Arbres synchronisés

Olivier Bodini[1], Antoine Genitrini[2] et
Nicolas Rolin[1]

[1]Université Paris 13 – LIPN

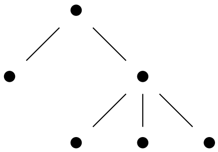
[2]UPMC Paris – LIP6

ALEA 2016

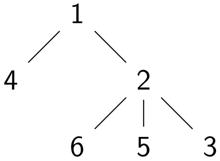
Arbre croissant

Arbre planaire étiqueté avec n noeuds :

- les étiquettes prennent toutes les valeurs entre 1 et n
- chaque chemin de la racine à une feuille comporte des étiquettes croissantes



Squelette de l'arbre



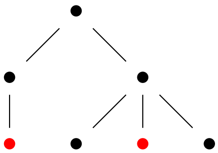
Arbre croissant

Arbre synchronisé

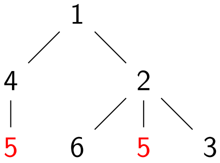
Arbres étiquetés avec $n+1$ noeuds :

- les étiquettes prennent toutes les valeurs dans 1 et n
- chaque chemin de la racine à une feuille comporte des étiquettes strictement croissantes

Il y a donc deux noeuds qui ont la même étiquette.



Squelette de l'arbre



Arbre synchronisé

Définitions

Une *classe combinatoire* $\mathcal{C}$ est un ensemble d'objets, avec une fonction de taille, noté par $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ et telle que pour chaque entier n, le sous-ensemble $\mathcal{C}_n$ des objets de taille n est fini de cardinalité C_n.
On définit la *fonction génératrice exponentielle* d'une classe combinatoire $\mathcal{C}$ étant :

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n \frac{z^n}{n!}.$$

Définitions

Une *classe combinatoire* $\mathcal{C}$ est un ensemble d'objets, avec une fonction de taille, noté par $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ et telle que pour chaque entier n, le sous-ensemble $\mathcal{C}_n$ des objets de taille n est fini de cardinalité C_n.
On définit la *fonction génératrice exponentielle* d'une classe combinatoire $\mathcal{C}$ étant :

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n \frac{z^n}{n!}.$$

Petit dictionnaire des constructions

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \to C(z) = A(z) + B(z)$$
$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B} \to C(z) = A(z) \cdot B(z)$$

Produit boxé

Le produit sur des classes étiquetées :

$$\mathcal{C} = (\mathcal{A}^{\square} \star \mathcal{B}),$$

Signifie que la classe $\mathcal{C}$ est le produit de la classe $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, où le plus petit élément provient de $\mathcal{A}$.
Cela s'exprime sur les fonctions génératrices par :

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\square} \star \mathcal{B} \to C(z) = \int_{t=0}^{t=z} \frac{dA}{dt}(t)B(t)dt.$$

Retour sur les arbres croissants

Les arbres croissants $\mathcal{T}$ vérifient donc la spécification suivante :

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \star^{\square} (Seq(\mathcal{T}))$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathcal{Z} \arrow[dlll] \arrow[dll] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
\mathcal{T} & \mathcal{T} & \cdots & & \mathcal{T} & \mathcal{T}
\end{tikzcd}$$

Retour sur les arbres croissants

Les arbres croissants $\mathcal{T}$ vérifient donc la spécification suivante :

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \star^{\square} (Seq(\mathcal{T}))$$

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{Z} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ \mathcal{T} & \mathcal{T} & \cdots & \mathcal{T} & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

Donc sa série génératrice vérifie :

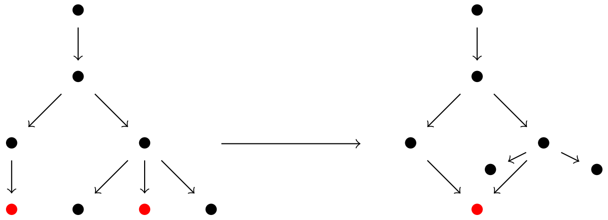
$$T'(z) = \frac{1}{1 - T(z)} \qquad \text{et} \qquad T(0) = 0$$

D'où :

$$T(z) = 1 - \sqrt{1 - 2z}$$

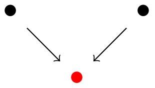
Arbres croissants à une synchronisation

On peut regrouper les deux noeuds identiques :



Arbres croissants à une synchronisation

On peut regrouper les deux noeuds identiques :



Opérateur box étendu

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des classes combinatoires sans élément de taille nulle.

$$\mathcal{E} = \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

S'exprime à l'aide de l'opérateur box :

- $\mathcal{E} = \mathcal{C}^{\square} \star (\mathcal{A} \star \mathcal{B})$
- $E(z) = \int\limits_{t=0}^{t=z} C'(t)A(t)B(t)dt.$

Opérateur box étendu

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des classes combinatoires sans élément de taille nulle.

$$\mathcal{E} = \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

S'exprime à l'aide de l'opérateur box :

- $\mathcal{E} = \mathcal{C}^{\square} \star (\mathcal{A} \star \mathcal{B})$
- $E(z) = \int\limits_{t=0}^{t=z} C'(t)A(t)B(t)dt.$

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[dr] & & \mathcal{B} \arrow[dl] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

S'exprime à l'aide de l'opérateur box :

- $\mathcal{D} = \mathcal{A}^{\square} \star (\mathcal{B}^{\square} \star \mathcal{C}) + \mathcal{B}^{\square} \star (\mathcal{A}^{\square} \star \mathcal{C})$
- $D(z) = \int\limits_{x=0}^{z} \int\limits_{y=0}^{x} A'(x)B'(y)C(y)dxdy + \int\limits_{y=0}^{z} \int\limits_{x=0}^{y} A'(y)B'(x)C(x)dxdy.$

Exemple plus compliqué

On regarde maintenant la classe $\mathcal{P}_{k,p}$.
La méthode précédente donne :

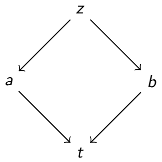
$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{k,p} &= \mathcal{A}^{\square} \star \mathcal{X}_1^{\square} \star (\mathcal{Y}_1^{\square} \star (\dots) + \mathcal{X}_2^{\square} \star (\dots)) \\ &\quad + \mathcal{A}^{\square} \star \mathcal{Y}_1^{\square} \star (\mathcal{X}_1^{\square} \star (\dots) + \mathcal{Y}_2^{\square} \star (\dots))\end{aligned}$$

Les deux branches s'entrelacent.
$\Rightarrow$ Le nombre de termes dans la somme est $\binom{k}{k+p}$

$$\mathcal{P}_{k,p} = \begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{X}_1 \arrow[d] & & \mathcal{Y}_1 \arrow[d] \\ \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\ \mathcal{X}_{p-1} \arrow[d] & & \mathcal{Y}_{k-1} \arrow[d] \\ \mathcal{X}_p \arrow[dr] & & \mathcal{Y}_k \arrow[dl] \\ & \mathcal{R} & \end{tikzcd}$$

Méthode de Stanley

Stanley a montré que le calcul des extensions linéaires d'un ordre partiel se réduit à calculer le volume de polytopes convexes :



Graphe représentant l'ordre partiel $\succ$:
$z \succ a, z \succ b, a \succ t, b \succ t$

$$\#\{\text{extension linéaire de } \succ\} = 4! \int_{z=0}^{1} \int_{t=0}^{z} \int_{x=t}^{z} \int_{y=t}^{z} dzdtdxdy = 2$$

Exemple simple : factorisation

Factoriser les séries génératrices :

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{x} A'(x)B'(y)C(y)dxdy + \int_{y=0}^{z} \int_{x=0}^{y} A'(x)B'(y)C(x)dxdy$$

Exemple simple : factorisation

Factoriser les séries génératrices :

$$D(z) = \int_{x=0}^{z}\int_{y=0}^{x} A'(x)B'(y)C(y)dxdy + \int_{y=0}^{z}\int_{x=0}^{y} A'(x)B'(y)C(x)dxdy$$

On permute l'ordre d'intégration de y et x sur le terme de droite.

$$= \int_{x=0}^{z}\int_{y=0}^{x} A'(x)B'(y)C(y)dxdy + \int_{x=0}^{z}\int_{y=x}^{z} A'(x)B'(y)C(x)dxdy$$

Exemple simple : factorisation

Factoriser les séries génératrices :

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{x} A'(x)B'(y)C(y)dxdy + \int_{y=0}^{z} \int_{x=0}^{y} A'(x)B'(y)C(x)dxdy$$

On permute l'ordre d'intégration de y et x sur le terme de droite.

$$= \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{x} A'(x)B'(y)C(y)dxdy + \int_{x=0}^{z} \int_{y=x}^{z} A'(x)B'(y)C(x)dxdy$$

On remplace respectivement y et x par $\min(x, y)$ dans C.

$$= \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{z} A'(x)B'(y)C(\min(x, y))dxdy$$

Exemple plus compliqué : factorisation

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Y}_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{Y}_{k-1} \arrow[r] & \mathcal{Y}_k \arrow[dr] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \mathcal{R} \\
 & \mathcal{X}_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{X}_{p-1} \arrow[r] & \mathcal{X}_p \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
P_{k,p}(z) = \int\limits_{u=0}^{z} \int\limits_{x_1=0}^{u} \int\limits_{x_2=0}^{x_1} \cdots \int\limits_{x_p=0}^{x_{p-1}} \int\limits_{y_1=0}^{u} \int\limits_{y_2=0}^{y_1} \cdots \int\limits_{y_k=0}^{y_{k-1}} \int\limits_{t=0}^{\min(x_p,y_k)}
$$
$$
A'(u)X_1'(x_1)X_2'(x_2)\ldots X_p'(x_p)Y_1'(y_1)Y_2'(y_2)\ldots Y_k'(y_k)R'(t)dudtdx_1\ldots
$$

Exemple simple : réarrangement

On change l'ordre d'intégration :

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{z} \int_{t=0}^{\min(x,y)} A'(x)B'(y)C'(t)dxdydt$$

Exemple simple : réarrangement

On change l'ordre d'intégration :

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{z} \int_{t=0}^{\min(x,y)} A'(x)B'(y)C'(t)dxdydt$$

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{t=0}^{\min(x,z)} \int_{y=t}^{z} A'(x)B'(y)C'(t)dxdydt$$

Exemple simple : réarrangement

On change l'ordre d'intégration :

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{z} \int_{t=0}^{\min(x,y)} A'(x)B'(y)C'(t)dxdydt$$

$$D(z) = \int_{x=0}^{z} \int_{t=0}^{\min(x,z)} \int_{y=t}^{z} A'(x)B'(y)C'(t)dxdydt$$

$$D(z) = \int_{t=0}^{z} \int_{x=t}^{z} \int_{y=t}^{z} A'(x)B'(y)C'(t)dxdydt$$

Exemple plus compliqué : réarrangement

On change l'ordre d'intégration :

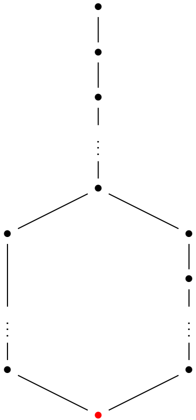
$$P_{k,p}(z) = \int_{u=0}^{z}\int_{x_1=0}^{u}\int_{x_2=0}^{x_1}\cdots\int_{x_p=0}^{x_{p-1}}\int_{y_1=0}^{u}\int_{y_2=0}^{y_1}\cdots\int_{y_k=0}^{y_{k-1}}\int_{t=0}^{\min(x_p,y_k)}$$
$$A'(u)X_1'(x_1)X_2'(x_2)\ldots X_p'(x_p)Y_1'(y_1)Y_2'(y_2)\ldots Y_k'(y_k)R'(t)dudtdx_1\ldots$$

$$P(z) = \int_{u=0}^{z}\int_{t=0}^{u}\int_{x_1=t}^{u}\int_{x_2=t}^{x_1}\cdots\int_{x_p=t}^{x_{p-1}}\int_{y_1=t}^{u}\int_{y_2=t}^{y_1}\cdots\int_{y_k=t}^{y_{k-1}}$$
$$A'(u)X_1'(x_1)X_2'(x_2)\ldots X_p'(x_p)Y_1'(y_1)Y_2'(y_2)\ldots Y_k'(y_k)R'(t)dudtdx_1\ldots$$

Construction des arbres synchronisés

Construction :

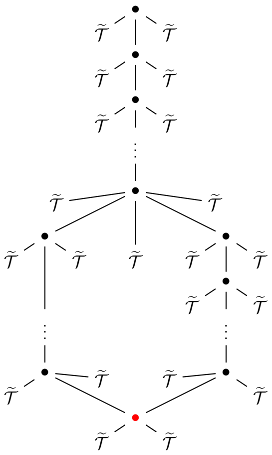
- Squelette en "pendule"



Construction des arbres synchronisés

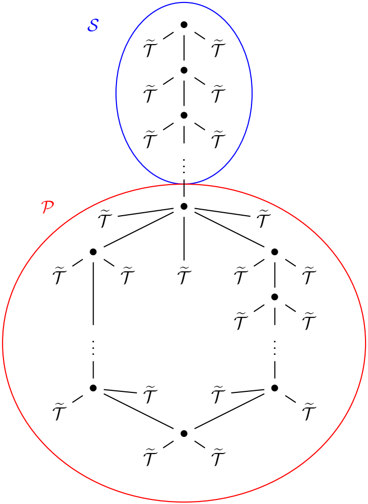
Construction :

- Squelette en "pendule"
- des forêts croissantes $\widetilde{\mathcal{T}}$ greffées dessus



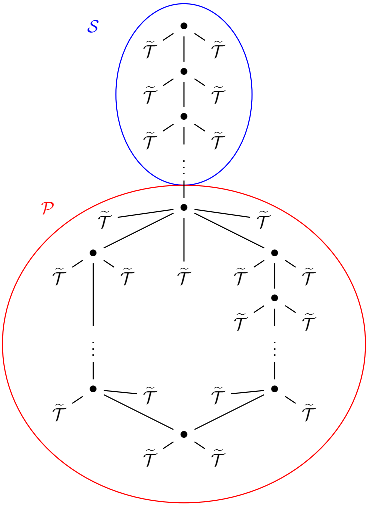
Construction des arbres synchronisés

- $\mathcal{S} = \mathcal{Z}^{\square} \star (\widetilde{\mathcal{T}} \star \mathcal{S} \star \widetilde{\mathcal{T}}) + \mathcal{P}$
  Avec $\widetilde{\mathcal{T}}$ la classe des forêts croissantes
- $\mathcal{P}$



Construction des arbres synchronisés

- $F(z) = \int\limits_{t=0}^{z} \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-2z}} P'(t)dt$
- $P(z) = \int\limits_{u=0}^{z} \widetilde{T}^3(u) \int\limits_{t=0}^{z} \widetilde{T}^2(t) \left(\frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-2z}}\right)^2$
  $= \frac{4\,z^2 + (3\,z-1)\sqrt{-2\,z+1} - 4\,z + 1}{3\,(4\,z^2 - 4\,z + 1)}$



Application aux arbres synchronisés

$$F(z) = \frac{\frac{2z}{1-2\,z} - \log\left(\frac{1}{1-2\,z}\right)}{(4\,\sqrt{1-2\,z})}$$

$$F(z) = 1\,\frac{z^2}{2!} + 11\,\frac{z^3}{3!} + 122\,\frac{z^4}{4!} + 1518\,\frac{z^5}{5!} + 21423\,\frac{z^6}{6!} + \dots$$

Conclusion

On a obtenu:

- des technique de calcul pour faire des produits boxés plus compliqués
- une série génératrice exacte pour les arbres synchronisés

Perspectives :

- construire un opérateur pour faire des produits ordonnés
- génération aléatoire