011010010110 sont des palindromes.

Dans ce contexte, *rions noir* n'est pas un palindrome

$\widetilde{\text{rions noir}} = \text{rion snoir}$

Suites de Fibonacci

numérique	mots ($\mathcal{A} = \{a, b\}$)
$f_0 = 1$	$F_0 = a$
$f_1 = 2$	$F_1 = ab$
$f_2 = 3$	$F_2 = aba$
$f_3 = 5$	$F_3 = abaab$
$f_4 = 8$	$F_4 = abaababa$
$f_5 = 13$	$F_5 = abaababaabaab$
$\vdots$	
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$	$F_n = F_{n-1}F_{n-2}$

Suites de Fibonacci

numérique	mots ($\mathcal{A} = \{a, b\}$)
$f_0 = 1$	$F_0 = a$
$f_1 = 2$	$F_1 = ab$
$f_2 = 3$	$F_2 = aba$
$f_3 = 5$	$F_3 = abaab$
$f_4 = 8$	$F_4 = abaababa$
$f_5 = 13$	$F_5 = abaababaabaab$
$\vdots$	
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$	$F_n = F_{n-1}F_{n-2}$

Pour tout $n \geq 0$, $|F_n| = f_n$.

Suites de Fibonacci

numérique	mots ($\mathcal{A} = \{a, b\}$)
$f_0 = 1$	$F_0 = a$
$f_1 = 2$	$F_1 = ab$
$f_2 = 3$	$F_2 = aba$
$f_3 = 5$	$F_3 = abaab$
$f_4 = 8$	$F_4 = abaababa$
$f_5 = 13$	$F_5 = abaababaabaab$
$\vdots$	$\vdots$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$	$F_n = F_{n-1}F_{n-2}$

Pour tout $n \geq 0$, $|F_n| = f_n$.

$F_n, n \geq 0$, est la suite des mots $\varphi^n(a)$ avec φ morphisme de Fibonacci ($\varphi(a) = ab, \varphi(b) = a$) : $\forall n \geq 1,\ F_n = \varphi(F_{n-1})$.

On note $\mathbf{F}$ le mot infini de Fibonacci : $\mathbf{F} = \lim_{n\to\infty} F_n = \varphi^\omega(a)$.

Propriétés des F_n

- u est un facteur de $\mathbf{F}$ si et seulement si $\tilde{u}$ est un facteur de $\mathbf{F}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \begin{cases} p\,ab & \text{si } n \text{ est impair} \\ p\,ba & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$ avec $p = \tilde{p}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = qr$ avec $q = \tilde{q}$ et $r = \tilde{r}$ (factorisation unique).

J. Berstel,
Fibonacci words, a survey,
in *The Book of L*, Springer-Verlag 1986, 13-27.

A. de Luca,
A combinatorial property of the Fibonacci words
Inform. Process. Letters, 12 (1981), 193-195.

Propriétés des F_n

- u est un facteur de $\mathbf{F}$ si et seulement si $\tilde{u}$ est un facteur de $\mathbf{F}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \begin{cases} p\,ab & \text{si } n \text{ est impair} \\ p\,ba & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$ avec $p = \tilde{p}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = qr$ avec $q = \tilde{q}$ et $r = \tilde{r}$ (factorisation unique).

J. Berstel,
Fibonacci words, a survey,
in *The Book of L*, Springer-Verlag 1986, 13-27.

A. de Luca,
A combinatorial property of the Fibonacci words
Inform. Process. Letters, 12 (1981), 193-195.

$$\begin{aligned} \text{Ex : } F_6 &= abaababaabaababaababa \\ &= abaababaabaababaaba\ ba \\ &= abaababaaba\ ababaababa \end{aligned}$$

Propriétés de **F**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, **F** contient exactement :

- un palindrome de longueur $2n$ et
- deux palindromes de longueur $2n + 1$.

X. Droubay,
Palindromes in the Fibonacci Word
Inform. Process. Letters, 55 (1995), 217-221.

Propriétés de **F**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, **F** contient exactement :

- un palindrome de longueur $2n$ et
- deux palindromes de longueur $2n+1$.

X. Droubay,
Palindromes in the Fibonacci Word
Inform. Process. Letters, 55 (1995), 217-221.

NB : pour tout $n \in \mathbb{N}$, **F** contient exactement $n+1$ facteurs différents de longueur n.

$n = 0$: $|\varepsilon| = 0$, $|a| = |b| = 1$
Il n'y a pas d'autre facteur de longueur 0 et 1.

Propriétés de **F**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, **F** contient exactement :

- un palindrome de longueur $2n$ et
- deux palindromes de longueur $2n + 1$.

X. Droubay,
Palindromes in the Fibonacci Word
Inform. Process. Letters, 55 (1995), 217-221.

NB : pour tout $n \in \mathbb{N}$, **F** contient exactement $n + 1$ facteurs différents de longueur n.

$n = 0$: $|\varepsilon| = 0$, $|a| = |b| = 1$
Il n'y a pas d'autre facteur de longueur 0 et 1.

$n = 1$: $|aa| = 2$, $|aba| = |bab| = 3$
Les autres facteurs de longueur 2 sont ab, ba et de longueur 3, aab, baa.

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & b & a & a & b & a & b & a & a & b & a & a & \dots \\ \mathbf{1} & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\ldots$
1	**2**											

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de $\mathbf{F}$

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\ldots$
1	**2**	1										

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\ldots$
1	**2**	1	2									

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & b & a & a & b & a & b & a & a & b & a & a & \ldots \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{array}$$

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\ldots$
1	**2**	1	2	2	1							

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	...
1	**2**	1	2	2	1	2						

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de $\mathbf{F}$

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\ldots$
1	**2**	1	2	2	1	2	2					

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\ldots$
1	**2**	1	2	2	1	2	2	**3**				

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de $\mathbf{F}$

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	$\dots$
1	**2**	1	2	2	1	2	2	**3**	2			

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	...
1	**2**	1	2	2	1	2	2	**3**	2	1		

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	...
1	**2**	1	2	2	1	2	2	**3**	2	1	2	

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1\pi_2\cdots\pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	...
1	**2**	1	2	2	1	2	2	**3**	2	1	2	...

Définition

La longueur palindromique $|w|_{pal}$ d'un mot fini w est le plus petit entier k tel que

$$w = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k$$

où chaque π_i est un palindrome.

Longueurs palindromiques des premiers préfixes de **F**

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & b & a & a & b & a & b & a & a & b & a & a & \dots \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

$$abaababaa = abaaba\ b\ aa = aba\ ababa\ a = a\ b\ aababaa$$

Définition

Un mot infini $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ est *ultimement périodique* s'il existe $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $\mathbf{w} = u\, v^\omega = uv \cdots v \cdots$.

Définition

Un mot infini $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ est *ultimement périodique* s'il existe $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $\mathbf{w} = u\,v^\omega = uv \cdots v \cdots$.

Conjecture

Si un mot infini $\mathbf{w}$ n'est pas ultimement périodique alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande ($\forall k \in \mathbb{N}, \exists u$ facteur de $\mathbf{w} / |u|_{pal} > k$).

A.E. Frid, S. Puzynina, L.Q. Zamboni,
On palindromic factorization of words
Adv. Appl. Math., 50 (2013), 737-748.

Définition

Un mot infini $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ est *ultimement périodique* s'il existe $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $\mathbf{w} = u\, v^\omega = uv \cdots v \cdots$.

Conjecture

Si un mot infini $\mathbf{w}$ n'est pas ultimement périodique alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande ($\forall k \in \mathbb{N}, \exists u$ facteur de $\mathbf{w} / |u|_{pal} > k$).

A.E. Frid, S. Puzynina, L.Q. Zamboni,
On palindromic factorization of words
Adv. Appl. Math., 50 (2013), 737-748.

Conjecture

S'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que la longueur palindromique de tous les facteurs d'un mot infini $\mathbf{w}$ est inférieure à n alors $\mathbf{w}$ est ultimement périodique.

Définition

Un mot infini $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ est *ultimement périodique* s'il existe $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $\mathbf{w} = u\,v^\omega = uv \cdots v \cdots$.

Conjecture

Si un mot infini $\mathbf{w}$ n'est pas ultimement périodique alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande ($\forall k \in \mathbb{N}, \exists u$ facteur de $\mathbf{w} / |u|_{pal} > k$).

A.E. Frid, S. Puzynina, L.Q. Zamboni,
On palindromic factorization of words
Adv. Appl. Math., 50 (2013), 737-748.

Exemple

Tous les facteurs du mot $(ab)^\omega$ sont de longueur palindromique 1 ou 2 (4 sortes de facteurs : $(ab)^n$, $(ba)^n$, $(ab)^n a$ et $b(ab)^n$, $n \in \mathbb{N}$).

Définition

Un mot infini $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\omega$ est *ultimement périodique* s'il existe $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $\mathbf{w} = u\, v^\omega = uv \cdots v \cdots$.

Conjecture

Si un mot infini $\mathbf{w}$ n'est pas ultimement périodique alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande ($\forall k \in \mathbb{N}, \exists u$ facteur de $\mathbf{w} / |u|_{pal} > k$).

A.E. Frid, S. Puzynina, L.Q. Zamboni,
On palindromic factorization of words
Adv. Appl. Math., 50 (2013), 737-748.

L'inverse est faux : $\forall u$ facteur de $(abc)^\omega$, $|u|_{pal} = |u|$

$\forall u$ facteur de $(110100)^\omega$, $|u|_{pal} \geq \frac{|u|}{4}$.

Définition

Un mot infini est *sans puissance k* pour un entier k s'il ne contient aucun facteur de la forme $u^k = \underbrace{u \cdots u}_{k \text{ fois}}$.

Un mot sans puissance k est non ultimement périodique.

Définition

Un mot infini est *sans puissance k* pour un entier k s'il ne contient aucun facteur de la forme $u^k = \underbrace{u \cdots u}_{k \text{ fois}}$.

Un mot sans puissance k est non ultimement périodique.

Frid, Puzynina, Zamboni 2013

Pour tout entier k, si un mot infini est sans puissance k alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Conjecture

Si un mot infini n'est pas ultimement périodique alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Un mot sans puissance k est non ultimement périodique.

Frid, Puzynina, Zamboni 2013

Pour tout entier k, si un mot infini est sans puissance k alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Conjecture

Si un mot infini n'est pas ultimement périodique alors il contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Tous les mots non ultimement périodiques ne sont pas sans puissance k

La suite de Sierpinski : $f(a) = aba$, $f(b) = bbb$

$$f^{\omega}(a) = aba\, b^3\, aba\, b^9 \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} aba\, b^i$$

Corollary

Le mot de Fibonacci contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Corollary

Le mot de Fibonacci contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Preuve

Le mot de Fibonacci est sans puissance $2 + \phi$ où ϕ est le nombre d'or $(1,618\cdots)$.

F. Mignosi, G. Pirillo,
Repetitions in the Fibonacci infinite word
Rairo ITA, 26 (1992), 199-204.

Corollary

Le mot de Fibonacci contient des facteurs de longueur palindromique arbitrairement grande.

Preuve

Le mot de Fibonacci est sans puissance $2 + \phi$ où ϕ est le nombre d'or $(1,618\cdots)$.

F. Mignosi, G. Pirillo,
Repetitions in the Fibonacci infinite word
Rairo ITA, 26 (1992), 199-204.

Le résultat de Frid, Puzynina, Zamboni n'est pas constructif.

$$\mathbf{F} = \begin{array}{cccccccccccccc} a & b & a & a & b & a & b & a & a & b & a & a & \dots \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

$|\mathbf{F}[1..\mathbf{1}]|_{pal} = 1$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{2}]|_{pal} = 2$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{9}]|_{pal} = 3$

$|\mathbf{F}[1..\mathbf{62}]|_{pal} = 4$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{297}]|_{pal} = 5$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{1154}]|_{pal} = 6$

$|\mathbf{F}[1..\mathbf{5473}]|_{pal} = 7 \quad \dots$

Mais $|ababba|_{pal} = 3$ et $|ababba| = 6$

Questions

Caractériser des facteurs de **F** qui soient de longueur palindromique strictement croissante.

Trouver une telle famille dont chaque élément soit de taille minimale (c'est-à-dire que tout facteur de **F** plus petit est de longueur palindromique strictement inférieure).

Soit $\mathcal{N} = (n_i)_{i\geq 0}$ la suite des longueurs des plus courts facteurs de **F** de longueur palindromique i :

$$n_i \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists u \text{ facteur de } \mathbf{F} \text{ tel que } |u|_{pal} = i \text{ et } |u| = n_i \\ \forall v \text{ facteur de } \mathbf{F} \text{ tel que } |v| < n_i, |v|_{pal} < i \end{cases}$$

$n_1 = 1 \ (a)$ $\quad$ $n_2 = 2 \ (ab)$ $\quad$ $n_3 = 6 \ (ababba)$

$n_4 = 24$ $\quad$ $n_5 = 132$ $\quad$ $n_6 = 565$ $\quad$ $n_7 = 2394$

Soit $\mathcal{N} = (n_i)_{i \geq 0}$ la suite des longueurs des plus courts facteurs de **F** de longueur palindromique i :

$$n_i \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists u \text{ facteur de } \mathbf{F} \text{ tel que } |u|_{pal} = i \text{ et } |u| = n_i \\ \forall v \text{ facteur de } \mathbf{F} \text{ tel que } |v| < n_i, |v|_{pal} < i \end{cases}$$

$n_1 = 1 \ (a)$ $\quad n_2 = 2 \ (ab)$ $\quad n_3 = 6 \ (ababba)$

$n_4 = 24$ $\quad n_5 = 132$ $\quad n_6 = 565$ $\quad n_7 = 2394$

$|\mathbf{F}[1..\mathbf{9}]|_{pal} = 3$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{62}]|_{pal} = 4$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{297}]|_{pal} = 5$

$|\mathbf{F}[1..\mathbf{1154}]|_{pal} = 6$ $\quad |\mathbf{F}[1..\mathbf{5473}]|_{pal} = 7$ $\quad \ldots$

Une construction

Soit s le morphisme sur $\mathcal{A}$ défini par $s(a) = abaab, s(b) = aab$.

(Un morphisme est une application compatible avec la concaténation : $f(uv) = f(u)f(v)$)

On définit la suite y_n, $n \geq 1$, comme suit :

- $y_1 = b$
- $y_2 = ba$
- $y_3 = babaab$

  et, pour tout $i \geq 1$,

- $y_{2i+2} = y_{2i+1} s^{2i-1}(y_3) a$
- $y_{2i+3} = y_{2i+2} a^{-1} s^{2i}(y_3)$

Propriété

- Pour tout $n \geq 0$, $|s^n(y_3)| = 3f_{3n+1}$.
- Pour tout $n \geq 1$,

$$y_{2n+2} = [\prod_{i=0}^{2n-1} s^i(y_3)]a \qquad \text{et} \qquad y_{2n+3} = \prod_{i=0}^{2n} s^i(y_3).$$

Corollaire

Pour tout $n \geq 1$,

$$|y_{2n+1}| = 3\sum_{i=0}^{2n-2} f_{3i+1} \qquad \text{et} \qquad |y_{2n+2}| = 1 + 3\sum_{i=0}^{2n-1} f_{3i+1}.$$

$$
\begin{aligned}
y6 \quad = \quad & babaabaababaabaababaababaabaababaababaa \\
& baababaabaababaababaabaababaababaabaaba \\
& baabaababaababaabaababaabaababaababaaba \\
& ababaababaabaababaabaababaababaabaababa \\
& abaababaababaabaababaababaabaababaabaab \\
& abaababaabaababaababaabaababaabaababaab \\
& abaabaababaabaababaababaabaababaababaab \\
& aababaabaababaababaabaababaabaababaabab \\
& aabaababaababaabaababaabaababaababaabaa \\
& babaababaabaababaabaababaababaabaababaa \\
& baababaababaabaababaababaabaababaabaaba \\
& baababaabaababaababaabaababaabaababaaba \\
& baabaababaabaababaababaabaababaababaaba \\
& ababaabaababaababaabaababaabaababaa \\
& babaabaababaababaabaaba
\end{aligned}
$$

Remarque

D'après le corollaire,

$$\begin{array}{rclcrcl} |y_1| & = & 1 & \quad & |y_5| & = & 132 \\ |y_2| & = & 2 & & |y_6| & = & 565 \\ |y_3| & = & 6 & & |y_7| & = & 2394 \\ |y_4| & = & 31 & & |y_8| & = & 10147\cdots \end{array}$$

$$n_1 = 1 \ \ (a) \qquad n_2 = 2 \ \ (ab) \qquad n_3 = 6 \ \ (ababba)$$
$$n_4 = 24 \qquad n_5 = 132 \qquad n_6 = 565 \qquad n_7 = 2394$$

Conjecture

Pour tout $i \neq 4$, $|y_i| = n_i$

Remarque

D'après le corollaire,

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
|y_1| & = & 1 & |y_5| & = & 132 \\
|y_2| & = & 2 & |y_6| & = & 565 \\
|y_3| & = & 6 & |y_7| & = & 2394 \\
|y_4| & = & 31 & |y_8| & = & 10147\cdots
\end{array}$$

$$n_1 = 1 \ \ (a) \qquad n_2 = 2 \ \ (ab) \qquad n_3 = 6 \ \ (ababba)$$
$$n_4 = 24 \qquad n_5 = 132 \qquad n_6 = 565 \qquad n_7 = 2394$$

Conjecture

Pour tout $i \neq 4$, $|y_i| = n_i$

Soit, pour tout $n \geq 4$, $X_n = \varphi^{3(n-3)}(aba) \cdots \varphi^3(aba)\varphi^3(a)\, b^{-1}$.

Propriété

- Pour tout $n \geq 4$, $|X_n| = \frac{f_{3n-5}}{2}$.
- Pour tout $n \geq 4$, F_{3n-4} a pour préfixe $X_n y_n$.

Proposition

Pour tout $k \geq 3$, on a $y_k = baP_1P_2 \dots P_{k-3}Q_{k-2}$

où, pour tout i, $1 \leq i \leq k-3$,

$$P_i = \begin{cases} a^{-1}s^i(ab) & \text{si } i \text{ est impair} \\ s^i(ab)a & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad Q_{k-2} = \begin{cases} a^{-1}s^{k-2}(a) & \text{si } k \text{ est impair} \\ s^{k-2}(a)a & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

De plus, tous les P_i, $1 \leq i \leq k-3$, ainsi que Q_{k-2} sont des palindromes.

Exemple

$$\begin{aligned} y_6 = baP_1P_2P_3Q_4 &= b\,a\,a^{-1}s(ab)\,s^2(ab)a\,a^{-1}s^3(ab)\,s^4(a)a \\ &= bs(ab)s^2(ab)s^3(ab)s^4(a)a \end{aligned}$$

Proposition

Pour tout $k \geq 3$, on a $y_k = baP_1P_2 \dots P_{k-3}Q_{k-2}$

où, pour tout i, $1 \leq i \leq k-3$,

$$P_i = \begin{cases} a^{-1}s^i(ab) & \text{si } i \text{ est impair} \\ s^i(ab)a & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad Q_{k-2} = \begin{cases} a^{-1}s^{k-2}(a) & \text{si } k \text{ est impair} \\ s^{k-2}(a)a & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

De plus, tous les P_i, $1 \leq i \leq k-3$, ainsi que Q_{k-2} sont des palindromes.

Lemme

Pour tout $n \geq 0$, $s^n(a)a$ et $s^n(ab)a$ sont des palindromes.

« Théorème »

Pour tout $k \geq 1$, $|y_k|_{pal} = k$

(et, si la conjecture est vraie, $|y_k| = n_k$).

« Preuve »

- D'après la proposition, $|y_k|_{pal} \leq k$.
- $|y_k|_{pal} \geq k$: à terminer.

La suite de Kolakoski

(Oldenburger)

The American Mathematical Monthly 72 (1965), 674

5304. *Proposed by William Kolakoski, Carnegie Institute of Technology*

Describe a simple rule for constructing the sequence

1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 $\cdots$.

What is the nth term? Is the sequence periodic?

The American Mathematical Monthly 72 (1965), 674

5304. *Proposed by William Kolakoski, Carnegie Institute of Technology*

Describe a simple rule for constructing the sequence

1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 · · · .

What is the nth term? Is the sequence periodic?

Solution *ad hoc* : coder les voyelles et les consonnes de la phrase ci-dessous respectivement par 1 et 2

Indian and Ethiopian, Syrian, Israeli, Arab, Persian.

I n d i a n a n d E t h i o p i a n S y r i a n I s r a e l i A r a b P e r s i a n
1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2

Solution by Necdet Üçoluk, Clarkson College of Technology. Let $\{x_n\}$ be a sequence not eventually constant. One can consider a sequence of blocks over $\{x_n\}$ by grouping all consecutive equal numbers in the same blocks. The lengths of these blocks will give a sequence $\{\hat{x}_n\}$ associated with $\{x_n\}$. The given sequence $\{a_n\}$ can be defined as follows: $a_1=1$, $a_n=1$ or 2, and $\{a_n\}=\{\hat{a}_n\}$, for all $n=1, 2, \cdots$. So $\{a_n\}$ is constructed uniquely. Indeed, $a_1=1$, so $\hat{a}_1=1$, hence the first block of $\{a_n\}$ is of length only 1, therefore $a_2\neq 1$, so $a_2=2$. Since $\hat{a}_2=a_2=2$, the second block in $\{a_n\}$ will consist of two 2's, so a_3 and then $\hat{a}_3$ equals 2. Since the third block in $\{a_n\}$ must start with 1, it will consist of two 1's, because $\hat{a}_3=2$. Therefore $a_4=a_5=1$. Continuing in this fashion, $\{a_n\}$ is constructed recursively. If $\{s_n\}$ is the sequence of partial sums of $\sum \hat{a}_n$, then

$a_n=\frac{1}{2}(3+(-1)^m)$ with $s_{m-1}<n\leqq s_m$, since consecutive blocks contain different numbers, odd-numbered blocks contain 1's while the others consist of 2's.

N. Üçoluk
Problem 5304 - Self Generating Runs
The American Mathematical Monthly 73 (1966), 681-682.

Si on l'écrit sous forme des puissances successives des lettres qui la composent, la suite des puissances est égale à la suite d'origine.

$$\begin{array}{rcccccccccc} kol & = & 22 & 11 & 2 & 1 & 22 & 1 & 22 & 11 & \cdots \\ & = & 2^2 & 1^2 & 2^1 & 1^1 & 2^2 & 1^1 & 2^2 & 1^2 & \cdots \\ & = & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots \end{array}$$

Si on l'écrit sous forme des puissances successives des lettres qui la composent, la suite des puissances est égale à la suite d'origine.

$$\begin{array}{rcccccccccc} kol & = & 22 & 11 & 2 & 1 & 22 & 1 & 22 & 11 & \cdots \\ & = & 2^2 & 1^2 & 2^1 & 1^1 & 2^2 & 1^1 & 2^2 & 1^2 & \cdots \\ & = & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots \end{array}$$

C'est la seule suite sur l'alphabet $\{1, 2\}$ ayant cette propriété.

R. Oldenburger
EXPONENT TRAJECTORIES IN SYMBOLIC DYNAMICS
Transactions of the American Mathematical Society 46 (1939), 453-466.

Questions

$|kol[n]|_1 =$ nombre de 1 dans le préfixe de longueur n de kol.

$$d(n) = \frac{|kol[n]|_1}{n}$$

Est-ce que $\lim_{n\to\infty} d(n)$ existe et, si oui, quelle est sa valeur ?

Quelles sont les propriétés structurelles de kol ?
(facteurs prescrits, proscrits, ...)

Remarque préliminaire

$$
\begin{aligned}
kol &= 22 \quad 11 \quad 2 \quad 1 \quad 22 \quad 1 \quad 22 \quad 11 \quad \cdots \\
&= 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad \cdots
\end{aligned}
$$

Remarque préliminaire

$$\begin{array}{rcccccccccc} kol & = & 22 & 11 & 2 & 1 & 22 & 1 & 22 & 11 & \cdots \\ & = & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots \end{array}$$

$$\delta_p : \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 22 \end{array} \qquad \delta_i : \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 11 \end{array}$$

kol est obtenu en appliquant alternativement δ_p et δ_i à partir de 2

$$2 \to 22 \to 2211 \to 221121 \to 221121221 \to \cdots$$

Propriétés structurelles

F. M. Dekking
On the structure of selfgenerating sequences
Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux - Année 1980-81 (26 juin 1981), 3101-3106.

Invariance

Un mot (fini ou infini) w sur $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ est *invariant par complémentaire* (resp. *par image-miroir*) si, pour tout mot u facteur de w, $\bar{u}$ (resp. $\tilde{u}$) est également un facteur de w ($\bar{u}$ est obtenu à partir de u en échangeant les 1 et les 2 : $\overline{122} = 211$).

Propriétés structurelles

F. M. Dekking
On the structure of selfgenerating sequences
Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux - Année 1980-81 (26 juin 1981), 3101-3106.

Invariance

Un mot (fini ou infini) w sur $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ est *invariant par complémentaire* (resp. *par image-miroir*) si, pour tout mot u facteur de w, $\bar{u}$ (resp. $\tilde{u}$) est également un facteur de w ($\bar{u}$ est obtenu à partir de u en échangeant les 1 et les 2 : $\overline{122} = 211$).

Dekking 1981

Si *kol* est invariant par complémentaire alors tout facteur apparaît infiniment souvent (*récurrence*).

Propriétés structurelles

F. M. Dekking
On the structure of selfgenerating sequences
Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux - Année 1980-81 (26 juin 1981), 3101-3106.

Invariance

Un mot (fini ou infini) w sur $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ est *invariant par complémentaire* (resp. *par image-miroir*) si, pour tout mot u facteur de w, $\bar{u}$ (resp. $\tilde{u}$) est également un facteur de w ($\bar{u}$ est obtenu à partir de u en échangeant les 1 et les 2 : $\overline{122} = 211$).

Dekking 1981

Si *kol* est invariant par complémentaire alors tout facteur apparaît infiniment souvent (*récurrence*).

Si *kol* est invariant par image-miroir alors tout facteur apparaît infiniment souvent.

Dérivation

Tout mot w sur $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ qui ne contient pas 111 ni 222 est *dérivable*. Sa dérivée est le mot w' dont la $i^{\text{ème}}$ lettre est la longueur du $i^{\text{ème}}$ bloc de w, sauf le premier et le dernier s'ils sont de longueur 1. Par convention, $\varepsilon' = \varepsilon$.

Exemples

$(22112122)' = 22112$, $(12211)' = 22$, $(121)' = 1$, $(12)' = \varepsilon$

Dérivation

Tout mot w sur $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ qui ne contient pas 111 ni 222 est *dérivable*. Sa dérivée est le mot w' dont la $i^{\text{ème}}$ lettre est la longueur du $i^{\text{ème}}$ bloc de w, sauf le premier et le dernier s'ils sont de longueur 1. Par convention, $\varepsilon' = \varepsilon$.

Exemples

$(22112122)' = 22112$, $(12211)' = 22$, $(121)' = 1$, $(12)' = \varepsilon$

Un mot w sur $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ est *infiniment dérivable* si, soit $w = \varepsilon$, soit w' est infiniment dérivable.

Exemples

Le mot 22112122 est infiniment dérivable :
$(22112122)' = 22112$, $(22112)' = 22$, $(22)' = 2$, $(2)' = \varepsilon$.
Le mot 221122 est dérivable, mais pas infiniment dérivable car $(221122)' = 222$.

Remarque : *kol* est infiniment dérivable (donc tout facteur de *kol* est infiniment dérivable).

Conjecture

Un mot est infiniment dérivable ssi il est facteur de *kol*.

Remarque : *kol* est infiniment dérivable (donc tout facteur de *kol* est infiniment dérivable).

Conjecture

Un mot est infiniment dérivable ssi il est facteur de *kol*.

Dekking 1981

kol est invariant par complémentaire si et seulement si tout mot infiniment dérivable est facteur de *kol*.

Remarque : *kol* est infiniment dérivable (donc tout facteur de *kol* est infiniment dérivable).

Conjecture

Un mot est infiniment dérivable ssi il est facteur de *kol*.

Dekking 1981

kol est invariant par complémentaire si et seulement si tout mot infiniment dérivable est facteur de *kol*.

kol est invariant par image-miroir si et seulement si tout mot infiniment dérivable est facteur de _kol_.

Remarque : *kol* est infiniment dérivable (donc tout facteur de *kol* est infiniment dérivable).

Conjecture

Un mot est infiniment dérivable ssi il est facteur de *kol*.

Dekking 1981

kol est invariant par complémentaire si et seulement si tout mot infiniment dérivable est facteur de *kol*.

kol est invariant par image-miroir si et seulement si tout mot infiniment dérivable est facteur de *kol*.

Brlek, Ladouceur 2003

Si tout mot infiniment dérivable est facteur de *kol* alors *kol* contient exactement 2 palindromes de chaque longueur.

Le nombre de 1 dans *kol*

Conjecture

$$\lim_{n\to\infty} d(n) = \frac{1}{2}$$

Une limite supérieure

Si elle existe, $\lim_{n\to\infty} d(n) < 0,5006$

V. Chvátal
Notes on the Kolakoski sequence
DIMACS Technical Report 93-84 (1994), 25 pages.

Le nombre de 1 dans *kol*

Conjecture

$$\lim_{n \to \infty} d(n) = \frac{1}{2}$$

Une limite supérieure

Si elle existe, $\lim_{n \to \infty} d(n) < 0,5006$

V. Chvátal
Notes on the Kolakoski sequence
DIMACS Technical Report 93-84 (1994), 25 pages.

Remarque : la différence entre le nombre de 1 et celui de 2 oscille (parfois négative, parfois positive).

d = (nombre de 2) - (nombre de 1)

i = longueur du plus petit préfixe p de kol tel que $|p|_2 - |p|_1 = d$

d	1	2	3	4	5	6	7
i	1	2	11	92	377	470	6351
d	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
i	31	256	797	824	857	1126	1397
d	8	9	10	11	12	13	14
i	6968	7175	7268	7565	7970	20337	20370
d	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14
i	1496	1523	1532	193139	193172	194035	194044

Conjecture

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists P \text{ préfixe de } kol \text{ tel que } |P|_1 = |P|_2 + n$$
$$\text{et} \quad \exists R \text{ préfixe de } kol \text{ tel que } |R|_1 = |R|_2 - n.$$

Corollaire

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P$ préfixe de *kol* tel que $|P| \geq n$ et $|P|_1 = |P|_2$.

Merci pour votre attention !