Fonction de corrélation par arête dans le modèle à 8 sommets sous la contrainte $a + c = b + d$

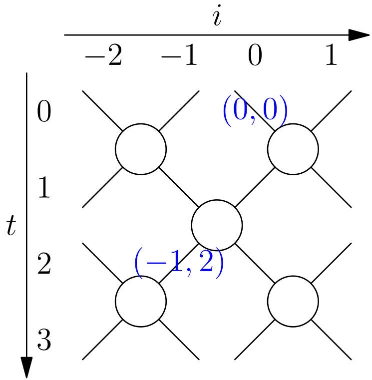
Jérôme Casse

École des Mines de Nancy
Insitut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

ALÉA 2016
9 mars 2016

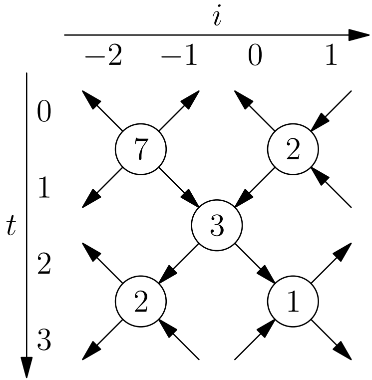
Modèle à 16 sommets

- Le graphe $K_N = (V_N, E_N)$.
  V_N, l'ensemble des sommets.
  E_N, l'ensemble des arêtes.
  Numérotation des arêtes (i, t).



Modèle à 16 sommets

- Le graphe $K_N = (V_N, E_N)$.
- Une orientation $C \in \Omega_N$ des arêtes de K_N.
  $16 = 2^4$ types de sommets.



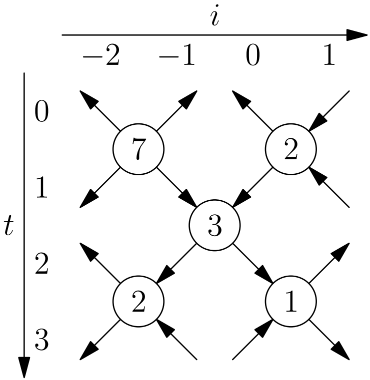
Modèle à 16 sommets

- Le graphe $K_N = (V_N, E_N)$.
- Une orientation $C \in \Omega_N$ des arêtes de K_N.
  $16 = 2^4$ types de sommets.
- Un poids global :

$$W(C) = \prod_{v \in V_N} w_{\text{type}(v)} = \prod_{i=1}^{16} w_i^{n_i(C)}.$$

où $n_i(C)$ est le nombre de sommets de type i dans C.

  - Dans l'exemple : $W(C) = w_1 w_2^2 w_3 w_7$



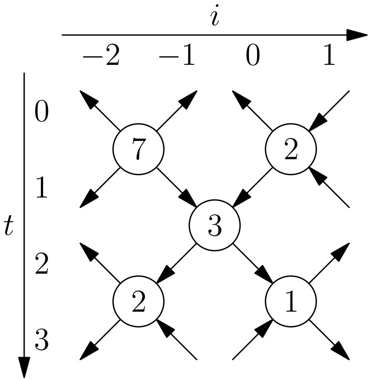
Modèle à 16 sommets

- Le graphe $K_N = (V_N, E_N)$.
- Une orientation $C \in \Omega_N$ des arêtes de K_N.
- Un poids global :

$$W(C) = \prod_{v \in V_N} w_{\text{type}(v)} = \prod_{i=1}^{16} w_i^{n_i(C)}.$$

- Une loi de probabilité sur Ω_N :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{W(C)}{\sum_{C' \in \Omega_N} W(C')}$$



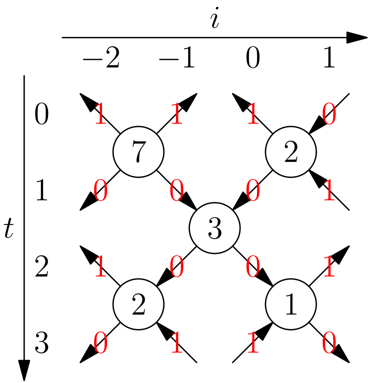
Modèle à 16 sommets

- Le graphe $K_N = (V_N, E_N)$.
- Une orientation $C \in \Omega_N$ des arêtes de K_N.
- Un poids global :

$$W(C) = \prod_{v \in V_N} w_{\text{type}(v)} = \prod_{i=1}^{16} w_i^{n_i(C)}.$$

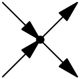
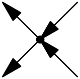
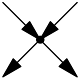
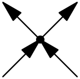
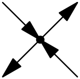
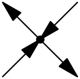
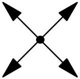
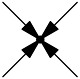
- Une loi de probabilité sur Ω_N :
- État d'une arête (i,t) :

$$e(i,t) = \begin{cases} 0 & \text{si dirigée vers le bas,} \\ 1 & \text{si dirigée vers le haut.} \end{cases}$$



Modèle à 8 sommets

- Seulement, les orientations avec 0, 2 ou 4 arêtes entrantes en chaque sommet.

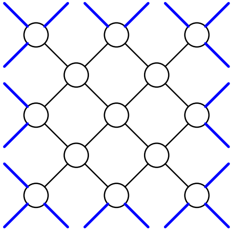
configurations	 ou 	 ou 	 ou 	 ou 	8 autres
types	1,2	3,4	5,6	7,8	9 à 16
poids	a	b	c	d	0

- Si $d = 0$, alors modèle à 6 sommets ou modèle de la glace en 2D [Pauling (1935)].

Conditions de bord

Parfois, on veut des contraintes sur les arêtes externes (i.e. restriction à des sous-ensembles de Ω_N) :

- Condition de bord libre : pas de contrainte.



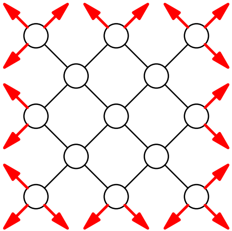
$$\mathbb{P}(C) = \frac{W(C)}{\sum_{C'} W(C')}$$

- Condition de bord imposée :
- Condition de bord aléatoire :

Conditions de bord

Parfois, on veut des contraintes sur les arêtes externes (i.e. restriction à des sous-ensembles de Ω_N) :

- Condition de bord libre : pas de contrainte.
- Condition de bord imposée :



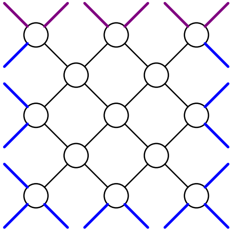
$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{W(C)\mathbf{1}_{\{C\in\Omega_{N,B}\}}}{\sum_{C'} W(C')\mathbf{1}_{\{C'\in\Omega_{N,B}\}}}$$

- Condition de bord aléatoire :

Conditions de bord

Parfois, on veut des contraintes sur les arêtes externes (i.e. restriction à des sous-ensembles de Ω_N) :

- Condition de bord libre : pas de contrainte.
- Condition de bord imposée :
- Condition de bord aléatoire :



$$\mathbb{P}\left(C\right) = \mathbb{P}_{\text{bord}}(B)\mathbb{P}\left(C|B\right).$$

Ici, on considère $e(i,0)$ sont i.i.d.

Question

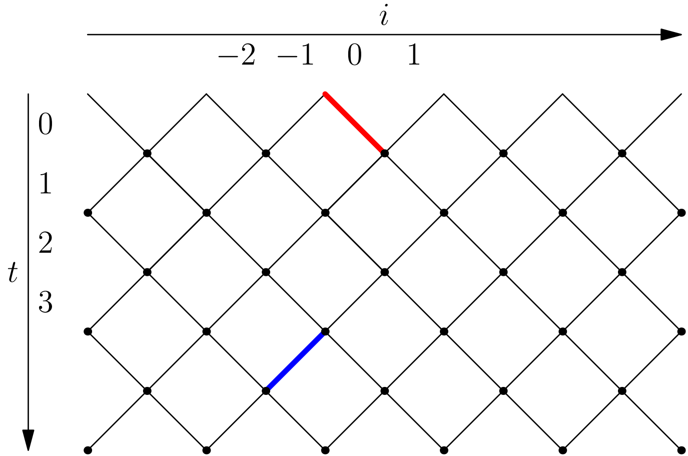
- Caractéristiques à grande échelle (quand $N \to \infty$) du modèle à 8 sommets en fonction des paramètres locaux (a, b, c, d).

Question

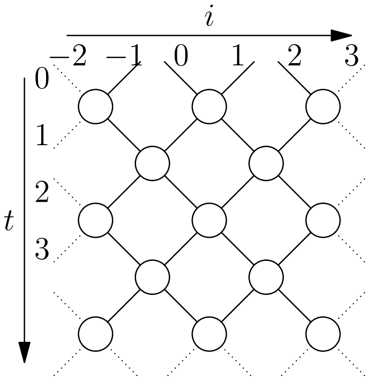
- Caractéristiques à grande échelle (quand $N \to \infty$) du modèle à 8 sommets en fonction des paramètres locaux (a, b, c, d).
- [Baxter (1972/1982)] : calcul et étude de la fonction de partition $Z = \sum_C W(C)$.

Objectif

- Comment deux arêtes distantes sont-elles corrélées ?
- $\mathbb{P}\left(\searrow, \nearrow\right), \mathbb{P}\left(\nwarrow, \nearrow\right), \mathbb{P}\left(\searrow, \swarrow\right), \mathbb{P}\left(\nwarrow, \swarrow\right)$?

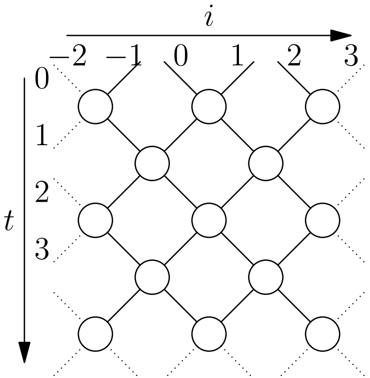


- Le graphe $K_\infty = (V_\infty, E_\infty)$.
- Condition de bord aléatoire $PM(q)$:
  $(e(i,0) : i \in \mathbb{Z})$ sont i.i.d.
  Bernoulli(q) :
  $\mathbb{P}(e(0,0) = 1) = q$ et
  $\mathbb{P}(e(0,0) = 0) = 1 - q$.



Limite K_∞ des graphes K_N quand $N \to \infty$

- Le graphe $K_\infty = (V_\infty, E_\infty)$.
- Condition de bord aléatoire $PM(q)$: $(e(i,0) : i \in \mathbb{Z})$ sont i.i.d. Bernoulli(q) :
  $\mathbb{P}(e(0,0) = 1) = q$ et
  $\mathbb{P}(e(0,0) = 0) = 1 - q$.
- La loi $\mathbb{P}$ sur les orientations de K_∞ pour le modèle à 8 sommets est compliqué à définir dans le cas général.
- Si $a + c = b + d$ et condition de bord $PM(1/2)$, on peut l'obtenir via un système de particules en interaction.



Pourquoi la condition de bord $PM(1/2)$?

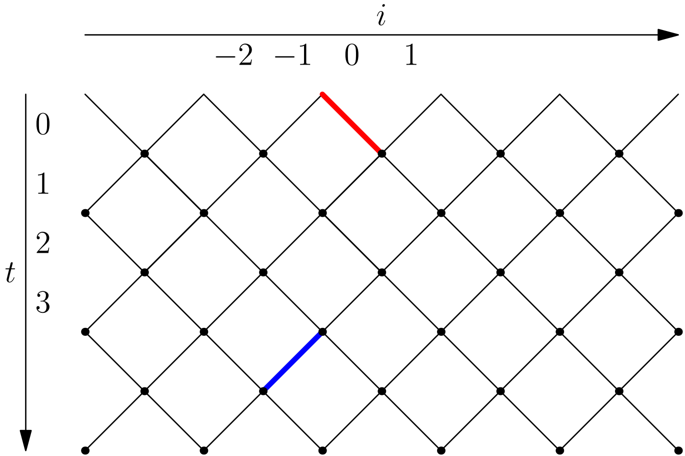
Proposition (C. 2016)

Soit $C = (e(i,t) : i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}) \sim \mathbb{P}$, *la loi du modèle à 8 sommets sur* K_∞ *avec* $a + c = b + d$ *et de condition de bord* $PM(1/2)$. *Alors, pour tout* t,

$$(e(i,t) : i \in \mathbb{Z}) \sim PM(1/2).$$

- Toutes les lignes $(e(i,t) : i \in \mathbb{Z})$ ont la même loi marginale, la loi $PM(1/2)$.
- Attention : elles ne sont cependant pas indépendantes entre elles.

Objectif



Fonction corrélation

Définition

Soit (i,t) une arête de K_∞. La fonction de corrélation entre les arêtes $(0,0)$ et (i,t) est

$$\begin{aligned} C((i,t)) &= \frac{\mathrm{Cov}(e(0,0), e(i,t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(e(0,0))}\sqrt{\mathrm{Var}(e(i,t))}} \\ &= 4(E\left[e(0,0)e(i,t)\right] - E\left[e(0,0)\right]E\left[e(i,t)\right]) \end{aligned}$$

- On va la calculer de manière exacte dans le cas où $a+c=b+d$ (à voir comme une condition d'intégrabilité en physique) et pour la condition de bord $PM(1/2)$.

Fonction de corrélation du modèle à 6 sommets

Théorème ([Kandel, Domany et Nienhuis (1990)])

Pour tout $q \in [0,1]$, dans le modèle à 6 sommets $(d = 0)$ sur K_∞ avec $a + c = b$ et condition de bord $PM(q)$,

$$C(i,2t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{2t}} \binom{2t-1}{(2t-i-\Delta(i))/2} & \text{si } 2t \geq i + \Delta(i), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $\Delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ 2 & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$

De plus, pour tout i, quand $t \to \infty$,

$$C(i,2t) = \Theta\left(t^{-1/2}\right).$$

Résultat principal

Théorème (C. 2016)

Pour le modèle à 8 sommets sur K_∞ avec $a+c=b+d$ et condition de bord $PM(1/2)$,

- *si $i+t$ est impair,*

$$C(i,t) = (-1)^{t+1} D \sum_{k=0}^{\frac{t-1-|i|}{2}} (-1)^k \binom{t-1-k}{k,\ \frac{t-1+i}{2}-k,\ \frac{t-1-i}{2}-k} \Delta^{t-1-2k} P^k$$

- *si $i+t$ est pair, 3 formules similaires suivant si $i<0$, si $i=0$ ou si $i>0$.*

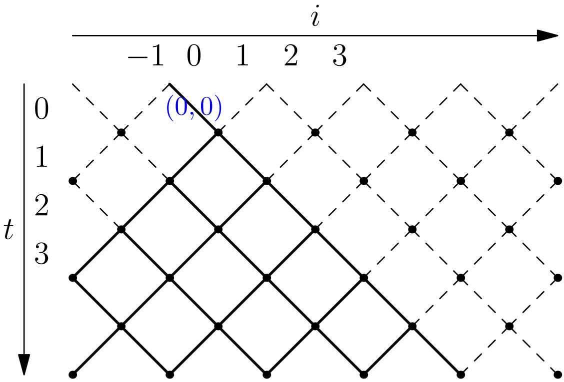
où

$$p = \frac{a}{a+c}\ ;\ r = \frac{b}{b+d}\ ;$$

$$\Delta = 1-(p+r)\ ;\ D = r-p\ ;\ P = (1-2p)(1-2r).$$

Résultat principal : quelques cas particuliers

- Cône d'influence : si ($i \geq 0$ et $t \leq i-1$) ou ($i \leq -1$ et $t \leq -i$), $C(i,t) = 0$.



L'arête $(0,0)$ n'a d'influence que sur les arêtes en trait plein.

Asymptotique

Théorème (C. 2016)

Pour le modèle à 8 sommets sur K_∞ avec $a + c = b + d$ et condition de bord $PM(1/2)$, on a, pour tout i :

- *si $a = d$ et $b = c$, pour tout t,*

$$C(i,t) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq 0, \\ (1-2p)^t & si\ i = 0. \end{cases}$$

- *sinon, quand $t \to \infty$,*

$$C(i,t) = O\left(\frac{\lambda(p,r)^t}{\sqrt{t}}\right)$$

avec

$$\lambda(p,r) = \max\left(|1-2p|, |1-2r|\right).$$

Rappel : résultat principal

Théorème (C. 2016)

Pour le modèle à 8 sommets sur K_∞ avec $a+c=b+d$ et condition de bord $PM(1/2)$,

- *si $i+t$ est impair,*

$$C(i,t) = (-1)^{t+1} D \sum_{k=0}^{\frac{t-1-|i|}{2}} (-1)^k \binom{t-1-k}{k,\ \frac{t-1+i}{2}-k,\ \frac{t-1-i}{2}-k} \Delta^{t-1-2k} P^k$$

- *si $i+t$ est pair, 3 formules similaires suivant si $i<0$, si $i=0$ ou si $i>0$.*

où

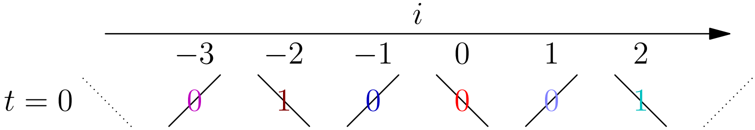
$$p = \frac{a}{a+c}\ ;\ r = \frac{b}{b+d}\ ;$$
$$\Delta = 1-(p+r)\ ;\ D = r-p\ ;\ P = (1-2p)(1-2r).$$

Éléments de preuve.

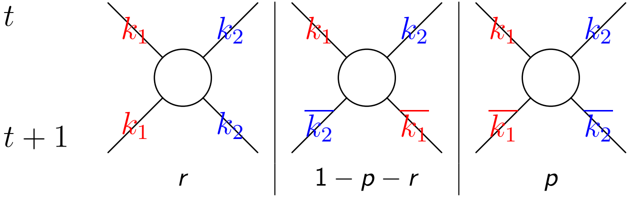
- On traite le cas $p + r \leq 1$ (i.e. $a + b \leq a + c$).
- Le cas $p + r \geq 1$ se traite de façon similaire.

Un système de particules en interaction sur $\mathbb{Z}$

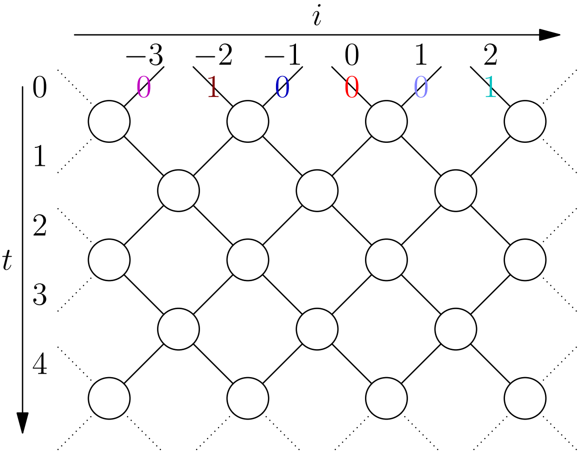
- Initialement ($t = 0$),



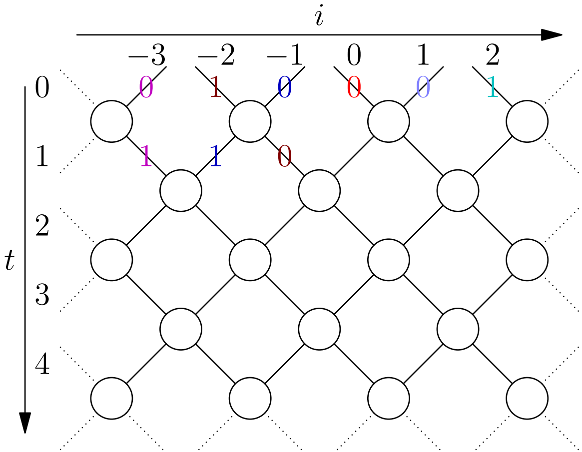
- De t à $t+1$: pour tout i tel que $i+t$ est pair :
  - Les particules en position i et $i+1$ au temps t interagissent (indépendamment des autres) de la façon suivante :



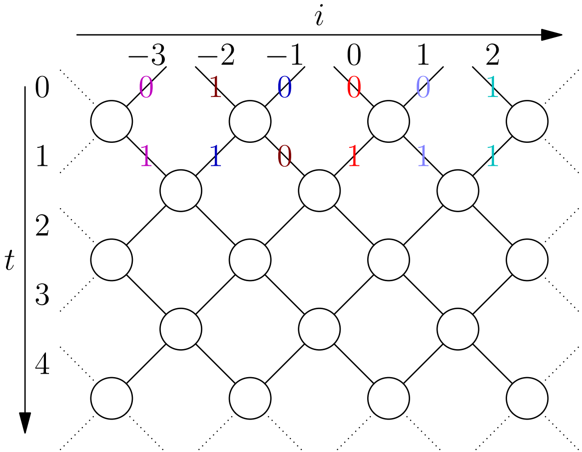
Une réalisation du système de particules



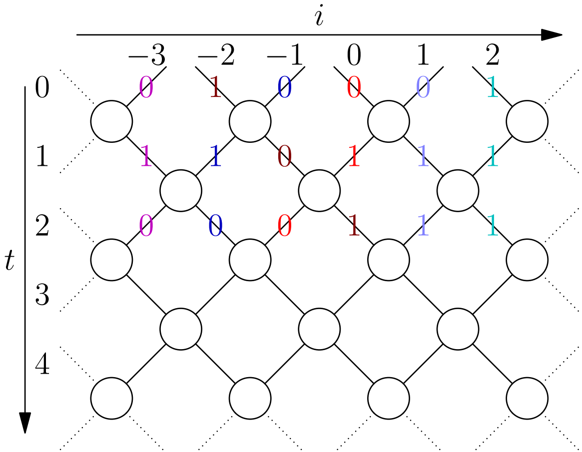
Une réalisation du système de particules



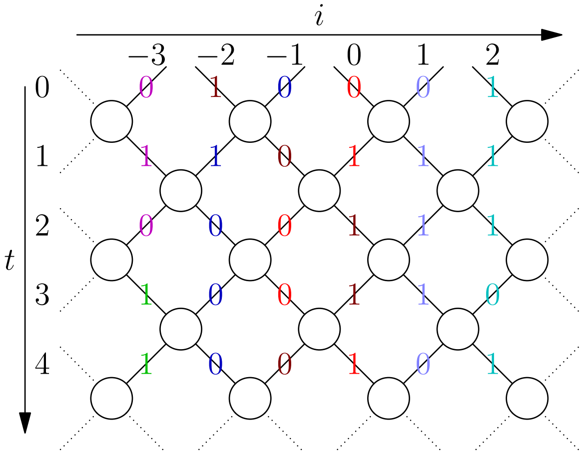
Une réalisation du système de particules



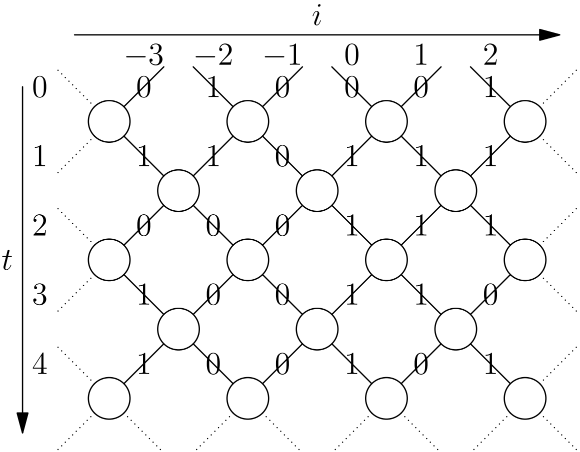
Une réalisation du système de particules



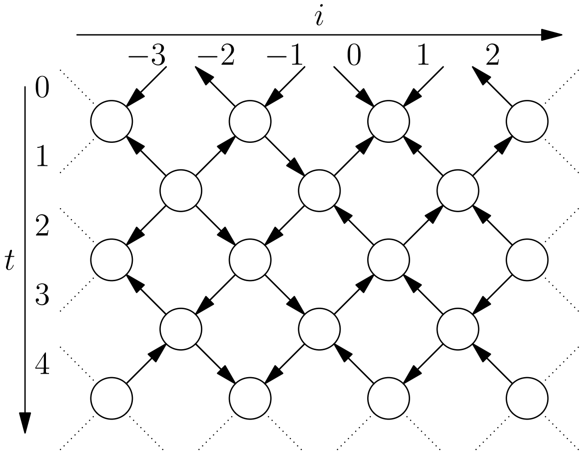
Une réalisation du système de particules



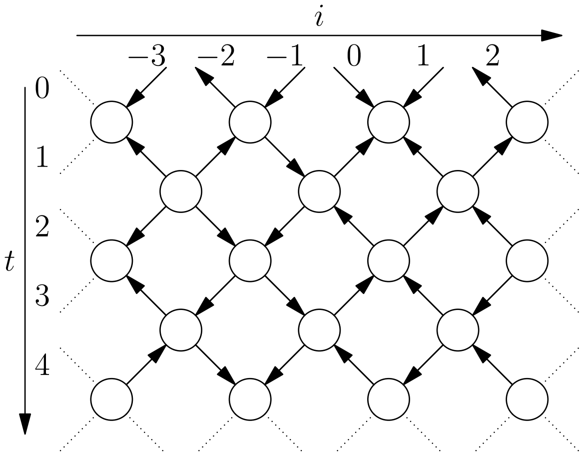
Système de particules vers modèle à 8 sommets



Système de particules vers modèle à 8 sommets



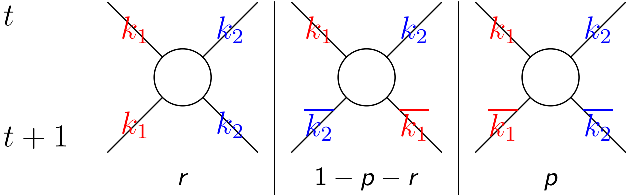
Système de particules vers modèle à 8 sommets



- L'orientation de K_∞ est distribuée suivant la loi du modèle à 8 sommets pour $a + c = b + d$ et condition de bord $PM(1/2)$.

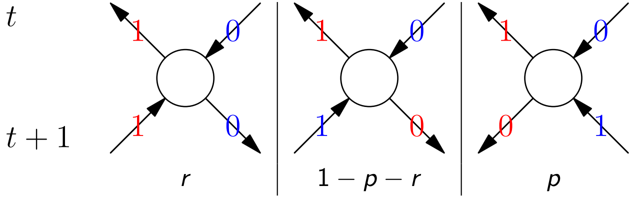
Pourquoi ?

- De t à $t+1$: pour tout i tel que $i+t$ est pair :
  - Les particules en position i et $i+1$ au temps t interagissent (indépendemment des autres) de la façon suivante :



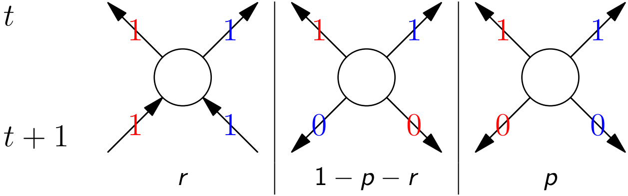
Pourquoi ?

- De t à $t+1$: pour tout i tel que $i+t$ est pair :
    - Les particules en position i et $i+1$ au temps t interagissent (indépendamment des autres) de la façon suivante :

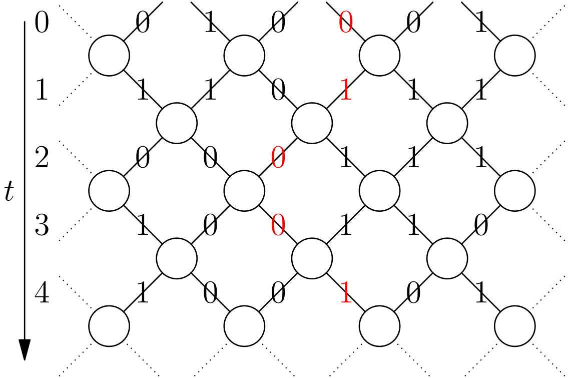


Pourquoi ?

- De t à $t+1$: pour tout i tel que $i+t$ est pair :
  - Les particules en position i et $i+1$ au temps t interagissent (indépendamment des autres) de la façon suivante :



Conséquence du système de particules



- L'influence de l'orientation de l'arête $(0,0)$ dans le modèle à 8 sommets se déduit de la trajectoire de la particule rouge.
- La trajectoire se décrit à l'aide d'une chaine de Markov (non homogène) $(Y(t) : t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$.

Réécriture de $C(i,t)$

- Calculer l'influence de l'arête $(0,0)$ sur (i,t),

$$C(i,t) = 4\left(E\left[e(0,0)e(i,t)\right] - E\left[e(0,0)\right]E\left[e(i,t)\right]\right).$$

- Via le système de particule, on obtient :

$$\begin{aligned}C(i,t) = {} & \mathbb{P}\big(Y(t)=(i,1)\,|\,Y(0)=(0,1)\big)\\ & - \mathbb{P}\big(Y(t)=(i,0)\,|\,Y(0)=(0,1)\big).\end{aligned}$$

- Calculons $\mathbb{P}\big(Y(t)=(i,k)\,|\,Y(0)=(0,1)\big)$ pour tout i,t,k.

Calcul de $\mathbb{P}(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1))$

- Pour calculer $\mathbb{P}(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1))$, on va utiliser des méthodes de combinatoire analytique [Flajolet-Sedgewick (2009)].
- Et on va s'intéresser à

$$S_k(x,l) = \sum_{i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1)) \; x^{i+t} l^t.$$

Trajectoires de la particule rouge

- Soit E l'ensemble des (sous-)trajectoires possibles de la particule initialement en $i = 0$ et dans l'état 1.
- Un élément w de E est représenté par un uplet de couples

$$w = ((i_j, k_j) : 0 \leq j \leq t(w)) \in (\mathbb{Z} \times \{0, 1\})^{t(w)+1}.$$

Trajectoires de la particule rouge

- Soit E l'ensemble des (sous-)trajectoires possibles de la particule initialement en $i = 0$ et dans l'état 1.
- Un élément w de E est représenté par un uplet de couples

$$w = ((i_j, k_j) : 0 \leq j \leq t(w)) \in (\mathbb{Z} \times \{0,1\})^{t(w)+1} .$$

- La probabilité d'obtenir le chemin $w \in E$ est

$$\mathbb{P}(w) = (1 - (p + r))^{n_d(w)} (p + r)^{n_v(w)} \left(\frac{r}{p + r}\right)^{n_{\overline{c}}(w)} \left(\frac{p}{p + r}\right)^{n_c(w)}$$

où

  - $n_d(w)$ le nombre de pas **diagonaux** $\swarrow$ ou $\searrow$ dans w,
  - $n_v(w)$ le nombre de pas **verticaux** $\downarrow$ dans w,
  - $n_{\overline{c}}(w)$ le nombre de **non-changements** d'état le long de pas verticaux,
  - $n_c(w)$ le nombre de **changements** d'état le long de pas verticaux.

$$\mathbb{P}(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1))$$
$$= \sum_{w \in E_{(i,t,k)}} (1-(p+r))^{n_d(w)} (p+r)^{n_v(w)} \left(\frac{r}{p+r}\right)^{n_{\overline{c}}(w)} \left(\frac{p}{p+r}\right)^{n_c(w)}$$

où

- $E_{(i,t,k)} \subset E$ des chemins qui finissent en (i,k) au temps t.

$\mathbb{P}(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1))$? $S(x,l)$?

$$S_k(x,l) = \sum_{i,t} \mathbb{P}(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1)) \;\; x^{i+t} l^t$$

$$= \sum_{w \in E} (1-(p+r))^{n_d(w)} (p+r)^{n_v(w)} \left(\frac{r}{p+r}\right)^{n_{\bar{c}}(w)} \left(\frac{p}{p+r}\right)^{n_c(w)} \ldots$$

$$\ldots \; x^{i(w)+t(w)} l^{t(w)} \mathbf{1}_{\{k(w)=k\}}$$

où

- $(i(w), k(w))$ est le dernier point du chemin w de longueur $t(w)$.

La série génératrice des trajectoires

- La série génératrice de E suivant la position finale $(i(w), k(w))$, la longueur $t(w)$ et les statistiques de pas est

$$S_E(x, l, z_d, z_v, z_{\overline{c}}, z_c) = \sum_{w \in E} z_d^{n_d(w)} z_v^{n_v(w)} z_{\overline{c}}^{n_{\overline{c}}(w)} z_c^{n_c(w)} x^{i(w)+t(w)} l^{t(w)}.$$

- Calculons S_E.

- On partitionne E en 4 sous-ensembles : pour tout $j \in \{0,1\}$ et $k \in \{0,1\}$,

  $E_{j,k} = \{w \in E$ finissant en (i,k) au temps t avec $i + t \equiv j \pmod 2\}$.

- Exemple :

$$E_{0,1} = \{w \in E \text{ finissant dans l'état } 1 \text{ en } i \text{ au temps } t \text{ tel que } i+t \text{ est paire}\}.$$

- 4 relations structurelles entre ces sous-ensembles :

$$E_{0,1} = \{((0,1))\} + \begin{array}{ll} E_{0,0} & \\ & \diagdown \\ & \ \ 1 \end{array} + \begin{array}{c} E_{1,1} \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} E_{1,0} \\ | \\ 1 \end{array}, \text{ etc.}$$

- qui se traduisent en 4 équations sur les séries génératrices :

$$S_{E_{0,1}} = 1 + x^2 l z_d \ S_{E_{0,0}} + x l z_v z_{\overline{c}} \ S_{E_{1,1}} + x l z_v z_c \ S_{E_{1,0}}, \text{ etc.}$$

Calcul de S_E

- Un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues que sont les $(S_{E_{j,k}} : j, k \in \{0, 1\})$.
- On résout le système et on regarde la valeur de

$$S_{E_{0,1}} - S_{E_{0,0}} + S_{E_{1,1}} - S_{E_{1,0}}$$

en $z_d = 1 - (p + r)$, $z_v = p + r$, $z_{\overline{c}} = \frac{r}{p+r}$ et $z_c = \frac{p}{p+r}$.
- On obtient alors

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= \sum_{i,t} C(i,t) x^{i+t} l^t \\ &= \frac{1 + l(1 - (p + r) + x(r - p))}{1 + x^2 l^2 (2p - 1)(2r - 1) + l(1 - (p + r))(1 + x^2)}. \end{aligned}$$

- Il suffit ensuite d'extraire les coefficients en $x^{i+t} l^t$ de la fraction rationnelle.

Calcul de S_E

- Rappel :

$$S_k = S_{E_{0,k}} + S_{E_{1,k}} = \sum_{i,t} \mathbb{P}\big(Y(t) = (i,k) | Y(0) = (0,1)\big)\ x^{i+t} l^t$$

- Rappel :

$$\begin{aligned} C(i,t) = {} & \mathbb{P}\big(Y(t) = (i,1) | Y(0) = (0,1)\big) \\ & - \mathbb{P}\big(Y(t) = (i,0) | Y(0) = (0,1)\big). \end{aligned}$$

Calcul de S_E

- Un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues que sont les $(S_{E_{j,k}} : j, k \in \{0,1\})$.
- On résout le système et on regarde la valeur de

$$S_{E_{0,1}} - S_{E_{0,0}} + S_{E_{1,1}} - S_{E_{1,0}}$$

  en $z_d = 1 - (p+r)$, $z_v = p + r$, $z_{\overline{c}} = \frac{r}{p+r}$ et $z_c = \frac{p}{p+r}$.
- On obtient alors

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= \sum_{i,t} C(i,t) x^{i+t} l^t \\ &= \frac{1 + l(1 - (p+r) + x(r-p))}{1 + x^2 l^2 (2p-1)(2r-1) + l(1-(p+r))(1+x^2)}. \end{aligned}$$

- Il suffit ensuite d'extraire les coefficients en $x^{i+t} l^t$ de la fraction rationnelle.

Rappel du résultat principal

Théorème (C. 2016)

Pour le modèle à 8 sommets sur K_∞ avec $a+c=b+d$ et condition de bord $PM(1/2)$,

- *si $i+t$ est impair,*

$$C(i,t) = (-1)^{t+1} D \sum_{k=0}^{\frac{t-1-|i|}{2}} (-1)^k \binom{t-1-k}{k,\ \frac{t-1+i}{2}-k,\ \frac{t-1-i}{2}-k} \Delta^{t-1-2k} P^k$$

- *si $i+t$ est pair, 3 formules similaires suivant si $i<0$, si $i=0$ ou si $i>0$.*

où

$$p = \frac{a}{a+c}\ ;\ r = \frac{b}{b+d}\ ;$$
$$\Delta = 1-(p+r)\ ;\ D = r-p\ ;\ P = (1-2p)(1-2r).$$

Merci.