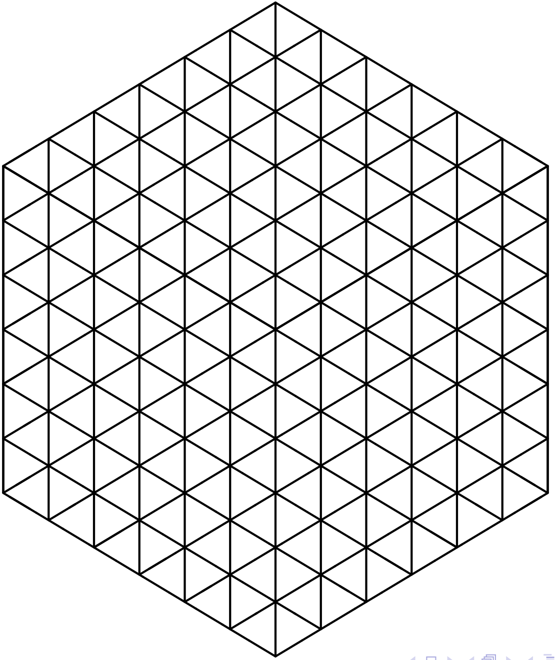
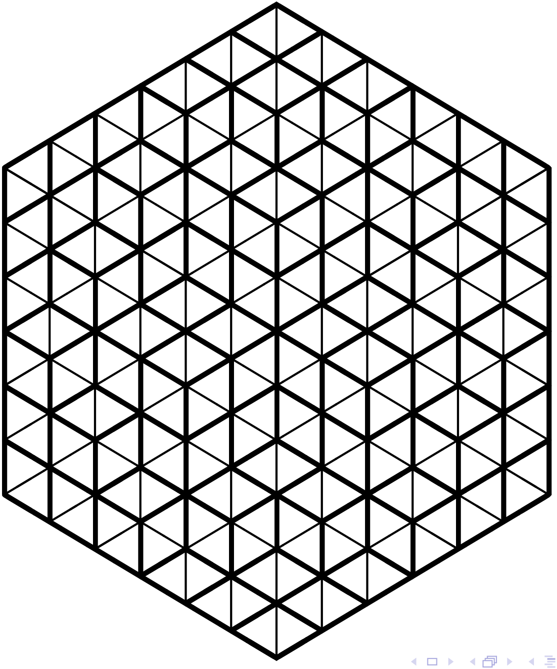
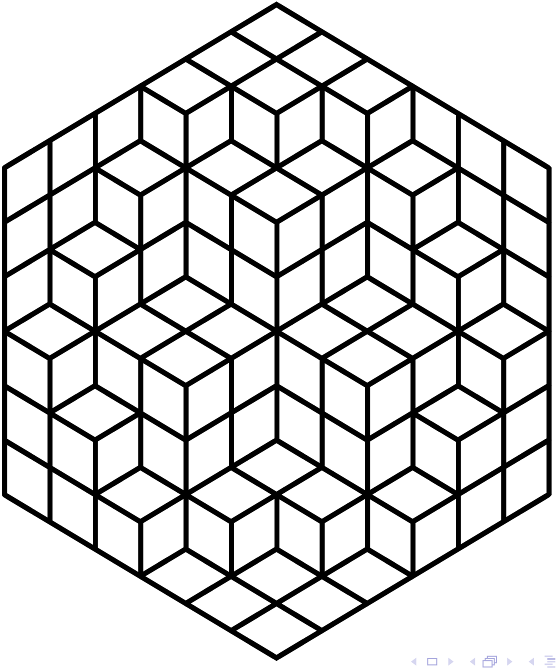
Déterminants dans l'énumeration

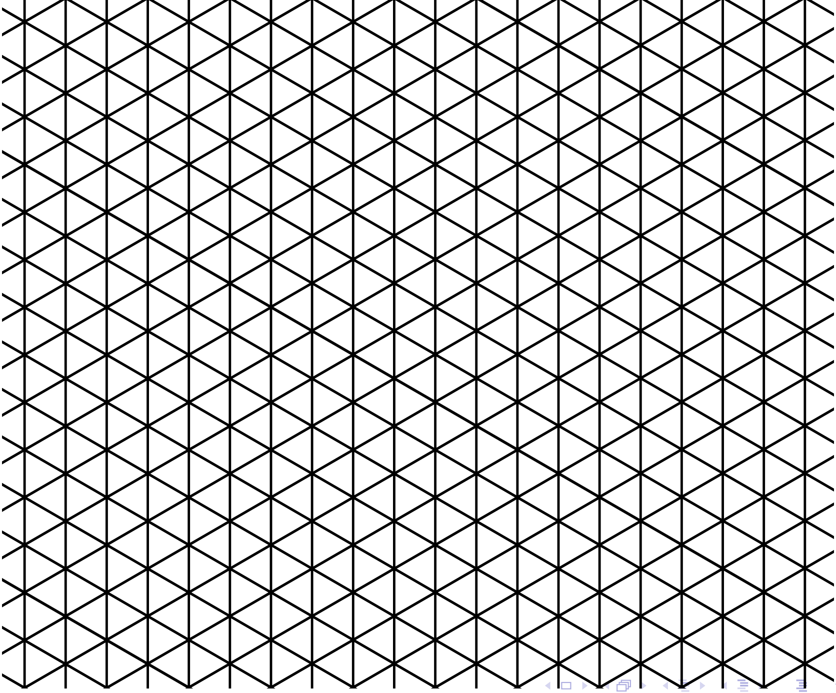
Christian Krattenthaler

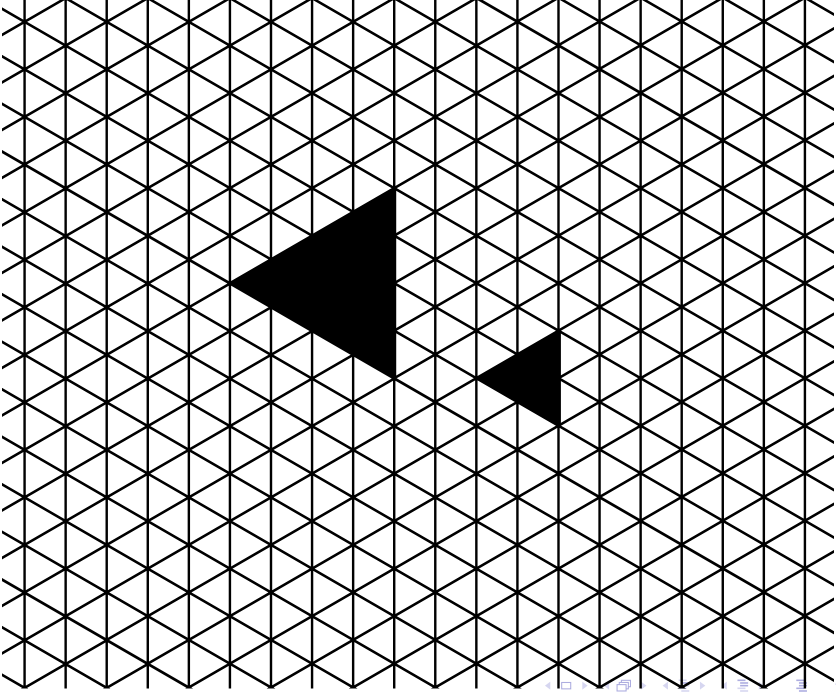
Fakultät für Mathematik, Universität Wien

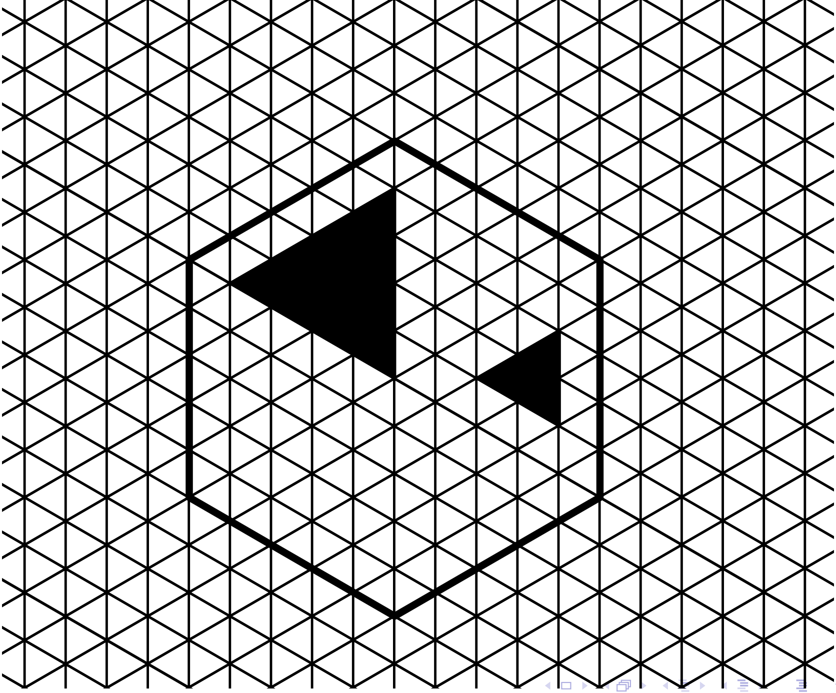


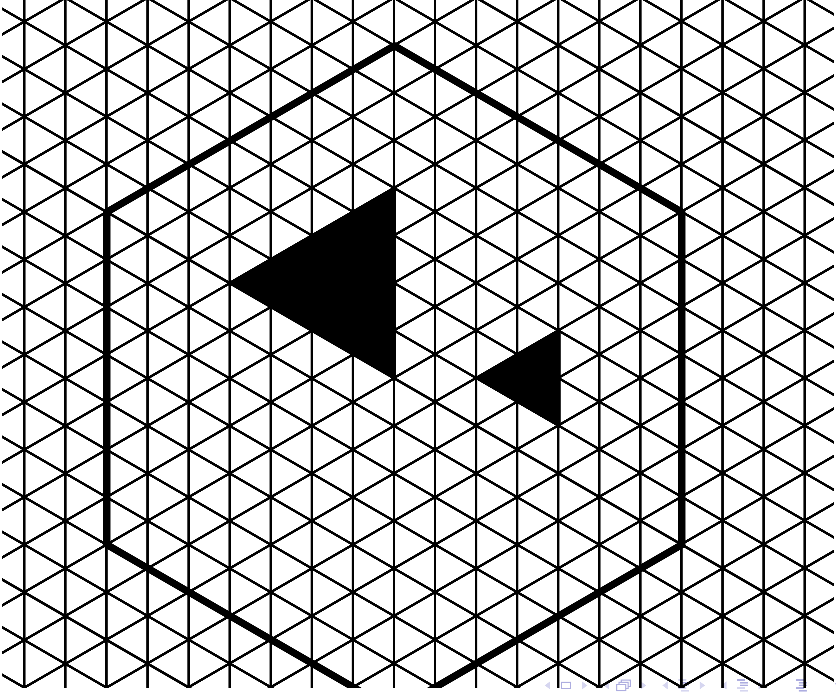


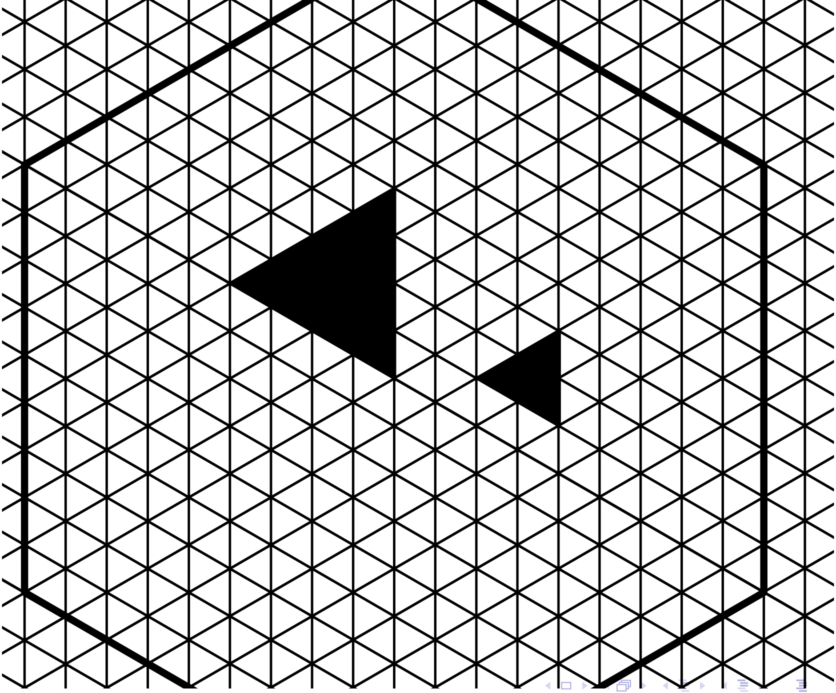


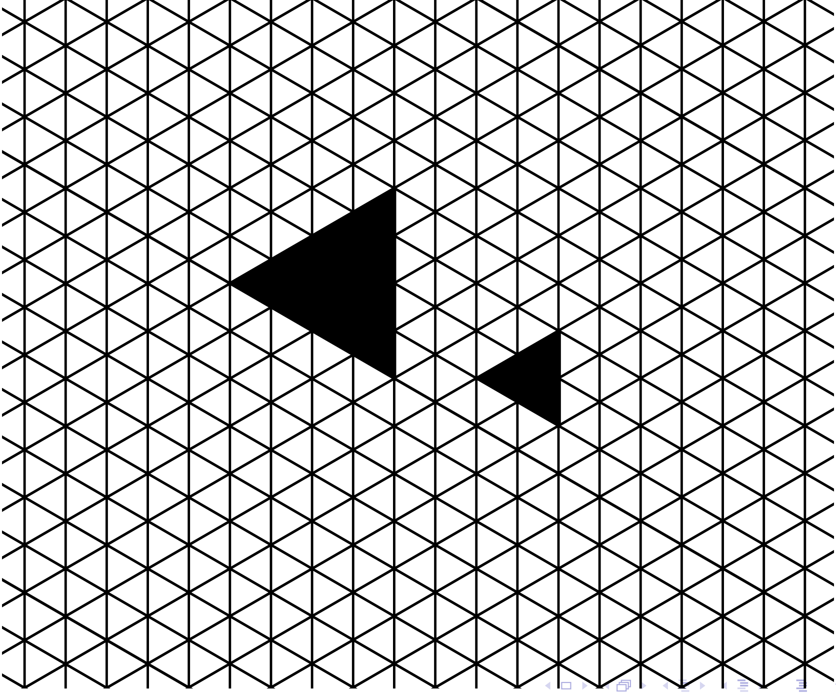


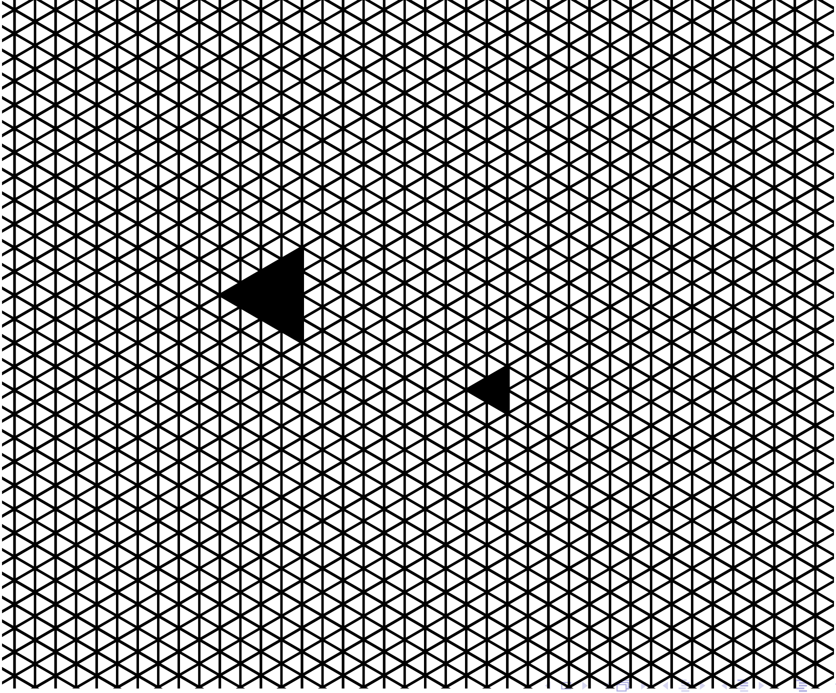


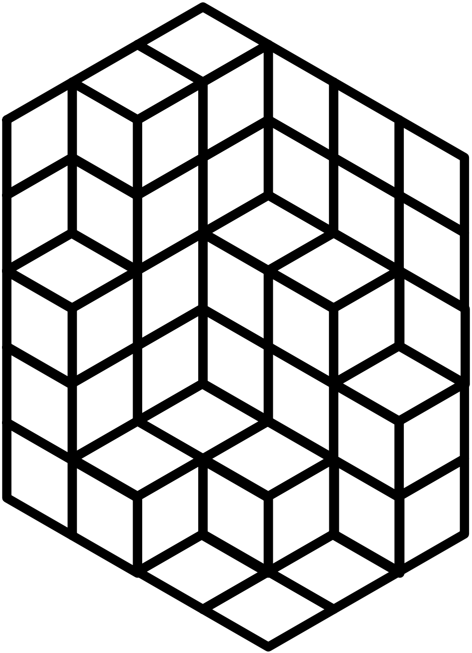


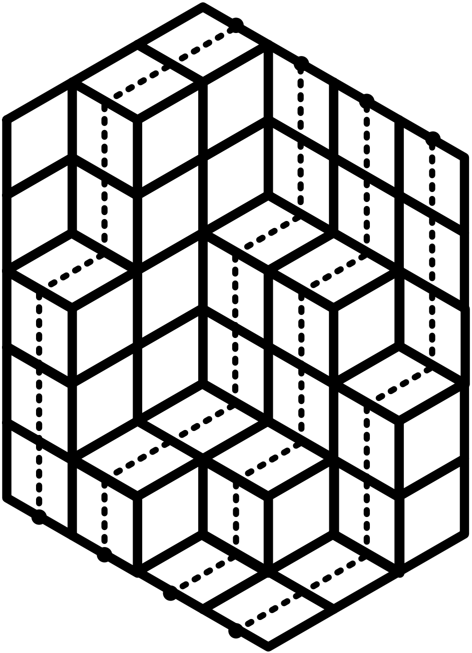


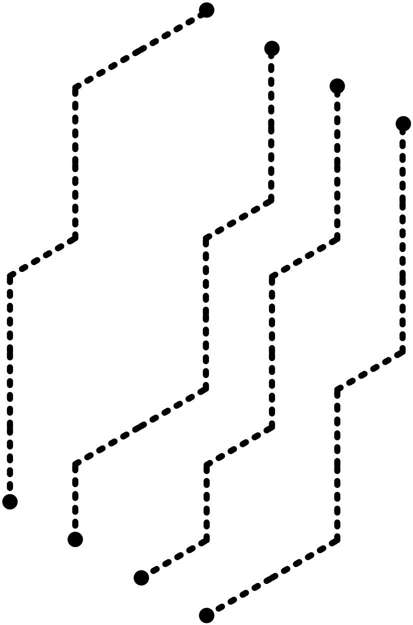


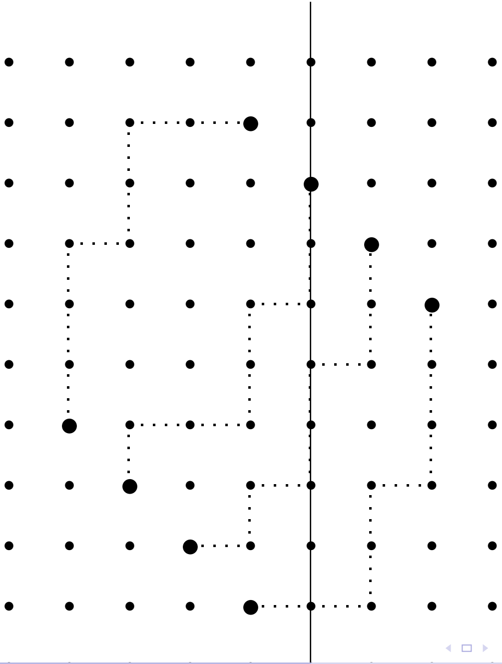


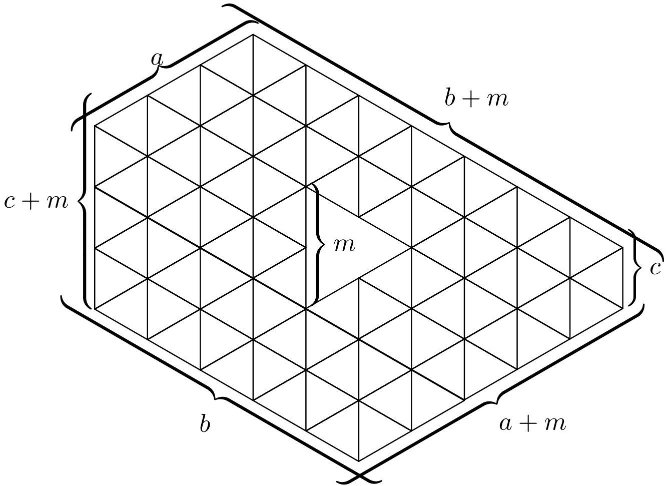












a
$b+m$
$c+m$
m
c
b
$a+m$

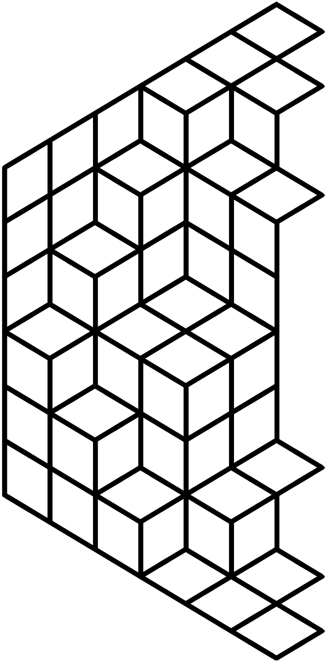
Théorème (Ciucu, Eisenkölbl, K., Zare)

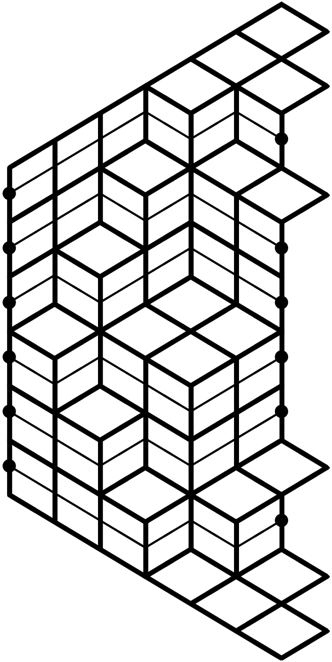
Soient a, b, c, m des entiers positifs, a, b, c ayant la même parité. Le nombre des pavages en losanges d'un hexagone avec longueurs de coté $a, b+m, c, a+m, b, c+m$, où on a efface un triangle de taille m au milieu est égal à

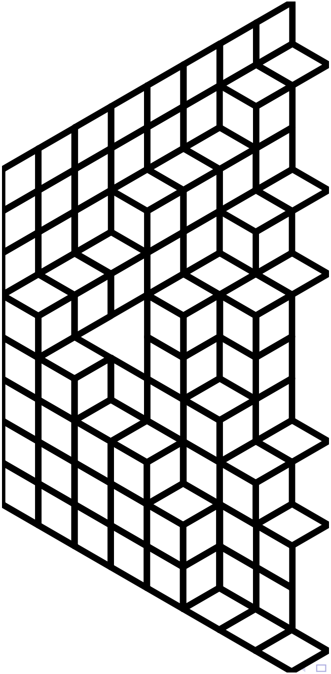
$$\frac{\mathrm{H}(a+m)\,\mathrm{H}(b+m)\,\mathrm{H}(c+m)\,\mathrm{H}(a+b+c+m)}{\mathrm{H}(a+b+m)\,\mathrm{H}(a+c+m)\,\mathrm{H}(b+c+m)}$$
$$\times\frac{\mathrm{H}(m+\lceil\frac{a+b+c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(m+\lfloor\frac{a+b+c}{2}\rfloor)}{\mathrm{H}(\frac{a+b}{2}+m)\,\mathrm{H}(\frac{a+c}{2}+m)\,\mathrm{H}(\frac{b+c}{2}+m)}$$
$$\times\frac{\mathrm{H}(\lceil\frac{a}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\lceil\frac{b}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\lceil\frac{c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\lfloor\frac{a}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\lfloor\frac{b}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\lfloor\frac{c}{2}\rfloor)}{\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{a}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{b}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{a}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{b}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{c}{2}\rfloor)}$$
$$\times\frac{\mathrm{H}(\frac{m}{2})^2\,\mathrm{H}(\frac{a+b+m}{2})^2\,\mathrm{H}(\frac{a+c+m}{2})^2\,\mathrm{H}(\frac{b+c+m}{2})^2}{\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{a+b+c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{a+b+c}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\frac{a+b}{2})\,\mathrm{H}(\frac{a+c}{2})\,\mathrm{H}(\frac{b+c}{2})},$$

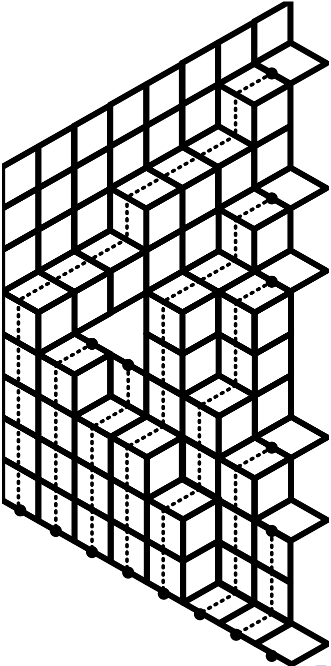
où

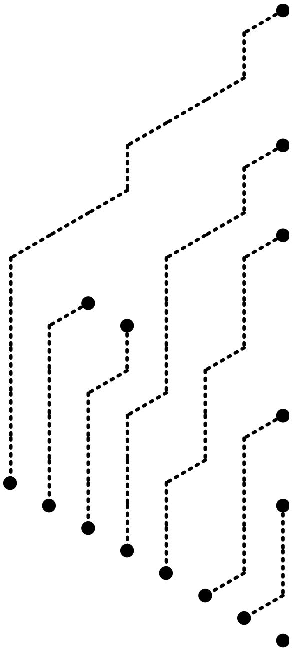
$$\mathrm{H}(n) := \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(k+1) & \text{pour } n \text{ entier,} \\ \prod_{k=0}^{n-\frac{1}{2}}\Gamma(k+\frac{1}{2}) & \text{pour } n \text{ demi-entier.} \end{cases}$$

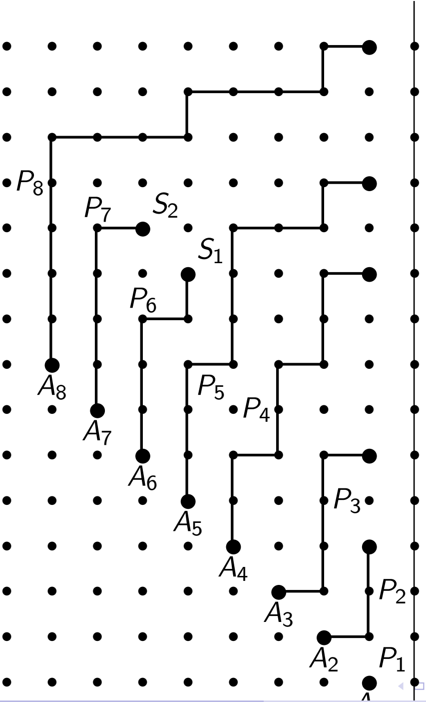












P_8
P_7
S_2
S_1
P_6
A_8
P_5
P_4
A_7
A_6
P_3
A_5
A_4
P_2
A_3
A_2
P_1

Théorème (Ciucu, K.)

Pour des entiers n, x et $k \le n-1$, on a

$$\mathrm{M}(H_{n,x} \setminus \triangleleft_2(k)) = \binom{4k+1}{2k} \frac{(n+k)!}{(x+n-k)_{2k+1}} \prod_{s=1}^{n} \frac{(2x+2s)_{4n-4s+1}}{(2s)_{4n-4s+1}}$$

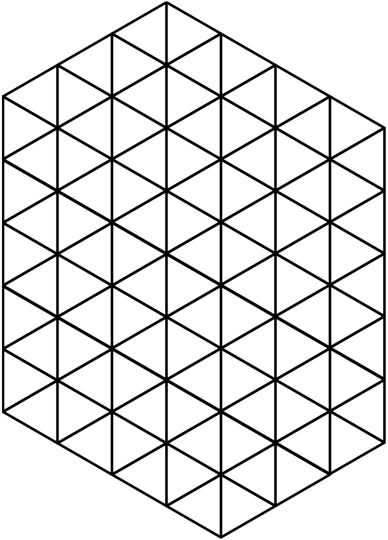
$$\times \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_i}{i!\,(n-k-i-1)!^2\,(n+k-i+1)_{n-k}\,(n+k-i+1)_i\,(2n-i+\frac{1}{2})_i}$$

$$\cdot \Big((x)_i\,(x+i+1)_{n-k-i-1}\,(x+n+k+1)_{n-k}$$

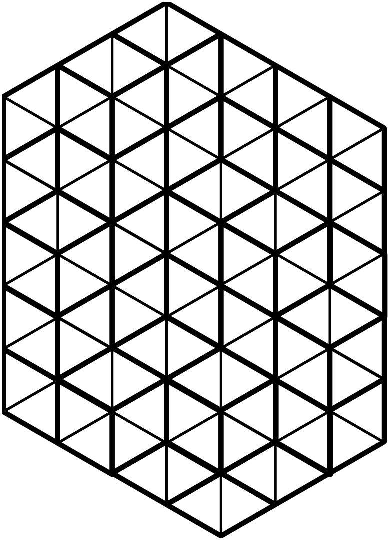
$$- (x)_{n-k}\,(x+n+k+1)_{n-k-i-1}\,(x+2n-i+1)_i \Big),$$

où le symbole de Pochhammer est défini par $(\alpha)_m := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$ *pour* $m>0$, *et* $(\alpha)_0 := 1$.

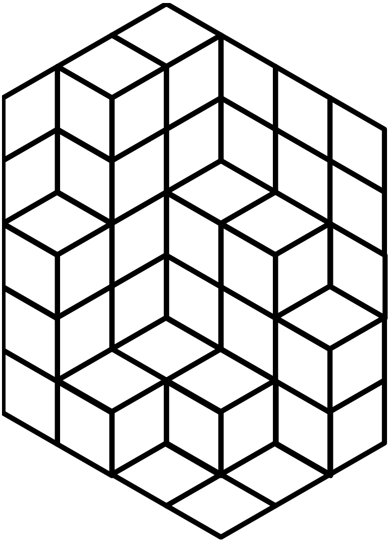
pavages en losanges

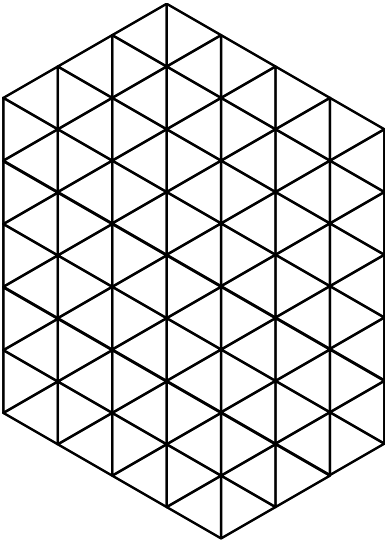


pavages en losanges

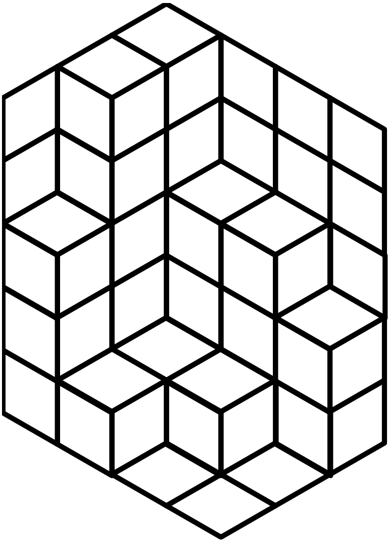


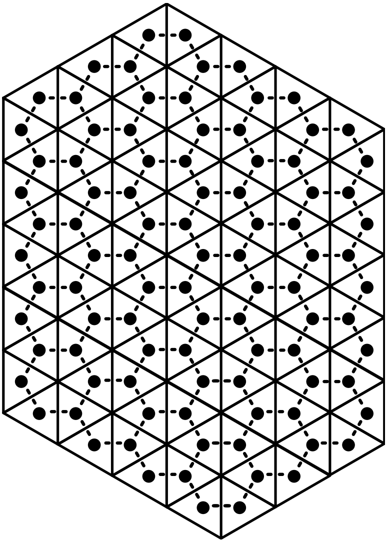
pavages en losanges — couplages parfaits



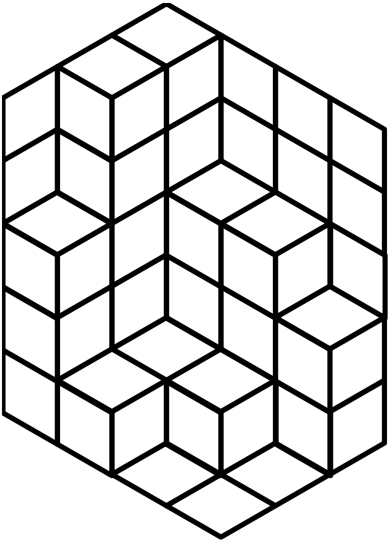


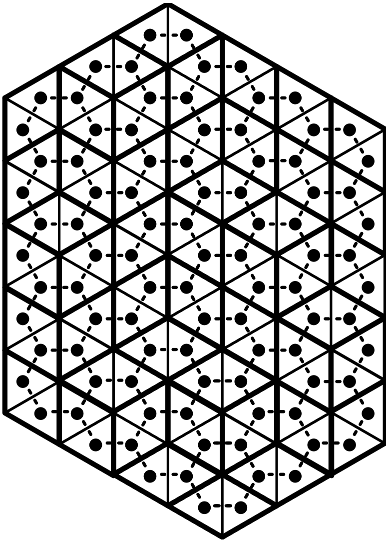
pavages en losanges — couplages parfaits



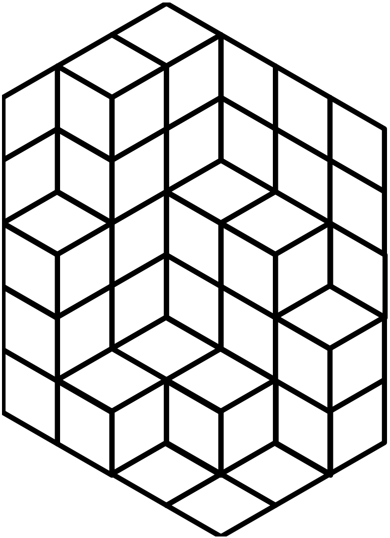


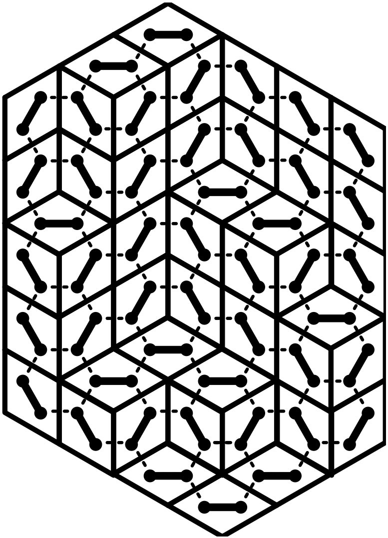
pavages en losanges — couplages parfaits



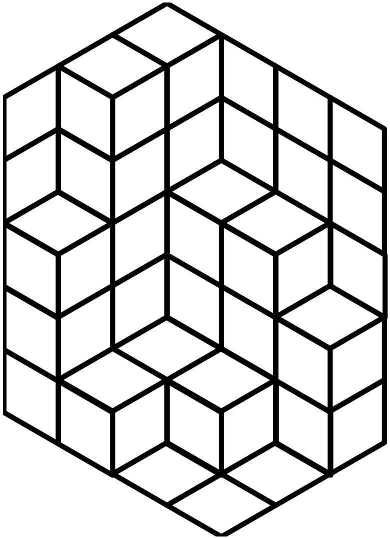


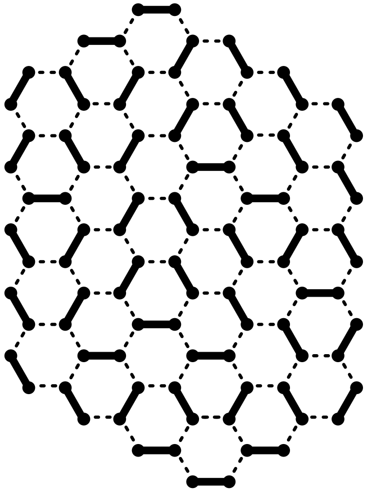
pavages en losanges — couplages parfaits





pavages en losanges — couplages parfaits

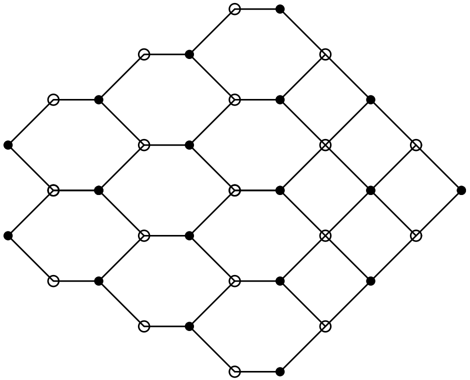




Le théorème de factorisation de Ciucu

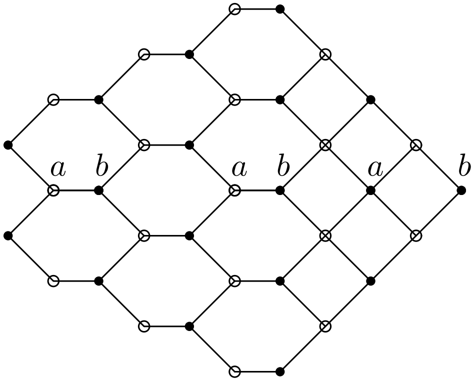
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



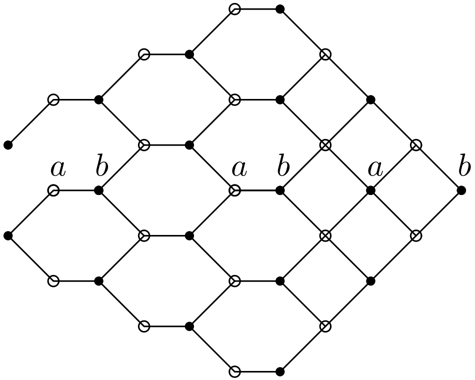
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



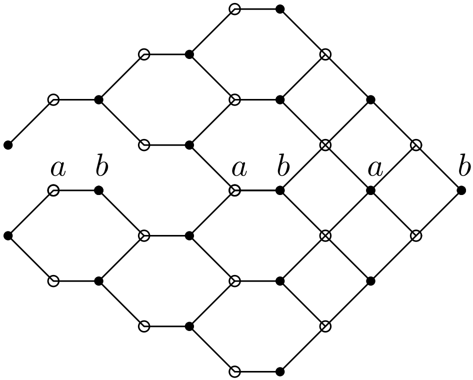
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



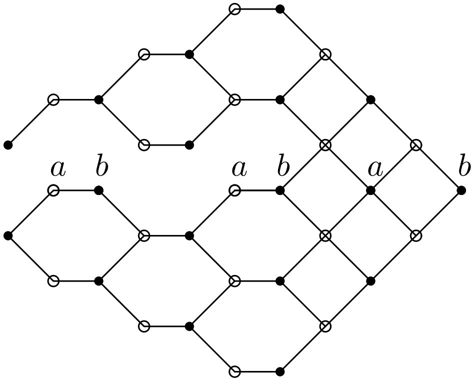
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



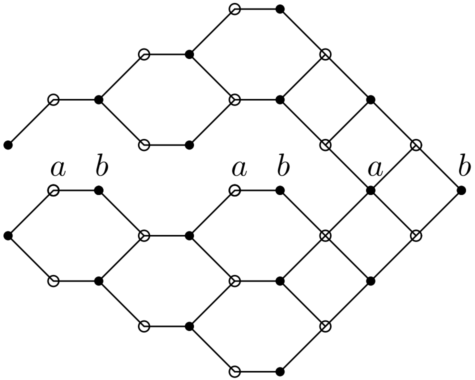
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



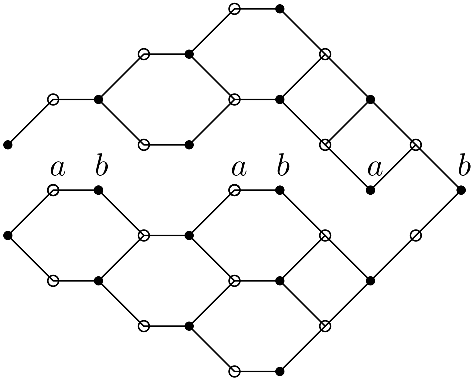
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



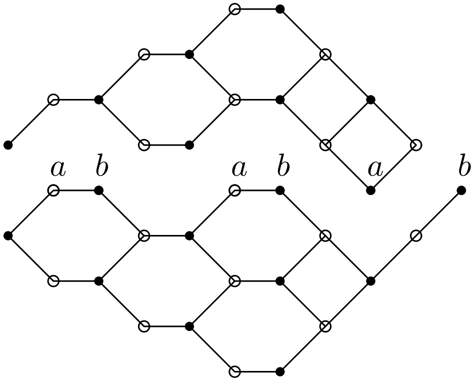
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



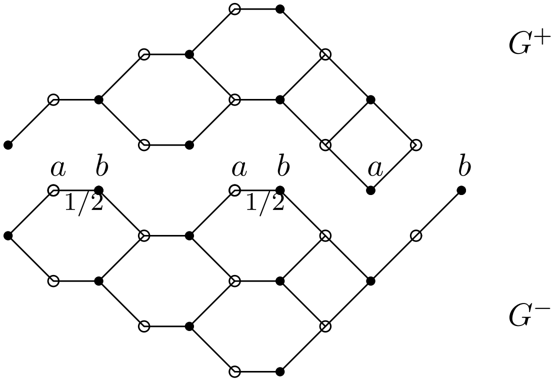
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



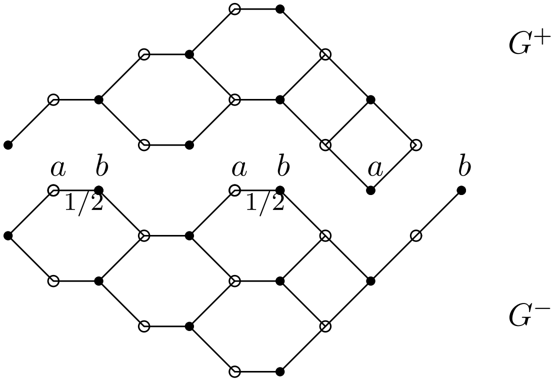
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



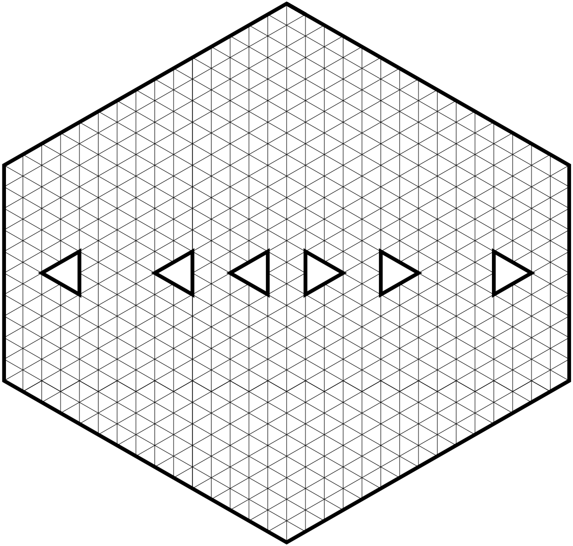
Le théorème de factorisation de Ciucu

Soit G un graphe bipartit symétrique.



Alors

$$\mathsf{M}(G) = 2^{\#(\text{arêtes sur l'axe de symétrie})} \cdot \mathsf{M}(G^+) \cdot \mathsf{M}_{1/2}(G^-).$$



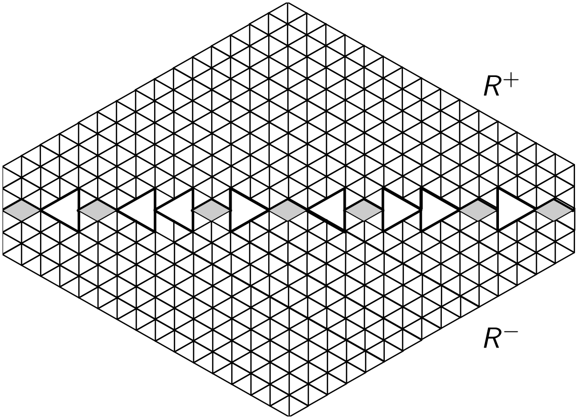
L'hexagone avec trous $H_{15,10}(2,5,7)$

Théorème (Ciucu, K.)

Pour tous entiers strictement positifs n, m, l *et tous entiers positifs* $k_1, k_2, \dots k_l$ *avec* $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_l \le n/2$*, on a*

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}\left(H_{n,2m}(k_1, k_2, \dots, k_l)\right) \\ &\qquad = \mathrm{M}^{hs}\left(H_{n,2m}(k_1, k_2, \dots, k_l)\right) \mathrm{M}^{vs}\left(H_{n,2m}(k_1, k_2, \dots, k_l)\right). \end{aligned}$$

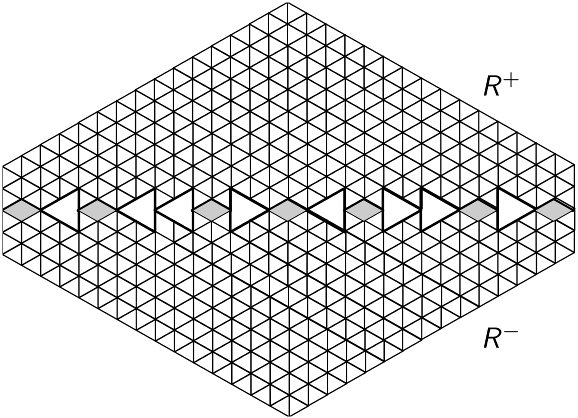
Le théorème de factorisation de Ciucu se traduit à :



on obtient

$$\mathrm{M}(R) = 2^{\#(\text{losanges sur l'axe de symétrie})} \cdot \mathrm{M}(R^+) \cdot \mathrm{M}_{1/2}(R^-).$$

Le théorème de factorisation de Ciucu se traduit à :



on obtient

$$\mathrm{M}(R) = 2^{\#(\text{losanges sur l'axe de symétrie})} \cdot \mathrm{M}(R^+) \cdot \mathrm{M}_{1/2}(R^-).$$

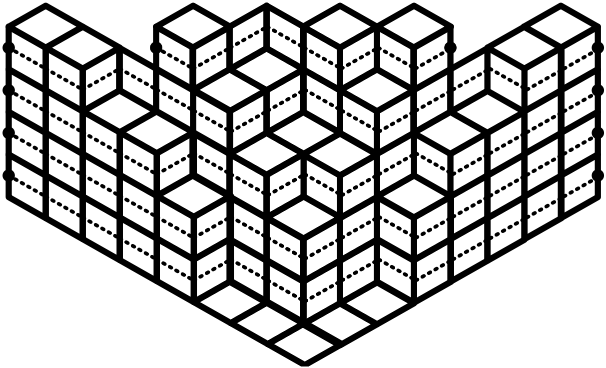
Notre but est de démontrer

$$\mathrm{M}(R) \stackrel{?}{=} \mathrm{M}^{hs}(R) \cdot \mathrm{M}^{vs}(R).$$

Ainsi, il “ne" reste à prouver “que"

$$\mathrm{M}^{vs}(R) = 2^{\#(\text{losanges sur l'axe de symétrie})} \cdot \mathrm{M}_{1/2}(R^-).$$

Premier pas. Utiliser des chemins deux-à-deux disjoints pour obtenir un déterminant pour $\mathrm{M}_{1/2}\left(H^-_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$ et un Pfaffien pour $\mathrm{M}^{vs}\left(H_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$.



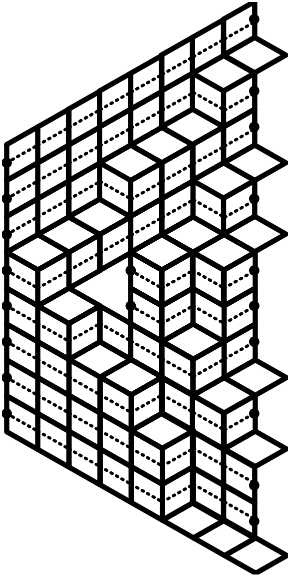
Un pavage de $H^{-}_{n,2m}(k_1, k_2, \dots, k_l)$

Par le théorème de Lindström, Gessel–Viennot sur des chemins deux-à-deux disjoints, on obtient un déterminant.

Proposition

$\mathrm{M}_{1/2}\left(H^{-}_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$ *est donné par* $\det(N)$*, où* N *est la matrice avec lignes et colonnes indexées par* $\{1,2,\dots,m,1^+,2^+,\dots,l^+\}$*, et des éléments donnés par*

$$N_{i,j}=\begin{cases}\binom{2n}{n+j-i}+\binom{2n}{n-i-j+1}, & \textit{si } 1\le i,j\le m,\\ \binom{2n-2k_t}{n-k_t-i+1}+\binom{2n-2k_t}{n-k_t-i}, & \textit{si } 1\le i\le m \textit{ et } j=t^+,\\ \binom{2n-2k_t}{n-k_t-j+1}+\binom{2n-2k_t}{n-k_t-j}, & \textit{si } i=t^+ \textit{ et } 1\le j\le m\ ,\\ \binom{2n-2k_t-2k_{\hat t}}{n-k_t-k_{\hat t}}+\binom{2n-2k_t-2k_{\hat t}}{n-k_t-k_{\hat t}-1}, & \textit{si } i=t^+,\ j=\hat t^+,\\ & \qquad \textit{et } 1\le t,\hat t\le l.\end{cases}$$



La moitié gauche d'un pavage verticalement symétrique

En utilisant la formule qui sorte du théorème de sommation de mineurs d'Ishikawa et Wakayama, on obtient :

Proposition

$\mathrm{M}^{vs}\left(H_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$ *est donné par*

$$(-1)^{\binom{l}{2}}\,\mathrm{Pf}(M),$$

où M est la matrice antisymétrique avec lignes et colonnes indexées par

$$\{-m+1,-m+2,\dots,m,1^-,2^-,\dots,l^-,1^+,2^+,\dots,l^+\},$$

et des éléments donnés par

$$M_{i,j}=\begin{cases}\sum_{r=i-j+1}^{j-i}\binom{2n}{n+r}, & si\ -m+1\le i<j\le m,\\ \sum_{r=i+1}^{-i}\binom{2n-2k_t}{n-k_t+r}, & si\ -m+1\le i\le m\ et\ j=t^-,\\ \sum_{r=i}^{-i+1}\binom{2n-2k_t}{n-k_t+r}, & si\ -m+1\le i\le m\ et\ j=t^+,\\ 0, & si\ i=t^-,\ j=\hat t^-,\ et\ 1\le t<\hat t\le l,\\ \binom{2n-2k_t-2k_{\hat t}}{n-k_t-k_{\hat t}} & \\ \quad+\binom{2n-2k_t-2k_{\hat t}}{n-k_t-k_{\hat t}+1}, & si\ i=t^-,\ j=\hat t^+,\ et\ 1\le t,\hat t\le l,\\ 0, & si\ i=t^+,\ j=\hat t^+,\ et\ 1\le t<\hat t\le l,\end{cases}$$

où les sommes doivent être interprétées selon

$$\sum_{r=M}^{N-1}\mathrm{Expr}(k)=\begin{cases}\sum_{r=M}^{N-1}\mathrm{Expr}(k) & N>M\\ 0 & N=M\\ -\sum_{k=N}^{M-1}\mathrm{Expr}(k) & N<M.\end{cases}$$

Deuxième pas.

Deuxième pas.

Lemme

Pour tout entier strictement positif m et tout entier positif l, soit A la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^t & Z \end{pmatrix},$$

où $X = (x_{j-i})_{-m+1 \le i,j \le m}$ et $Z = (z_{i,j})_{i,j \in \{1^-,\dots,l^-,1^+,\dots,l^+\}}$ sont antisymétriques, et $Y = (y_{i,j})_{-m+1 \le i \le m,\, j \in \{1^-,\dots,l^-,1^+,\dots,l^+\}}$ est une matrice de dimension $2m \times 2l$. Supposons en plus que $y_{i,t^-} = -y_{-i,t^-}$ et $y_{i,t^+} = -y_{-i+2,t^+}$, pour tout i avec $-m+1 \le i \le m$ tel que les deux membres d'une égalité sont bien définis, et $1 \le t \le l$, et que $z_{i,j} = 0$ pour tout $i,j \in \{1^-,\dots,l^-\}$. Alors

$$\operatorname{Pf}(A) = (-1)^{\binom{l}{2}} \det(B),$$

où

$$B=\begin{pmatrix}\bar X & \bar Y_1\\ \bar Y_2 & \bar Z\end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}\bar X&=(\bar x_{i,j})_{1\le i,j\le m},\\ \bar Y_1&=(y_{-i+1,j})_{1\le i\le m,\, j\in\{1^+,\dots,l^+\}},\\ \bar Y_2&=(-y_{i,j})_{i\in\{1^-,\dots,l^-\},\, 1\le j\le m},\\ \bar Z&=(z_{i,j})_{i\in\{1^-,\dots,l^-\},\, j\in\{1^+,\dots,l^+\}},\end{aligned}$$

et les éléments de $\bar X$ *sont définis par*

$$\bar x_{i,j}=x_{|j-i|+1}+x_{|j-i|+3}+\cdots+x_{i+j-1}.$$

Par le lemme, le Pfaffien pour $\mathrm{M}^{vs}\left(H_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$ peut être transformé à un déterminant, de la même taille que le déterminant que l'on a obtenu pour $\mathrm{M}_{1/2}\left(H^{-}_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$.

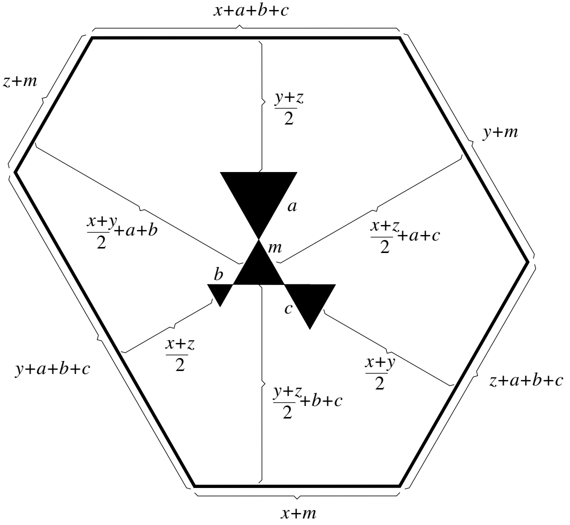
Par le lemme, le Pfaffien pour $\mathrm{M}^{vs}\left(H_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$ peut être transformé à un déterminant, de la même taille que le déterminant que l'on a obtenu pour $\mathrm{M}_{1/2}\left(H^{-}_{n,2m}(k_1,k_2,\dots,k_l)\right)$.

Troisième pas. Malheureusement, il n'est pas le même déterminant.

Par le lemme, le Pfaffien pour $\mathrm{M}^{vs}\left(H_{n,2m}(k_1, k_2, \dots, k_l)\right)$ peut être transformé à un déterminant, de la même taille que le déterminant que l'on a obtenu pour $\mathrm{M}_{1/2}\left(H^-_{n,2m}(k_1, k_2, \dots, k_l)\right)$.

Troisième pas. Malheureusement, il n'est pas le même déterminant. Pourtant, des manipulations supplémentaires de lignes et de colonnes transforment en effet un déterminant en l'autre. $\square$

La region $SC_{x,y,z}(a,b,c,m)$:



Théorème

Soient x, y, z, a, b, c et m des entiers positifs. Si x, y et z ont la même parité, alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}(SC_{x,y,z}(a,b,c,m)) &= \frac{\mathrm{H}(m)^3\ \mathrm{H}(a)\ \mathrm{H}(b)\ \mathrm{H}(c)}{\mathrm{H}(m+a)\ \mathrm{H}(m+b)\ \mathrm{H}(m+c)}\\
&\times \frac{\mathrm{H}(\frac{x+y}{2}+m+a+b)\ \mathrm{H}(\frac{x+z}{2}+m+a+c)\ \mathrm{H}(\frac{y+z}{2}+m+b+c)}{\mathrm{H}(\frac{x+y}{2}+m+c)\ \mathrm{H}(\frac{x+z}{2}+m+b)\ \mathrm{H}(\frac{y+z}{2}+m+a)}\\
&\times \frac{\mathrm{H}(\frac{x+y}{2}+c)\ \mathrm{H}(\frac{x+z}{2}+b)\ \mathrm{H}(\frac{y+z}{2}+a)}{\mathrm{H}(\frac{x+y}{2}+a+b)\ \mathrm{H}(\frac{x+z}{2}+a+c)\ \mathrm{H}(\frac{y+z}{2}+b+c)}\\
&\times \frac{\mathrm{H}(x+m+a+b+c)\,\mathrm{H}(y+m+a+b+c)}{\mathrm{H}(x+y+m+a+b+c)\,\mathrm{H}(x+z+m+a+b+c)}\\
&\times \frac{\mathrm{H}(z+m+a+b+c)\,\mathrm{H}(x+y+z+m+a+b+c)}{\mathrm{H}(y+z+m+a+b+c)}
\end{aligned}
$$

$$
\times \frac{H(\lceil \frac{x+y+z}{2}\rceil + m + a + b + c)}{H(\frac{x+y}{2} + m + a + b + c)\, H(\frac{x+z}{2} + m + a + b + c)}
$$

$$
\times \frac{H(\lfloor \frac{x+y+z}{2}\rfloor + m + a + b + c)\, H(\frac{y+z}{2} + \frac{m+a+b+c}{2})^2}{H(\frac{y+z}{2} + m + a + b + c)\, H(\frac{x+y}{2})\, H(\frac{x+z}{2})\, H(\frac{y+z}{2})}
$$

$$
\times \frac{H(\lceil \frac{x}{2}\rceil\, H(\lfloor \frac{x}{2}\rfloor)\, H(\lceil \frac{y}{2}\rceil)}{H(\lceil \frac{x}{2}\rceil + \frac{m+a+b+c}{2})\, H(\lfloor \frac{x}{2}\rfloor + \frac{m+a+b+c}{2})\, H(\lceil \frac{y}{2}\rceil + \frac{m+a+b+c}{2})}
$$

$$
\times \frac{H(\lfloor \frac{y}{2}\rfloor)\, H(\lceil \frac{z}{2}\rceil)\, H(\lfloor \frac{z}{2}\rfloor)}{H(\lfloor \frac{y}{2}\rfloor + \frac{m+a+b+c}{2})\, H(\lceil \frac{z}{2}\rceil + \frac{m+a+b+c}{2})\, H(\lfloor \frac{z}{2}\rfloor + \frac{m+a+b+c}{2})}
$$

$$
\times \frac{H(\frac{m+a+b+c}{2})^2\; H(\frac{x+y}{2} + \frac{m+a+b+c}{2})^2\; H(\frac{x+z}{2} + \frac{m+a+b+c}{2})^2}{H(\lceil \frac{x+y+z}{2}\rceil + \frac{m+a+b+c}{2})\, H(\lfloor \frac{x+y+z}{2}\rfloor + \frac{m+a+b+c}{2})},
$$

où

$$
H(n) := \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(k+1), & \textit{pour } n \textit{ un entier positif,} \\ \prod_{k=0}^{n-\frac{1}{2}} \Gamma(k+\frac{1}{2}), & \textit{pour } n \textit{ un demi-entier positif.} \end{cases}
$$