Énumération des coins dans les tableaux boisés

Patxi Laborde-Zubieta

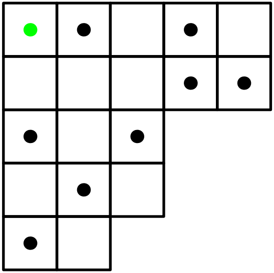
LaBRI - Université de Bordeaux

Journées ALEA 2016 - 9/3/2016

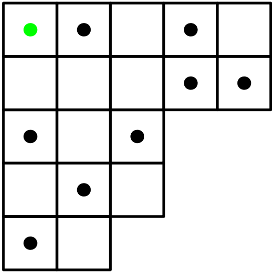
Présentation des tableaux boisés et du PASEP

Énumération des coins

Définition des tableaux boisés

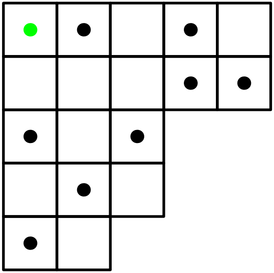
$T =$ 

Définition des tableaux boisés

$T =$ 

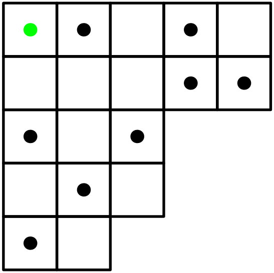
- la forme est un diagramme de Ferrers

Définition des tableaux boisés

$T =$ 

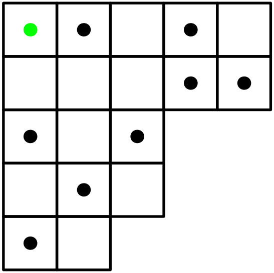
- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :

Définition des tableaux boisés

$T =$ 

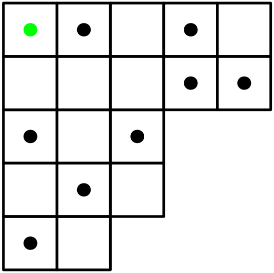
- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :
- il y a un point dans la case en haut à gauche, on l'appelle **point racine**

Définition des tableaux boisés

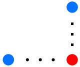
$T =$ 

- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :
- il y a un point dans la case en haut à gauche, on l'appelle **point racine**
- toute colonne ou ligne est non vide

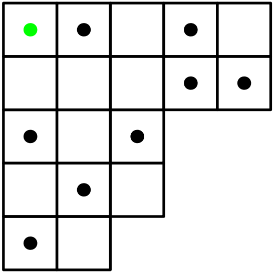
Définition des tableaux boisés

$T =$ 

- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :
- il y a un point dans la case en haut à gauche, on l'appelle **point racine**
- toute colonne ou ligne est non vide
- pour tout point • $\neq$ •, il existe • tel

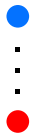
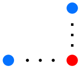
  que  ou  mais pas 

Définition des tableaux boisés

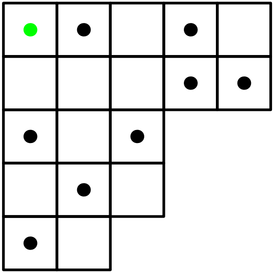
$T =$ 

taille de T
$=$ nombre de points de T

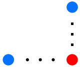
- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :
- il y a un point dans la case en haut à gauche, on l'appelle **point racine**
- toute colonne ou ligne est non vide
- pour tout point $\bullet \neq \bullet$, il existe $\bullet$ tel

  que  ou  mais pas 

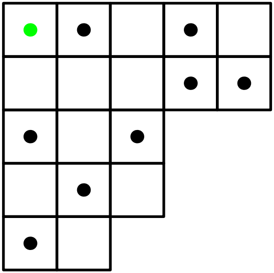
Définition des tableaux boisés

$T =$ 

taille de T
$=$ nombre de points de T
$=$ demi-périmètre -1

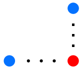
- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :
- il y a un point dans la case en haut à gauche, on l'appelle **point racine**
- toute colonne ou ligne est non vide
- pour tout point $\bullet \neq \bullet$, il existe $\bullet$ tel que  ou  mais pas 

Définition des tableaux boisés

$T =$ 

taille de T
$=$ nombre de points de T
$=$ demi-périmètre -1

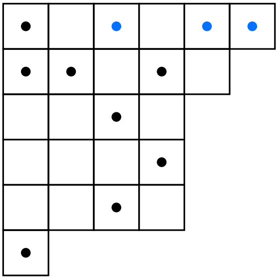
- la forme est un diagramme de Ferrers
- on remplit les cases par un point au plus en respectant les règles suivantes :
- il y a un point dans la case en haut à gauche, on l'appelle **point racine**
- toute colonne ou ligne est non vide
- pour tout point $\bullet \neq \bullet$, il existe $\bullet$ tel

  que  ou  mais pas 

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des tableaux boisés de taille n, ils sont énumérés par $n!$.

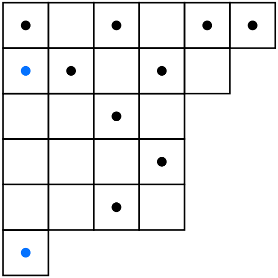
Statistiques sur les tableaux boisés

- Points hauts : points non racine sur la première ligne.
  On note $ph(T)$ le nombre de points hauts de T.



Statistiques sur les tableaux boisés

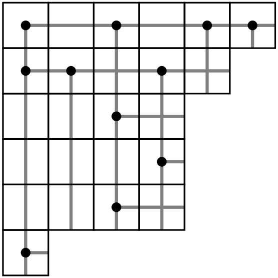
- Points hauts : points non racine sur la première ligne.
  On note $ph(T)$ le nombre de points hauts de T.
- Points gauches : points non racine sur la première colonne.
  On note $pg(T)$ le nombre de points gauches de T.



Statistiques sur les tableaux boisés

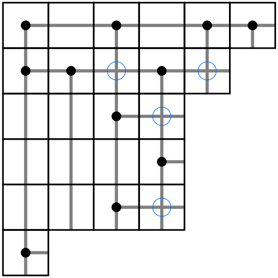
- Points hauts : points non racine sur la première ligne.
  On note $ph(T)$ le nombre de points hauts de T.

- Points gauches : points non racine sur la première colonne.
  On note $pg(T)$ le nombre de points gauches de T.



Statistiques sur les tableaux boisés

- Points hauts : points non racine sur la première ligne. On note $ph(T)$ le nombre de points hauts de T.
- Points gauches : points non racine sur la première colonne. On note $pg(T)$ le nombre de points gauches de T.
- Croisements : croisements entre une branche gauche et une branche droite de l'arbre binaire induit par les points. On note $cr(T)$ le nombre de croisement de T.



PASEP

Le *PASEP* est un modèle de mécanique statistique qui décrit un système de particules en interaction qui sautent vers la gauche ou vers la droite sur un réseau unidimensionel. C'est une chaîne de Markov dont l'ensemble des états est $\{\bullet, \circ\}^n$. Le symbole $\circ$ correspond à un emplacement vide et $\bullet$ à un emplacement occupé par une particule.

$$\circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet$$

PASEP

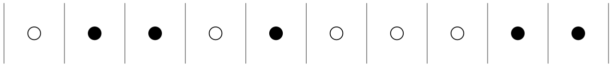
Le *PASEP* est un modèle de mécanique statistique qui décrit un système de particules en interaction qui sautent vers la gauche ou vers la droite sur un réseau unidimensionel. C'est une chaîne de Markov dont l'ensemble des états est $\{\bullet, \circ\}^n$. Le symbole $\circ$ correspond à un emplacement vide et $\bullet$ à un emplacement occupé par une particule.

$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$

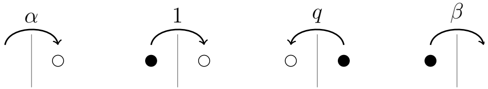
Pour transitionner depuis un état, on choisit de manière uniforme un interstice entre deux emplacements.

PASEP

Le *PASEP* est un modèle de mécanique statistique qui décrit un système de particules en interaction qui sautent vers la gauche ou vers la droite sur un réseau unidimensionel. C'est une chaîne de Markov dont l'ensemble des états est $\{\bullet, \circ\}^n$. Le symbole $\circ$ correspond à un emplacement vide et $\bullet$ à un emplacement occupé par une particule.

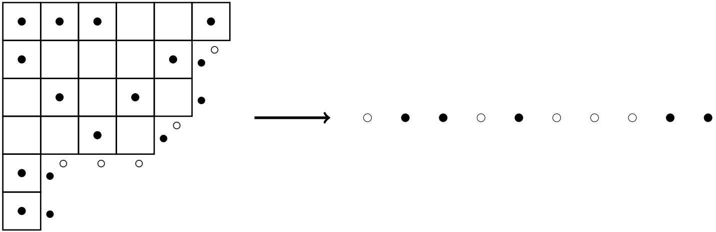


Pour transitionner depuis un état, on choisit de manière uniforme un interstice entre deux emplacements. Un saut de particule est effectué au niveau de cet interstice suivant les probabilités suivantes :



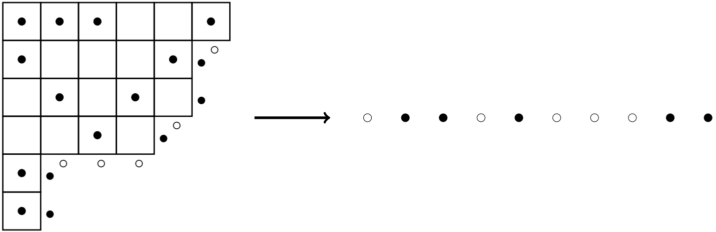
Les TLTs décrivent l'état stationnaire du PASEP.

Projection d'un TLT sur un état du PASEP :



Les TLTs décrivent l'état stationnaire du PASEP.

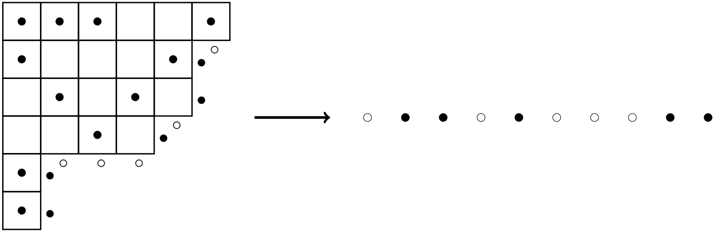
Projection d'un TLT sur un état du PASEP :



Soit $s \in \{\bullet, \circ\}^n$, on note $\mathcal{T}_{n+1}^{s}$ l'ensemble des tableaux boisés (de taille $n+1$) qui se projettent sur s.

Les TLTs décrivent l'état stationnaire du PASEP.

Projection d'un TLT sur un état du PASEP :



Soit $s \in \{\bullet, \circ\}^n$, on note $\mathcal{T}_{n+1}^s$ l'ensemble des tableaux boisés (de taille $n+1$) qui se projettent sur s.

Théorème (Corteel, Williams 07)

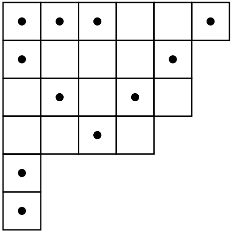
Soit $s \in \{\bullet, \circ\}^n$ un état du PASEP, la probabilité stationnaire de s est donnée par :

$$\mathbb{P}(s) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_{n+1}^s} w(T)}{Z_n},$$

où $w(T) = q^{cr(T)} \alpha^{-ph(T)} \beta^{-pg(T)}$ et $Z_n = \sum_{T \in \mathcal{T}_{n+1}} w(T)$.

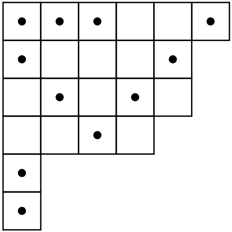
La statistique des coins

Un *coin* (resp. *coin interne*) d'un tableau boisé T est un motif SO (resp. OS) sur son bord Sud-Est. On note $c(T)$ et $ci(T)$ respectivement le nombre de coins et de coins internes de T.
Par exemple, pour le tableau boisé T ci-dessous, on a $c(T) = 4$ et $ci(T) = 3$.



La statistique des coins

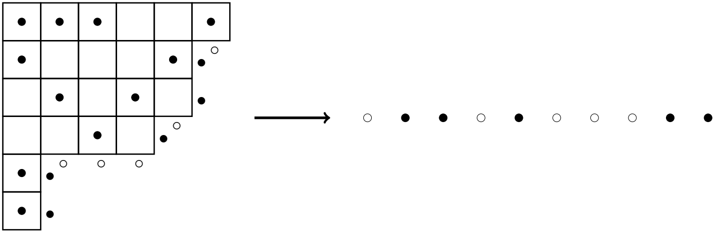
Un *coin* (resp. *coin interne*) d'un tableau boisé T est un motif SO (resp. OS) sur son bord Sud-Est. On note $c(T)$ et $ci(T)$ respectivement le nombre de coins et de coins internes de T.
Par exemple, pour le tableau boisé T ci-dessous, on a $c(T) = 4$ et $ci(T) = 3$.



De manière générale, pour tout tableau boisé T on a

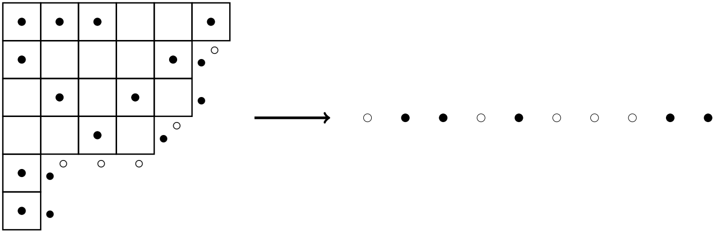
$$c(T) = ci(T) + 1.$$

Interprétation des coins sur le PASEP



Les coins et les coins internes d'un tableau boisé T se projetant sur un état s, correspondent aux transitions possibles depuis cet état s.

Interprétation des coins sur le PASEP



Les coins et les coins internes d'un tableau boisé T se projetant sur un état s, correspondent aux transitions possibles depuis cet état s. Ainsi, si on note X la variable aléatoire comptant le nombre de transitions possibles depuis un état, on a

$$X(s) = c(T) + ci(T) = 2c(T) - 1.$$

Interprétation des coins sur le PASEP

Le nombre moyen de transitions est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{s\in\{\circ,\bullet\}^n} \mathbb{P}(s)\cdot X(s) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{s\in\{\circ,\bullet\}^n} \sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}^s} w(T)\cdot X(s) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{s\in\{\circ,\bullet\}^n} \sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}^s} w(T)(2c(T)-1) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}} w(T)(2c(T)-1)
\end{aligned}$$

Interprétation des coins sur le PASEP

Le nombre moyen de transitions est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{s\in\{\circ,\bullet\}^n} \mathbb{P}(s)\cdot X(s) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{s\in\{\circ,\bullet\}^n} \sum_{T\in\mathcal{T}^s_{n+1}} w(T)\cdot X(s) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{s\in\{\circ,\bullet\}^n} \sum_{T\in\mathcal{T}^s_{n+1}} w(T)(2c(T)-1) \\
&= \frac{1}{Z_n} \sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}} w(T)(2c(T)-1)
\end{aligned}$$

Si on prend $\alpha=\beta=q=1$, alors pour tout T on a $w(T)=1$, ainsi $Z_n = |\mathcal{T}_{n+1}| = (n+1)!$, donc :

$$\mathbb{E}(X) = 2\cdot\frac{\sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}} c(T)}{(n+1)!} - 1$$

Plan

Présentation des tableaux boisés et du PASEP

Énumération des coins

Énumération des coins

Théorème (L.-Z. 15)

Soit $n \geqslant 2$, *le nombre de coins dans* $\mathcal{T}_n$ *est*

$$c(\mathcal{T}_n) = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} c(T) = n! \cdot \frac{n+4}{6}.$$

Énumération des coins

Théorème (L.-Z. 15)

Soit $n \geqslant 2$, le nombre de coins dans $\mathcal{T}_n$ est

$$c(\mathcal{T}_n) = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} c(T) = n! \cdot \frac{n+4}{6}.$$

Il a également été prouvé de manière indépendante par deux autres groupes de chercheurs. Par Pawel Hitczenko et Amanda Lohss, et par Alice L.L. Gao, Emily X.L. Gao et Brian Y. Sun.

Énumération des coins

Théorème (L.-Z. 15)

Soit $n \geqslant 2$, le nombre de coins dans $\mathcal{T}_n$ est

$$c(\mathcal{T}_n) = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} c(T) = n! \cdot \frac{n+4}{6}.$$

Il a également été prouvé de manière indépendante par deux autres groupes de chercheurs. Par Pawel Hitczenko et Amanda Lohss, et par Alice L.L. Gao, Emily X.L. Gao et Brian Y. Sun.

Corollaire

Le nombre moyen de transitions possibles depuis un état est

$$\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{(n+1)+4}{6} - 1 = \frac{n+2}{3}.$$

Bijection entre les doubles descentes et les coins

La statistique des coins est équiénumérée avec la statistique suivante des doubles descentes, dont on peut prouver facilement qu'elle est comptée par $n! \cdot \frac{n+4}{6}$.

Définition

Une permutation $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, a une double descente s'il existe $i \in [n]$ tel que $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$ avec la convention que $\sigma_0 = n+1$ et $\sigma_{n+1} = 0$.

Bijection entre les doubles descentes et les coins

La statistique des coins est équiénumérée avec la statistique suivante des doubles descentes, dont on peut prouver facilement qu'elle est comptée par $n! \cdot \frac{n+4}{6}$.

Définition

Une permutation $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, a une double descente s'il existe $i \in [n]$ tel que $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$ avec la convention que $\sigma_0 = n+1$ et $\sigma_{n+1} = 0$.

Il est à noter qu'elles ne sont pas équidistribués. En effet, la permutation 123 n'as pas de double descente, mais tout tableau boisé à au moins un coin.

Bijection entre les doubles descentes et les coins

La statistique des coins est équiénumérée avec la statistique suivante des doubles descentes, dont on peut prouver facilement qu'elle est comptée par $n! \cdot \frac{n+4}{6}$.

Définition

Une permutation $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$*, a une double descente s'il existe* $i \in [n]$ *tel que* $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$ *avec la convention que* $\sigma_0 = n + 1$ *et* $\sigma_{n+1} = 0$*.*

Il est à noter qu'elles ne sont pas équidistribués. En effet, la permutation 123 n'as pas de double descente, mais tout tableau boisé à au moins un coin.

Proposition

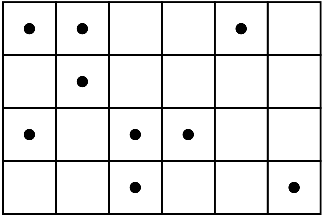
Pour $n \geqslant 1$*, les coins dans* $\mathcal{T}_n$ *et les doubles descentes dans* $\mathfrak{S}_n$ *sont en bijection.*

Arbres non-ambigus

Définition

Un arbre non-ambigus est un tableau boisé de forme rectangulaire. Sa hauteur est égale à son nombre de lignes moins 1, et sa largeur à son nombre de colonnes moins 1.

Par exemple, le tableau boisé suivant est un arbre non-ambigus de hauteur 3 et de largeur 5.



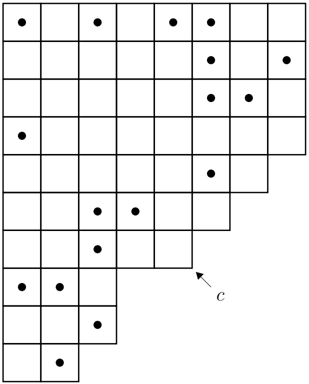
Preuve partie I : énoncé du lemme 1

Lemme (1)

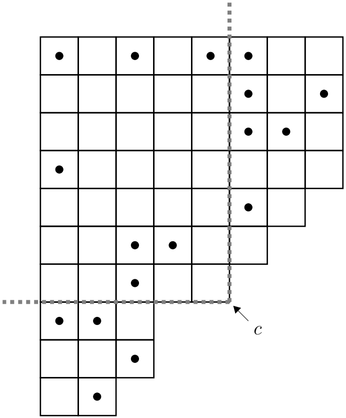
Soit $n \geqslant 1$*, les coins dans* $\mathcal{T}_n$ *sont en bijection avec les triplets* (T_{inf}, T_{sup}, nat) *tels que :*

- $n_{inf} + n_{sup} + 1 = n$,
- T_{inf} *est un tableau boisé de taille* n_{inf}*,*
- T_{sup} *est un tableau boisé de taille* n_{sup}*,*
- nat *est un arbre non-ambigus de hauteur* $pg(T_{sup}) + 1$ *et de largeur* $ph(T_{inf}) + 1$*.*

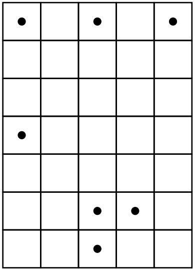
Preuve partie I : preuve du lemme 1



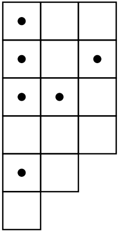
Preuve partie I : preuve du lemme 1



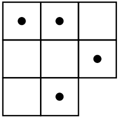
Preuve partie I : preuve du lemme 1



nat

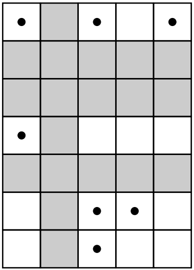


T_{sup}

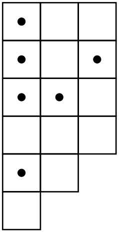


T_{inf}

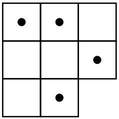
Preuve partie I : preuve du lemme 1



nat

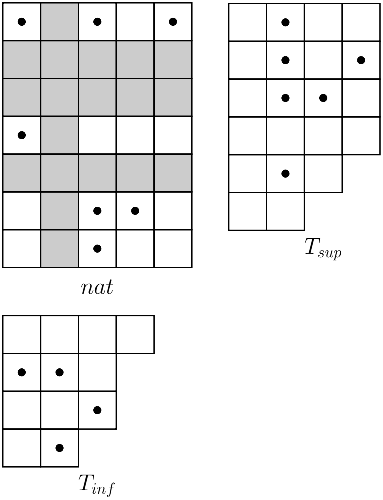


T_{sup}

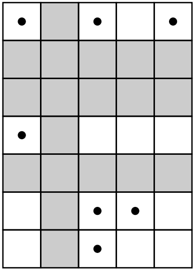


T_{inf}

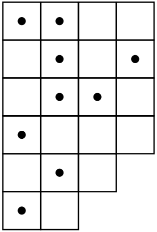
Preuve partie I : preuve du lemme 1



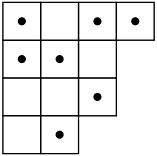
Preuve partie I : preuve du lemme 1



nat

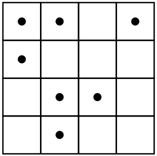


T_{sup}

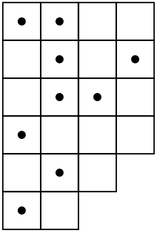


T_{inf}

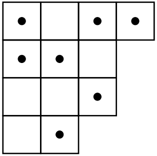
Preuve partie I : preuve du lemme 1



nat



T_{sup}



T_{inf}

Preuve partie II : énoncé du lemme 2

Lemme

Les triplets (T_{inf}, T_{sup}, nat) *satisfaisant les conditions*

- $n_{inf} + n_{sup} + 1 = n$,
- T_{inf} *est un tableau boisé de taille* n_{inf},
- T_{sup} *est un tableau boisé de taille* n_{sup},
- nat *est un arbre non-ambigus de hauteur* $pg(T_{sup}) + 1$ *et de largeur* $ph(T_{inf}) + 1$,

sont en bijection avec les doubles descentes dans les permutations de taille n.

Preuve partie II : Prérequis pour prouver le lemme 2

Preuve partie II : Prérequis pour prouver le lemme 2

Proposition

Les tableaux boisés de taille n ayant k points hauts (resp. gauches), sont en bijection avec les permutations de taille n ayant $k+1$ cycles.

Preuve partie II : Prérequis pour prouver le lemme 2

Proposition

Les tableaux boisés de taille n ayant k points hauts (resp. gauches), sont en bijection avec les permutations de taille n ayant $k+1$ cycles.

On note :

$$T_{inf} \quad \longleftrightarrow \quad \sigma_{inf} \text{ à } ph(T_{inf}) + 1 \text{ cycles}$$

$$T_{sup} \quad \longleftrightarrow \quad \sigma_{sup} \text{ à } pg(T_{sup}) + 1 \text{ cycles}$$

Preuve partie II : Prérequis pour prouver le lemme 2

Proposition (Aval, Boussicault, Delcroix-Oger, Hivert, L-Z 15)

Les arbres non-ambigus de hauteur h et de largeur l sont en bijection avec les permutations m de $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{l}, \underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{h}\}$ telles que :

- *l'élément le plus à droite de m est de type $\underline{x}$,*
- *si deux éléments consécutifs σ_i et σ_{i+1} sont tous les deux du même type, alors $\sigma_i < \sigma_{i+1}$.*

Par exemple, voilà deux telles permutations :

$$\bar{2}\ \bar{3}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \bar{1}\ \bar{4}\ \underline{0}\ \underline{1}$$

$$\underline{1}\ \bar{4}\ \underline{0}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \underline{2}\ \bar{3}\ \underline{3}$$

Preuve partie II : Preuve le lemme 2

Prouver le lemme 2 revient à mettre en bijection les doubles descentes dans les permutations de taille n avec les triplets $(\sigma_{inf}, \sigma_{sup}, m)$ tels que :

- $n_{inf} + n_{sup} + 1 = n$,
- σ_{inf} est une permutation de taille n_{inf} à h cycles,
- σ_{sup} est une permutation de taille n_{sup} à l cycles,
- m est une permutation de $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{l}, \underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{h}\}$ vérifiant les conditions précédentes.

Preuve partie II : Preuve le lemme 2

Prouver le lemme 2 revient à mettre en bijection les doubles descentes dans les permutations de taille n avec les triplets $(\sigma_{inf}, \sigma_{sup}, m)$ tels que :

- $n_{inf} + n_{sup} + 1 = n$,
- σ_{inf} est une permutation de taille n_{inf} à h cycles,
- σ_{sup} est une permutation de taille n_{sup} à l cycles,
- m est une permutation de $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{l}, \underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{h}\}$ vérifiant les conditions précédentes.

On va construire une permutation de taille n ayant une double descente de valeur $n_{inf} + 1$. Pour cela, on remplace dans m :

- $\underline{0}$ par $n_{inf} + 1$,
- on remplace chaque lettre $\underline{x}$ par le cycle correspondant de σ_{inf},
- on remplace chaque lettre $\bar{x}$ par le cycle correspondant de σ_{sup} shiftés de $n_{inf} + 1$.

Preuve partie II : Preuve le lemme 2

On note $C_{inf}^1, \ldots, C_{inf}^h$ les cycles de σ_{inf} de sorte que pour $i < j$, on ait $\max C_{inf}^i < \max C_{inf}^j$, on fait de même pour σ_{sup} et on shift toutes les valeurs de $n_{inf} + 1$. On représente un cycle sans parenthèse avec sa plus grande valeur en première position.
Par exemple, pour :

$$\sigma_{inf} = (6)(7523)(9184) \text{ et } \sigma_{sup} = (423)(5)(716)(98)$$

La double descente est de valeur 10, et

$$C_{inf}^1 = 6,\ C_{inf}^2 = 7\ 5\ 2\ 3,\ C_{inf}^3 = 9\ 1\ 8\ 4$$

$$C_{sup}^1 = 14\ 12\ 13,\ C_{sup}^2 = 15,\ C_{sup}^3 = 17\ 11\ 16,\ C_{sup}^4 = 19\ 18$$

Preuve partie II : Preuve le lemme 2

Soit m une permutation de $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{l}, \underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{h}\}$ telles que :

- l'élément le plus à droite de m est $\underline{x}$,
- si deux éléments consécutifs σ_i et σ_{i+1} sont tous les deux du même type, alors $\sigma_i < \sigma_{i+1}$.

Pour créer une double descente, il faut que la lettre à gauche de $\underline{0}$ soit de type $\bar{x}$ et que la lettre à droite de $\underline{0}$ soit de type $\underline{x}$.

Preuve partie II : Preuve le lemme 2

Soit m une permutation de $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{l}, \underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{h}\}$ telles que :

- l'élément le plus à droite de m est $\underline{x}$,
- si deux éléments consécutifs σ_i et σ_{i+1} sont tous les deux du même type, alors $\sigma_i < \sigma_{i+1}$.

Pour créer une double descente, il faut que la lettre à gauche de $\underline{0}$ soit de type $\bar{x}$ et que la lettre à droite de $\underline{0}$ soit de type $\underline{x}$.

Si l'élément à droite de $\underline{0}$ est de type $\underline{x}$, on pose $m' = m$. Sinon m est de la forme $m = u\underline{0}\overline{a_1}\underline{b_1}\overline{a_2}\underline{b_2}\cdots\overline{a_p}\underline{b_p}$, et on pose $m' = u\underline{0}\underline{b_1}\overline{a_1}\underline{b_2}\overline{a_2}\cdots\underline{b_p}\overline{a_p}$.

Par exemple :

$$\text{si } m = \bar{2}\bar{3}\underline{2}\underline{3}\bar{1}\bar{4}\underline{0}\underline{1}, \text{ alors } m' = m$$

$$\text{si } m = \underline{1}\bar{4}\underline{0}\overline{12}\underline{2}\bar{3}\underline{3}, \text{ alors } m' = \underline{1}\bar{4}\underline{0}\underline{2}\overline{12}\underline{3}\bar{3}$$

Preuve partie II : Preuve le lemme 2

On mélange les deux : on remplace $\underline{x}$ par C^x_{inf} et $\bar{x}$ par C^x_{sup}. Par exemple, si on a:

$$C^1_{inf} = 6,\ C^2_{inf} = 7\ 5\ 2\ 3,\ C^3_{inf} = 9\ 1\ 8\ 4$$

$$C^1_{sup} = 14\ 12\ 13,\ C^2_{sup} = 15,\ C^3_{sup} = 17\ 11\ 16,\ C^4_{sup} = 19\ 18$$

$$m' = \underline{1}\bar{4}\underline{0}\underline{2}\bar{1}\bar{2}\underline{3}\bar{3}$$

Alors la permutation est

$$\underbrace{6}_{\underline{1}}\ \underbrace{19\ 18}_{\bar{4}}\ \underbrace{10}_{\underline{0}}\ \underbrace{7\ 5\ 2\ 3}_{\underline{2}}\ \underbrace{14\ 12\ 13}_{\bar{1}}\ \underbrace{15}_{\bar{2}}\ \underbrace{9\ 1\ 8\ 4}_{\underline{3}}\ \underbrace{17\ 11\ 16}_{\bar{3}}.$$

Conjecture raffinant le résultat

Soit $w(T) = a^{ph(T)} b^{pg(T)}$ ($a = \alpha^{-1}$ et $b = \beta^{-1}$), notons

$$c_n(a,b) := \sum_{T \in \mathcal{T}_n} c(T) \cdot w(T).$$

Conjecture

$$c_n(a,b) = \left[(n-2)ab + \binom{n-2}{2}(a+b) + \binom{n-2}{3} + (a+b+n-3)(a+b+(n-2))\right] \cdot T_{n-2}(a,b),$$

où $T_n(a,b) := \sum_{T \in \mathcal{T}_n} w(T) = (a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n-2)$.

Merci