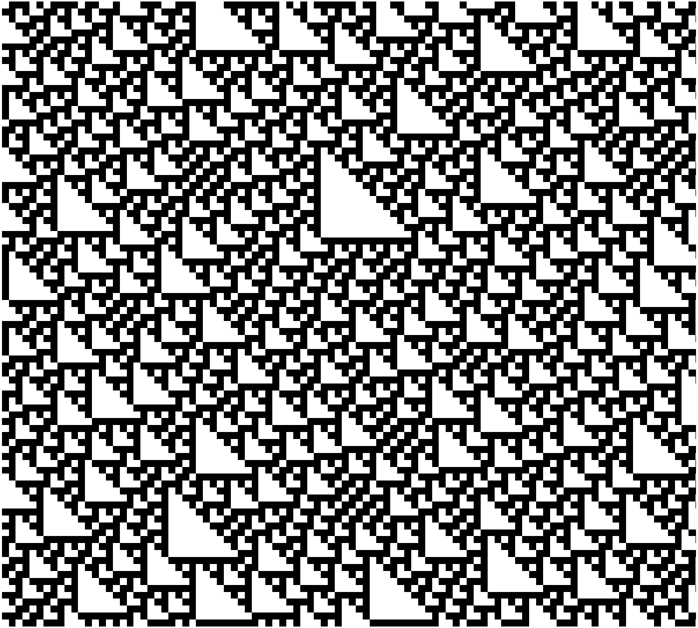
Uniformisation de l’aléa en dynamique symbolique

Benjamin Hellouin de Menibus, Ville Salo, Guillaume Theyssier

Universidad Andrés Bello & CMM, Universidad de Chile

ALEA 2016, CIRM, Marseille
7 mars 2016

Pavage de Ledrappier



$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Pavage de Ledrappier

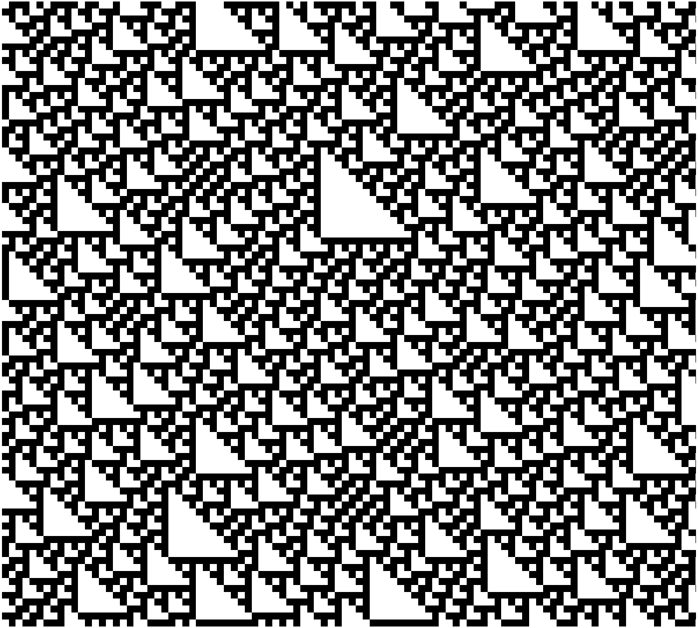
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Pavage de Ledrappier



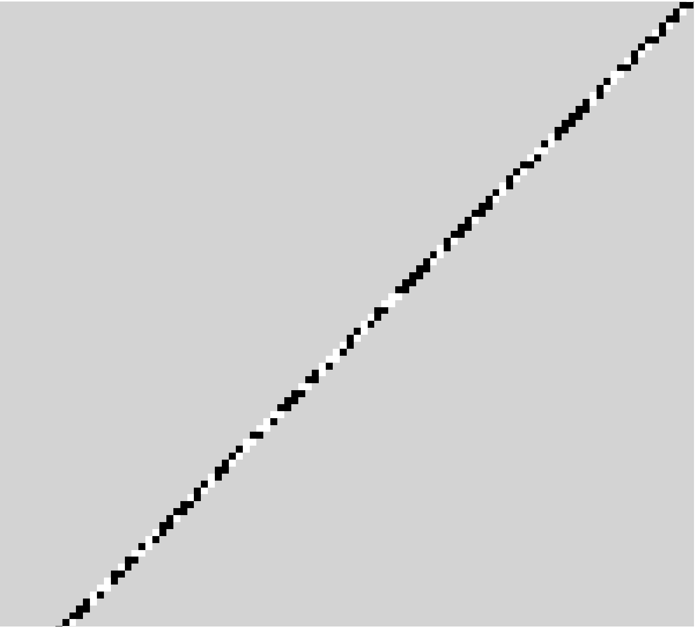
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Mesure uniforme



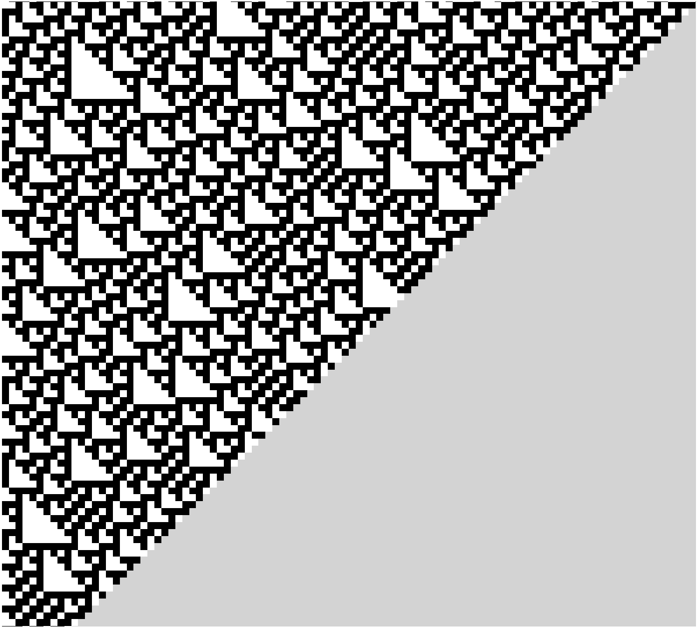
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Mesure uniforme

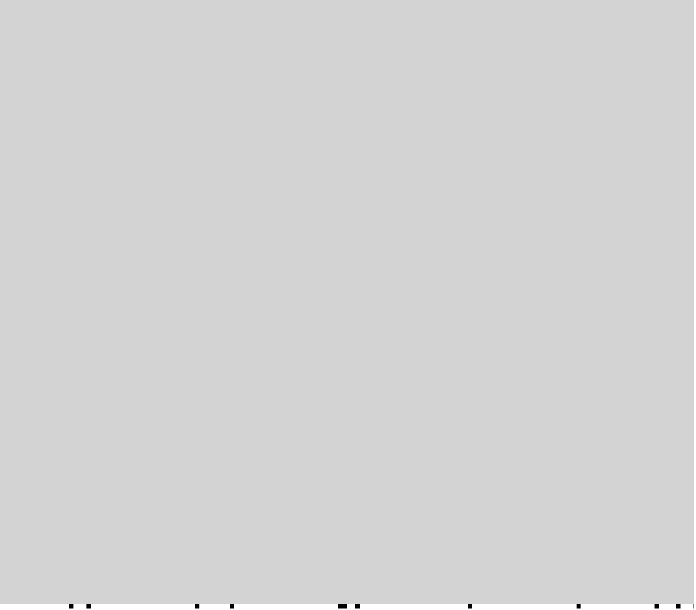


$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.



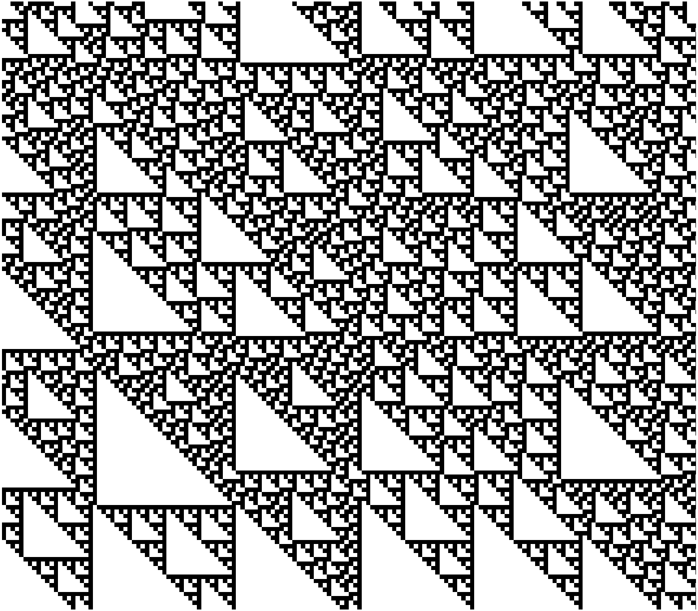
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Mesure non uniforme



$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Mesure non uniforme

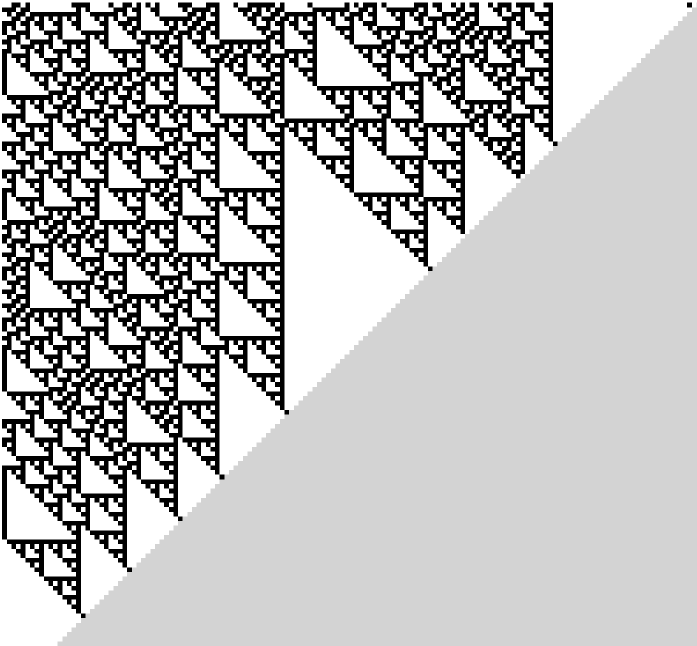
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\sum \begin{smallmatrix} \square & \\ \square & \square \end{smallmatrix} = 0$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Mesure non uniforme

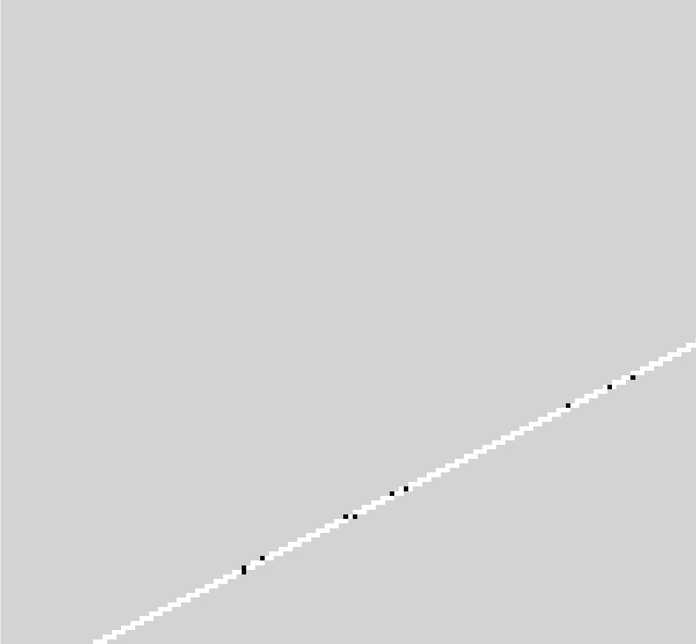


$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.



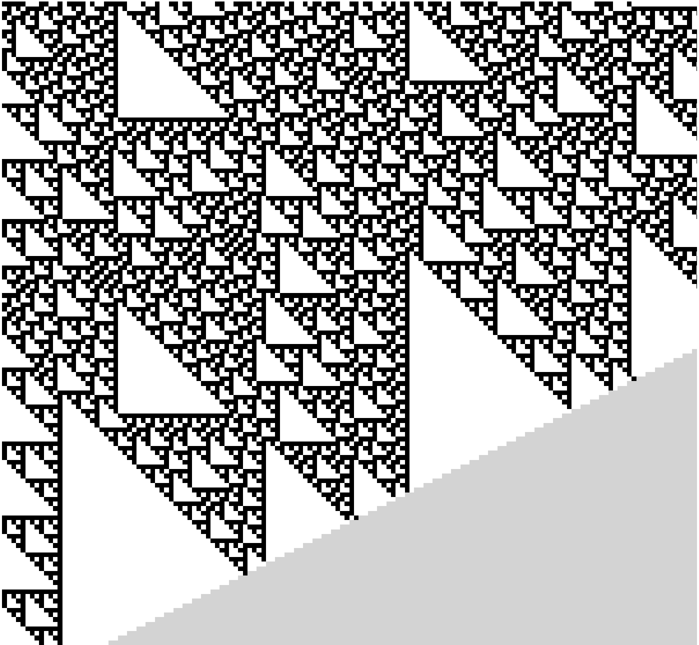
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Mesure non uniforme



$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

Courbe:

- libre;
- génératrice.

Comportements asymptotiques typiques

- La configuration initiale est tirée de manière i.i.d;
  - $\mu([u]_{i,j})$ la probabilité d'apparition d'un motif $u \in \mathcal{A}^*$ en position (i, j).

Comportements asymptotiques typiques

- La configuration initiale est tirée de manière i.i.d;
  - $\mu([u]_{i,j})$ la probabilité d'apparition d'un motif $u \in \mathcal{A}^*$ en position (i, j).

- $\sigma_{\vec{v}}$ l'action de décalage suivant le vecteur $\vec{v}$;
- $\sigma_{\vec{v}} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ s'étend en une action sur les mesures de probabilité:

$$\boxed{\sigma_{\vec{v}}\mu([u]_{i,j}) = \mu(\sigma_{\vec{v}}^{-1}[u]_{i,j}) = \mu([u]_{i-v_1,j-v_2})} \qquad \text{pour tout motif fini } u.$$

Comportements asymptotiques typiques

- La configuration initiale est tirée de manière i.i.d;
  - $\mu([u]_{i,j})$ la probabilité d'apparition d'un motif $u \in \mathcal{A}^*$ en position (i,j).

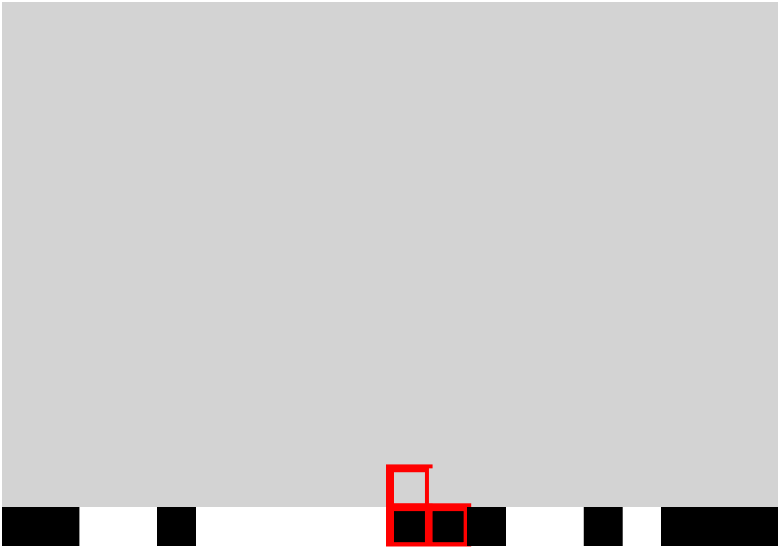
- $\sigma_{\vec{v}}$ l'action de décalage suivant le vecteur $\vec{v}$;
- $\sigma_{\vec{v}} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ s'étend en une action sur les mesures de probabilité:

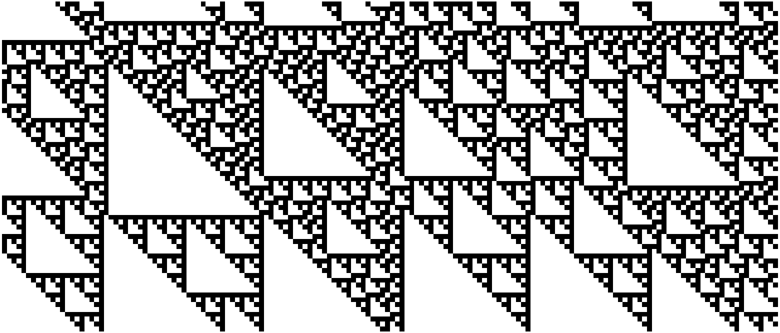
$$\boxed{\sigma_{\vec{v}}\mu([u]_{i,j}) = \mu(\sigma_{\vec{v}}^{-1}[u]_{i,j}) = \mu([u]_{i-v_1,j-v_2})} \qquad \text{pour tout motif fini } u.$$

- On s'intéresse à (aux) mesure(s) limite de la séquence $(\sigma_{\vec{v}}^t\mu)_{t\in\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\sigma_{\vec{v}}^t\mu \xrightarrow[t\to\infty]{} \nu \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in \mathcal{A}^*,\ i,j \in \mathbb{Z}^2,\ \sigma_{\vec{v}}^t\mu([u]_{i,j}) \to \nu([u]_{i,j}).}$$

Randomisation en moyenne de Cesàro



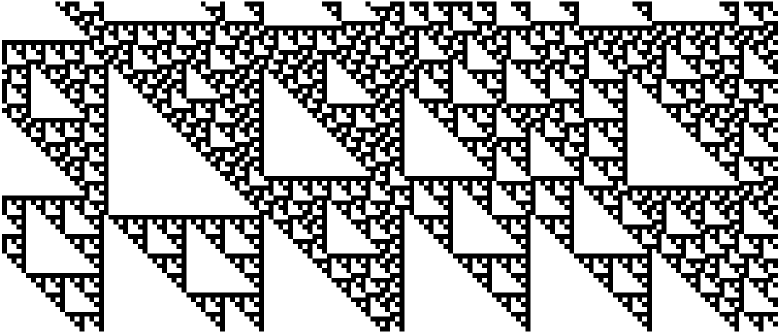


Randomisation en moyenne

$T : X \to X$ **randomise en moyenne** une classe de mesures initiales $\mathcal{M} \in \mathcal{M}(X)$ si :

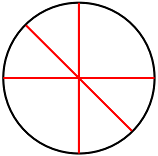
$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \qquad \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N} F_*^t \mu \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

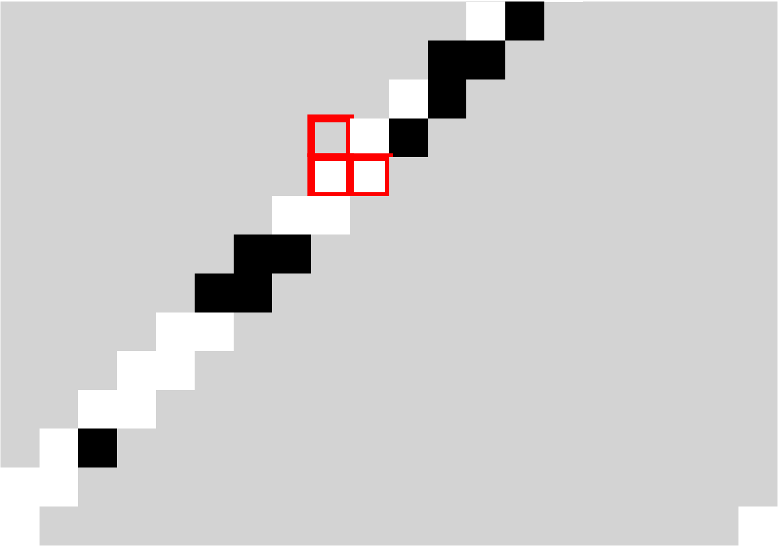
où λ est la mesure uniforme.

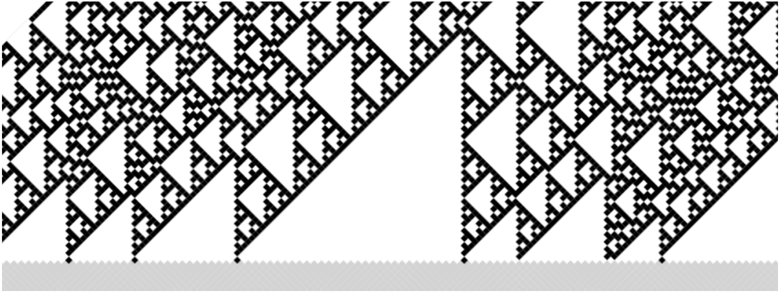


Théorème [Lind 1984]

Soit Σ le pavage de Ledrappier. Quand la droite dirigée par $\binom{1}{0}$ est tirée aléatoirement de manière i.i.d., alors $\sigma_{\vec{v}} : \Sigma \to \Sigma$ randomise en moyenne de Césàro dés que $\vec{v} \cdot \binom{0}{1} > 0$.







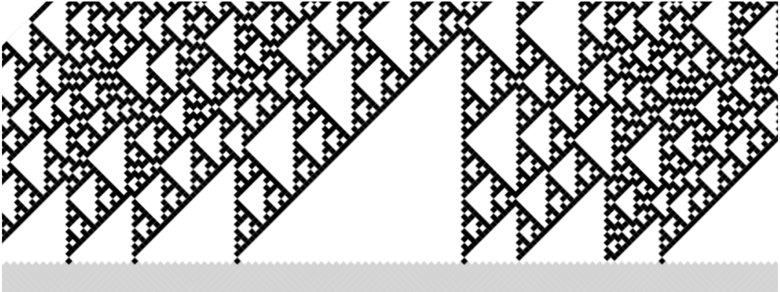
Randomisation directe

$T : X \to X$ **randomise** une classe de mesures initiales $\mathcal{M} \in \mathcal{M}(X)$ si :

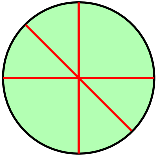
$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \qquad F_*^t \mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

où λ est la mesure uniforme.

Randomisation directe

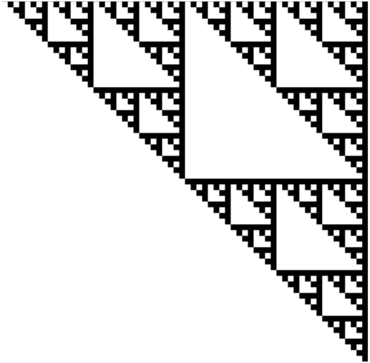


Théorème [H., Salo, Theyssier]



Soit $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{1}{-1}$ et $\vec{v}$ un vecteur non colinéaire à $\vec{u}$. Quand la droite dirigée par $\vec{u}$ est tirée de manière i.i.d., alors $\sigma_{\vec{v}}$ randomise directement.

Randomisation en moyenne de Cesàro

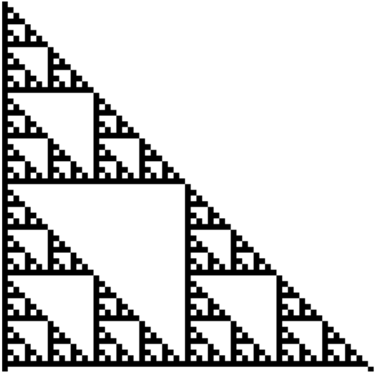


Fonction de dépendance
$(\square = 0, \blacksquare = Id)$

$$\vec{u} = \binom{1}{0}$$

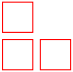
$$\sum \begin{array}{cc} \boxed{} & \\ \boxed{} & \boxed{} \end{array} = 0$$

Randomisation en moyenne de Cesàro



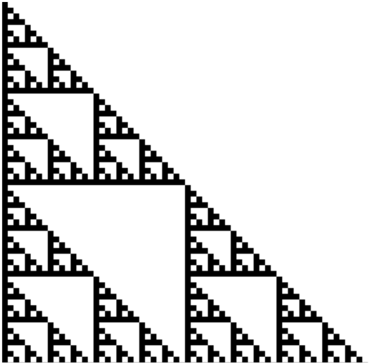
Fonction de dépendance
($\square = 0, \blacksquare = Id$)

$$\vec{u} = \binom{1}{0}$$

$\sum$  $= 0$

- $x_{0,2^n} = x_{0,0} + x_{2^n,0}$
- $\forall g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \sigma_{\vec{v}}^{2^n} \mu[g] \nrightarrow \frac{1}{2}$

Randomisation en moyenne de Cesàro

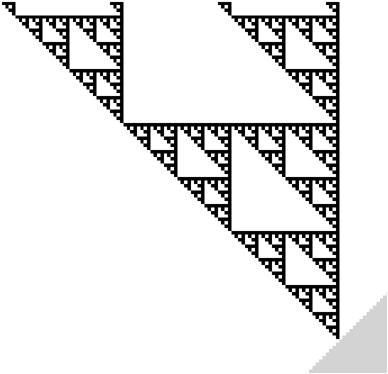


Fonction de dépendance
$(\square = 0, \blacksquare = Id)$

$$\vec{u} = \binom{1}{0}$$

$$\sum \begin{matrix} \square & \\ \square & \square \end{matrix} = 0$$

- $x_{0,2^n} = x_{0,0} + x_{2^n,0}$
- $\forall g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \sigma_{\vec{v}}^{2^n} \mu[g] \nrightarrow \frac{1}{2}$

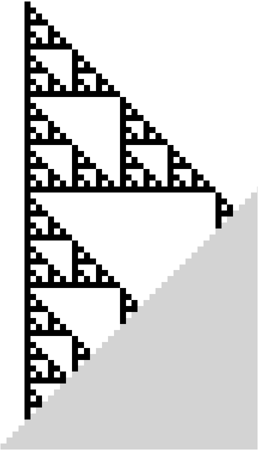


Fonction de dépendance
$(\square = 0, \blacksquare = Id)$

$$\vec{u} = \binom{1}{1}$$

$$\sum \begin{array}{ll} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

Randomisation directe



Fonction de dépendance
($\square = 0, \blacksquare = Id$)

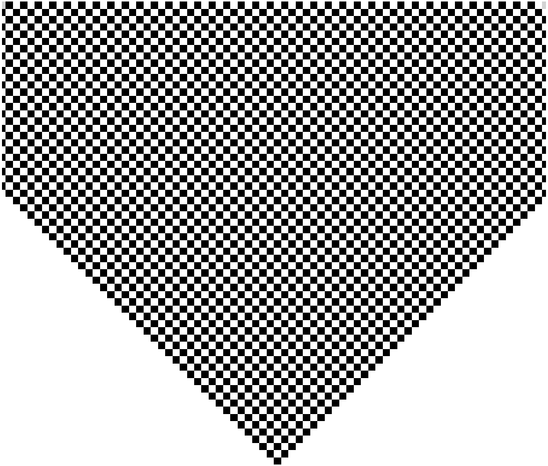
$$\vec{u} = \binom{1}{1}$$

$$\sum \begin{array}{ll} \square & \\ \square & \square \end{array} = 0$$

$$x_{0,t} = \underset{\to\infty}{\underleftrightarrow{x_{i_0,i_0} + x_{i_1,i_1} + \cdots + x_{i_n,i_n}}}$$

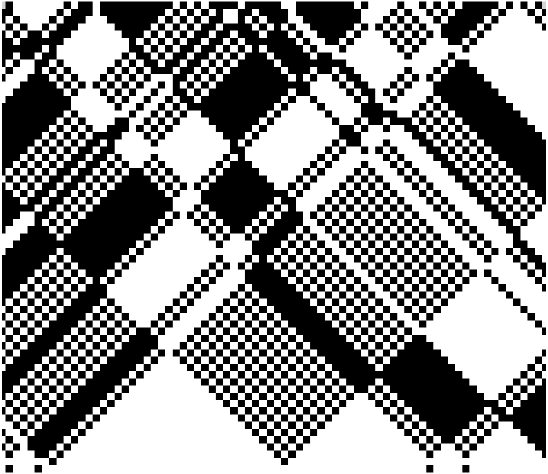
$$\forall g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \sigma_{\vec{v}}^{t}\mu([g]) \to \frac{1}{2}$$

Une autre forme



$$\sum \begin{array}{ccc} & \square & \\ \square & & \square \\ & \square & \end{array} = 0$$

Une autre forme

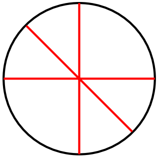


$$\sum \begin{array}{ccc} & \square & \\ \square & & \square \\ & \square & \end{array} = 0$$

Travail en cours [H., Salo, Theyssier]

Le pavage de Ledrappier randomise directement les mesures i.i.d. tirées suivant des pentes rationnelles différentes de 0, ∞ et $-\frac{1}{2}$.

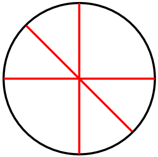
- Lien entre randomisation et forme annulatrice ?



Travail en cours [H., Salo, Theyssier]

Le pavage de Ledrappier randomise directement les mesures i.i.d. tirées suivant des pentes rationnelles différentes de 0, ∞ et $-\frac{1}{2}$.

- Lien entre randomisation et forme annulatrice ?
- Peut-on traiter les candidats sans structure algébrique apparente ?



Travail en cours [H., Salo, Theyssier]

Le pavage de Ledrappier randomise directement les mesures i.i.d. tirées suivant des pentes rationnelles différentes de 0, ∞ et $-\frac{1}{2}$.

- Lien entre randomisation et forme annulatrice ?
- Peut-on traiter les candidats sans structure algébrique apparente ?
- Quelle propriété est à l'origine de ces phénomènes ? (dynamique, algébrique ?)