1. Démontrer que

$$\det_{1\le i,j\le n}\Big((X_i+A_n)(X_i+A_{n-1})\cdots(X_i+A_{j+1})(X_i+B_j)(X_i+B_{j-1})\cdots(X_i+B_2)\Big)$$
$$=\prod_{1\le i<j\le n}(X_i-X_j)\prod_{2\le i\le j\le n}(B_i-A_j).$$

2. Calculer le nombre des pavages en losanges d'un hexagone dont les longueurs de coté sont n, m, n, n, m, n (les cotés de longueur m étant verticales) qui sont symétrique par rapport à l'axe de symétrie horizontal.

3. Vérifier qu'effectivement la formule de Lindström, Gessel et Viennot peut être utiliser pour l'énumeration des pavages en losanges d'un hexagone avec des trous triangulaire de tailles paires. (C'est-à-dire : vérifier que les signes créés par les permutations sous laquelle les points de départ sont connectés avec les points d'arrivée sont tous les mêmes.)

4. Démontrer que $\mathrm{Pf}(E)=1$, où E signifie la matrice antisymétrique de dimension $2n\times 2n$ avec tous les éléments egaux à 1 au-dessus de la diagonale.

5. Soient m, n, p des entiers tels que $n+m$ soit pair et $0\le n-m\le p$. Soit M une matrice $n\times p$, H une matrice $n\times m$, et $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le p}$ une matrice antisymétrique. Démontrer que

$$\sum_K \mathrm{Pf}\left(A_K^K\right)\det\left(M_K \vdots H\right)=(-1)^{\binom{m}{2}}\,\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} M\,A\,M^t & H\\ -H^t & 0\end{pmatrix}.$$

où la somme porte sur tous les sous-ensembles K de $\{1,2,\ldots,p\}$ de cardinal $n-m$, A_K^K est la matrice antisymétrique obtenue en selectionnant les lignes et colonnes indexées par K, et M_K est la sous-matrice de M qui consiste des colonnes indexées par K.
(*Indication* : Montrer que les deux membres de l'identités sont tous les deux linéaires en colonnes de H. Utiliser cette remarque pour reduire au cas $m=0$. Ensuite montrer que les deux membres de l'identité qui reste à montrer sont tous les deux linéaires en lignes de M. Utiliser cette remarque pour conclure.)

6. Vérifier que le théorème de sommation de mineurs se réduit en effet à la formule qui a été enoncé dans le cours.

7. Soit A une matrice antisymétrique de dimension $2n\times 2n$. Démontrer que

$$\mathrm{Pf}(A)=\frac{1}{2^n\,n!}\sum_{\sigma\in S_{2n}}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{n}A_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}.$$

7. Démontrer qu'effectivement une orientation Pfaffienne a la propriété que le nombre d'arêtes le long d'un cycle qui sont orientées négativement est une parité opposée a celle du nombre des sommets à l'interieur du cycle.

8. Trouver une orientation Pfaffienne pour le grille carré.

9. Vérifier que la suppression d'un nombre égal des sommets pairs et impairs dans un graphe hexagonal ne détruit pas la propriété d'une orientation Pfaffienne.

10. Soit A et B des matrices $n \times n$. Démontrer que

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\binom{n}{2}} \det B.$$