

# Tableaux de Young rectangulaires

Philippe Marchal

CNRS et Université Paris 13

# Tableaux de Young rectangulaires

Tableau de Young rectangulaire  $(m, n)$  :

- rectangle  $m \times n$  avec cases numérotées de 1 à  $mn$
- Croissance stricte le long des lignes et des colonnes

10	16	21	23	25
9	14	17	22	24
6	11	13	18	20
4	5	8	12	19
1	2	3	7	15

Surface associée : fonction  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

Si la case  $(i, j)$  est numérotée  $k$ , on pose  $f(i/m, j/n) = k/mn$ .

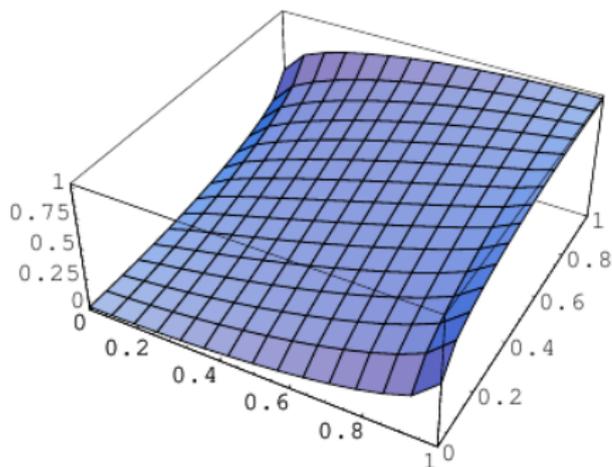
# Limite déterministe

## Théorème (Pittel-Romik, 2007)

Soit un tableau de Young aléatoire uniforme  $(m, n)$  avec  $m, n \rightarrow \infty, m/n \rightarrow \ell > 0$ .

Alors  $f_{[m,n]}$  (aléatoire) converge vers  $f_{[\ell]}$  (déterministe).

La fonction  $f_{[\ell]}$  est solution d'un problème variationnel.



# Fluctuations : deux régimes

## Théorème

Soit  $X_n$  le numéro du coin nord-ouest du tableau de Young  $(m, n)$ .

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1} \binom{mn-k}{m-1}}{\binom{mn}{m+n-1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}(1 + \ell)(X_n - \mathbb{E}X_n)}{n^{3/2}} \xrightarrow{\text{loi}} \text{Gaussienne}$$

# Fluctuations : deux régimes

## Théorème

Soit  $X_n$  le numéro du coin nord-ouest du tableau de Young  $(m, n)$ .

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1} \binom{mn-k}{m-1}}{\binom{mn}{m+n-1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}(1+\ell)(X_n - \mathbb{E}X_n)}{n^{3/2}} \xrightarrow{\text{loi}} \text{Gaussienne}$$

## Théorème

Pour un tableau carré  $(n, n)$ , soit  $Y_{i,n}$  le numéro de la case  $(i, n)$ . Il existe une fonction  $r$  explicite telle que pour tout  $0 < t < 1$ ,

$$\frac{r(t)(Y_{[tn],n} - \mathbb{E}Y_{[tn],n})}{n^{4/3}} \xrightarrow{\text{loi}} \text{Tracy - Widom}$$

La loi de Tracy-Widom apparaît comme loi limite pour

- la plus grande valeur propre pour certaines matrices aléatoires
- la plus longue sous-suite croissante d'une permutation
- systèmes de particules, percolation de dernier passage...

Densité donnée par une équation différentielle (Painlevé II).

Renormalisation en  $n^{-2/3}$  : universalité (?)

Extension multidimensionnelle : processus d'Airy.

# Lien avec le TASEP

TASEP : système de particules, espace ( $\mathbb{Z}$ ) et temps ( $\mathbb{N}$ ) discret.

- En chaque site de  $\mathbb{Z}$ , on a 0 ou 1 particule.
- À chaque instant, une particule se déplace de 1 vers la droite si la place est libre.

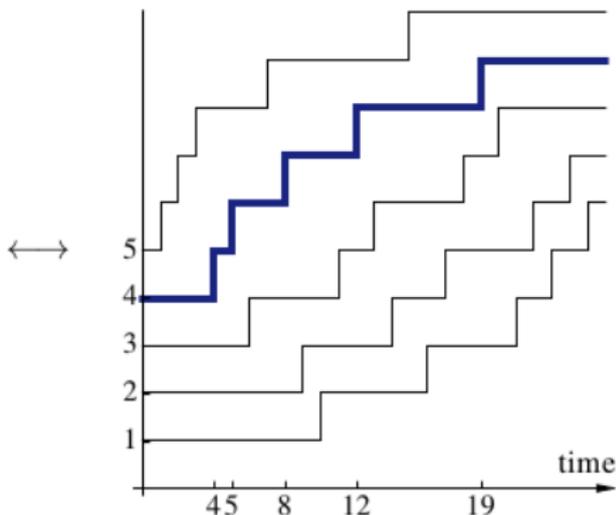
Exemple :

- Au temps 0, en chaque site de 1 à  $n$ , il y a 1 particule.
- chaque particule fait  $m$  pas vers la droite.
- Au temps  $mn$ , en chaque site de  $m + 1$  à  $m + n$ , il y a 1 particule.

# TASEP/Tableau de Young

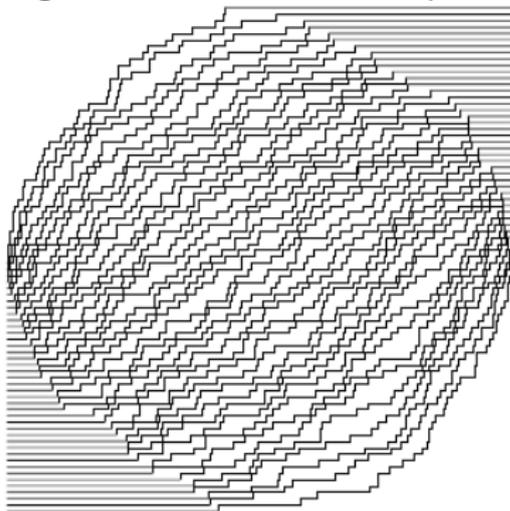
Si la  $j$ -ième particule la plus à droite fait son  $i$ -ième saut en  $t = k$ , alors la case  $(i, j)$  du tableau de Young est numérotée  $k$ .

10	16	21	23	25
9	14	17	22	24
6	11	13	18	20
4	5	8	12	19
1	2	3	7	15



# Un phénomène de cercle arctique

Pour  $m, n$  grands, on observe un phénomène de cercle arctique.



Les fluctuations de la frontière du cercle arctique correspondent aux fluctuations au bord du tableau de Young.

# Ensemble de Jacobi

On remplace le tableau de Young par une version continue : on met dans les cases du tableau des réels  $\in [0, 1]$  avec les conditions de croissance suivant les lignes et colonnes. Alors la diagonale

$$(Y_{1,n-k+1}, Y_{2,n-k+2}, \dots, Y_{k-1,n-1}, Y_{k,n})$$

a pour densité de probabilité

$$C(k, n) \mathbf{1}_{\{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k\}} \Delta(x_1, \dots, x_k)^2 \prod_{i=1}^k x_i^{n-k} (1 - x_i)^{n-k}$$

dans le cas carré. Pour un rectangle général, on obtient le modèle de matrices aléatoires appelé *Ensemble de Jacobi*.

En utilisant des résultats de Collins (2005),

- on retrouve la limite déterministe démontrée par Pittel-Romik
- on obtient les fluctuations sur le bord du tableau dans le cas carré.

# Travaux apparentés

- Première occurrence d'un cercle arctique : pavage par dominos du diamant aztèque (Elkies-Kuperberg-Larsen-Propp). Lien avec le GUE (Johansson-Nordenstam).
- Surfaces aléatoires associées à d'autres pavages et aux fonctions de hauteur associées (Kenyon et al).
- Processus d'Airy associé au processus de Schur et aux algèbres de Lie (Okounkov-Reshetikhin, Borodin).
- Universalité pour des modèles 2D (Miller, Sheffield).
- Partitions pyramides (modèle de pavage par dominos) et courbes arctiques (Betea-Boutillier-Bouttier-Chapuy-Corteel-Vuletic).