Introduction aux processus de fragmentation

$c \geq 0$ et ν mesure de dislocation sur $\mathcal{S}^{\downarrow} = \{(s_i) : s_1 \geq s_2 \geq \ldots ... \geq 0 : \sum_{i \geq 1} s_i \leq 1\}$

- $\mu_c = c \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\varepsilon_n}$ où ε_n partition de $\mathbb{N}$ en 2 blocs ($\neq \varnothing$) : $\{n\}$ et $\mathbb{N} \backslash \{n\}$ c : coeff. érosion.
- $\mu_\nu(d\pi) = \int_{\mathcal{S}^{\downarrow}} \mu_{\mathbf{s}}(d\pi)\nu(\mathrm{d}\mathbf{s})$ où $\mu_{\mathbf{s}}$ est la loi de la boîte de peinture associée à la suite **s**

Construction d'une fragmentation homogène ($\alpha = 0$) de paramètre $\kappa = \mu_c + \mu_\nu$:

$\mathrm{M} = \sum_i \delta_{(t_i, k_i, \Delta_i)}$ mesure de Poisson sur $(0, \infty) \times \mathbb{N} \times \mathcal{S}^{\downarrow}$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \# \otimes \kappa$

Principe : au temps t_i le bloc n$^\circ k_i$ se fragmente suivant Δ_i.

Problème : les blocs peuvent se fragmenter "tout le temps".

Introduction aux processus de fragmentation

$c \geq 0$ et ν mesure de dislocation sur $\mathcal{S}^{\downarrow} = \{(s_i) : s_1 \geq s_2 \geq \ldots\ldots \geq 0 : \sum_{i\geq 1} s_i \leq 1\}$

- $\mu_c = c \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\varepsilon_n}$ où ε_n partition de $\mathbb{N}$ en 2 blocs ($\neq \varnothing$) : $\{n\}$ et $\mathbb{N}\backslash\{n\}$ c : coeff. érosion.
- $\mu_\nu(d\pi) = \int_{\mathcal{S}^{\downarrow}} \mu_{\mathbf{s}}(d\pi)\nu(\mathrm{d}\mathbf{s})$ où $\mu_{\mathbf{s}}$ est la loi de la boîte de peinture associée à la suite **s**

Construction d'une fragmentation homogène ($\alpha = 0$) de paramètre $\kappa = \mu_c + \mu_\nu$:

$\mathrm{M} = \sum_i \delta_{(t_i, k_i, \Delta_i)}$ mesure de Poisson sur $(0, \infty) \times \mathbb{N} \times \mathcal{S}^{\downarrow}$ de mesure d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \# \otimes \kappa$

Principe : au temps t_i le bloc n$^\circ k_i$ se fragmente suivant Δ_i.

Problème : les blocs peuvent se fragmenter "tout le temps".

Donc on commence par se restreindre à $[n] = \{1, \ldots, n\}$ (n fixé). Puisque $\kappa(\mathcal{P}_n^*) < \infty$, on peut re-indexer les atomes

$$(t_i, k_i, \Delta_i) \quad \text{tel que} \quad k_i \leq n,\ \Delta_i \cap [n] \neq [n]$$

en $\left(t_i^{(n)}, k_i^{(n)}, \Delta_i^{(n)}\right)_{i\geq 1}$ de sorte que $0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots$.

Introduction aux processus de fragmentation

Construction de $\Pi^{(n)}(t), t \geq 0$:

- $\Pi^{(n)}(0) = [n]$
- $\Pi^{(n)}$ est constant sur les intervalles de temps $\left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right[$
- $\left.\begin{array}{l}\text{au temps } t_i^{(n)}\text{, le bloc n}^\circ k_i^{(n)} \text{ de } \Pi^{(n)}(t_i^{(n)}-) \text{ se fragmente suivant } \Delta_i^{(n)} \\ \text{les autres blocs restent inchangés}\end{array}\right\} \to \Pi^{(n)}(t_i^{(n)})$

Ex. : si $\Pi^{(6)}(t_i^{(6)}-) = \{\{1,6\},\{2,3,4\},\{5\}\}$, $\quad k_i^{(6)} = 2$, $\quad \Delta_i^{(n)} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$ alors

$$\Pi^{(6)}(t_i^{(6)}) = \{\{1,6\},\{2,3\}\{4\},\{5\}\}$$

Introduction aux processus de fragmentation

Construction de $\Pi^{(n)}(t), t \geq 0$:

- $\Pi^{(n)}(0) = [n]$
- $\Pi^{(n)}$ est constant sur les intervalles de temps $\left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right[$
- $\left.\begin{array}{l}\text{au temps } t_i^{(n)}\text{, le bloc n}^\circ k_i^{(n)} \text{ de } \Pi^{(n)}(t_i^{(n)}-) \text{ se fragmente suivant } \Delta_i^{(n)} \\ \text{les autres blocs restent inchangés}\end{array}\right\} \to \Pi^{(n)}(t_i^{(n)})$

Ex. : si $\Pi^{(6)}(t_i^{(6)}-) = \{\{1,6\},\{2,3,4\},\{5\}\}, \quad k_i^{(6)} = 2, \quad \Delta_i^{(n)} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$ alors

$$\Pi^{(6)}(t_i^{(6)}) = \{\{1,6\},\{2,3\}\{4\},\{5\}\}$$

Consistance : $\Pi^{(n+1)}(t)|_{[n]} = \Pi^{(n)}(t), \forall t \geq 0.$

On pose

$$\Pi_i(t) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_i^{(n)}(t), \quad \forall i$$

Déf. Le processus Π est un processus de fragmentation de paramètres 0, c, ν.

Il est échangeable, et p.s. $\Pi(t)$ a des fréquences asymptotiques pour tout t.

$\alpha \in \mathbb{R}$, Π processus de fragmentation $(0, c, \nu)$.

$\Pi_{(i)}(t)$: bloc de Π contenant i au temps t, $|\Pi_{(i)}(t)|$ sa fréquence asymptotique.

Changement de temps :

$$T_i(t) = \inf\left\{u \geq 0 : \int_0^u |\Pi_{(i)}(r)|^{-\alpha} \mathrm{d}r > t\right\}.$$

Nouvelle partition :

$$\Pi_{(i)}^{(\alpha)}(t) = \Pi_{(i)}\left(T_i(t)\right), \quad i \in \mathbb{N}, t \geq 0$$

Déf. Le processus $\Pi^{(\alpha)}$ est un processus de fragmentation de paramètres α, c, ν.

Il est échangeable, p.s. $\Pi^{(\alpha)}(t)$ a des fréquences asymptotiques pour tout t.

$\alpha \in \mathbb{R}$, Π processus de fragmentation $(0, c, \nu)$.

$\Pi_{(i)}(t)$: bloc de Π contenant i au temps t, $|\Pi_{(i)}(t)|$ sa fréquence asymptotique.

Changement de temps :

$$T_i(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |\Pi_{(i)}(r)|^{-\alpha} \mathrm{d}r > t \right\}.$$

Nouvelle partition :

$$\Pi_{(i)}^{(\alpha)}(t) = \Pi_{(i)}\left(T_i(t)\right), \quad i \in \mathbb{N}, t \geq 0$$

<u>Déf.</u> Le processus $\Pi^{(\alpha)}$ est un processus de fragmentation de paramètres α, c, ν.

Il est échangeable, p.s. $\Pi^{(\alpha)}(t)$ a des fréquences asymptotiques pour tout t.

<u>Processus de fréquences asymptotiques</u> (=masses) :

On note $F(t)$ la suite des fréq. asymptotiques de $\Pi^{(\alpha)}(t)$, rangées par ordre $\downarrow$.

<u>Déf.</u> F est un processus de fragmentation de paramètres α, c, ν, à valeurs dans $\mathcal{S}^{\downarrow}$.

$\Pi^{(\alpha)}$ vérifie les propriétés de branchement et auto-similarité : $\forall s, t \geq 0$, sachant que $\Pi^{(\alpha)}(t) = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$, la partition $\Pi^{(\alpha)}(t+s)$ a même loi que la partition dont les blocs sont ceux de

$$\pi_i \cap \Pi^{(i)}(|\pi_i|^\alpha s), \quad i \geq 1,$$

où les $\Pi^{(i)}$ sont i.i.d., de même loi que $\Pi^{(\alpha)}$.

On a construit ainsi tous les processus markoviens, échangeables, vérifiant cette propriété de branchement.