Semi-groupes d'opérateurs et OK-convexité

Cédric Arhancet

Université de Franche-Comté

CIRM - Décembre 2015

Journées du GDR Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilités

Définition (E. M. Stein, ≈1970)

Soit Ω un espace mesuré.

Définition (E. M. Stein, ≈1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semi-groupe de contractions sur $L^\infty(\Omega)$.

Définition (E. M. Stein, ≈1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un w^*-semi-groupe de contractions sur $L^\infty(\Omega)$.

On dit que $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion si

Semi-groupes de diffusion

Définition (E. M. Stein, ≈1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semi-groupe de contractions sur $L^\infty(\Omega)$.

On dit que $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion si

- *il induit un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ de contractions sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ (contractivité),*

Semi-groupes de diffusion

Définition (E. M. Stein, ≈1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semi-groupe de contractions sur $L^\infty(\Omega)$.

On dit que $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion si

- *il induit un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ de contractions sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ (contractivité),*
- *chaque T_t est auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$ (symétrie).*

Semi-groupes de diffusion

Définition (E. M. Stein, ≈1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semi-groupe de contractions sur $L^\infty(\Omega)$.

On dit que $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion si

- *il induit un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ de contractions sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ (contractivité),*
- *chaque T_t est auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$ (symétrie).*

Exemples typiques :
les semi-groupes de Gauss et de Poisson $\mathrm{e}^{t\Delta}$ et $\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{1/2}}$ sur $\mathbb{T}$ ou sur $\mathbb{R}^n$.

- Un multiplicateur de Fourier sur $\mathbb{T}$ défini par une suite de nombres complexes (φ_k) de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est un opérateur

Multiplicateurs de Fourier

- Un multiplicateur de Fourier sur $\mathbb{T}$ défini par une suite de nombres complexes (φ_k) de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est un opérateur

$$T\colon \begin{array}{ccc} L^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{T}) \\ \sum_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k \cdot} & \longmapsto & \sum_k \varphi_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k \cdot}. \end{array}$$

Multiplicateurs de Fourier

- Un multiplicateur de Fourier sur $\mathbb{T}$ défini par une suite de nombres complexes (φ_k) de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est un opérateur

$$T\colon \begin{array}{ccc} L^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{T}) \\ \sum_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k \cdot} & \longmapsto & \sum_k \varphi_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k \cdot}. \end{array}$$

- Soit G un groupe abélien localement compact, $\widehat{G}$ son groupe dual et soit $\widehat{\cdot}$ la transformation de Fourier.

Multiplicateurs de Fourier

- Un multiplicateur de Fourier sur $\mathbb{T}$ défini par une suite de nombres complexes (φ_k) de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est un opérateur

$$T\colon \begin{array}{ccc} L^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{T}) \\ \sum_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k \cdot} & \longmapsto & \sum_k \varphi_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k \cdot} \end{array}.$$

- Soit G un groupe abélien localement compact, $\widehat{G}$ son groupe dual et soit $\widehat{\cdot}$ la transformation de Fourier.
  Plus généralement, on dit que $T\colon L^p(G) \to L^p(G)$ est un multiplicateur de Fourier s'il existe une

Multiplicateurs de Fourier

- Un multiplicateur de Fourier sur $\mathbb{T}$ défini par une suite de nombres complexes (φ_k) de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est un opérateur

$$T\colon \begin{array}{ccc} L^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{T}) \\ \sum_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\cdot} & \longmapsto & \sum_k \varphi_k x_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\cdot}. \end{array}$$

- Soit G un groupe abélien localement compact, $\widehat{G}$ son groupe dual et soit $\widehat{\cdot}$ la transformation de Fourier.
  Plus généralement, on dit que $T\colon L^p(G) \to L^p(G)$ est un multiplicateur de Fourier s'il existe une fonction $\varphi \in L^\infty(\widehat{G})$ telle que

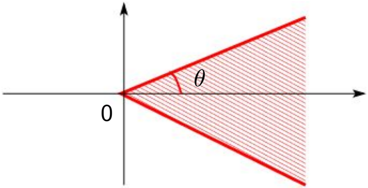
$$\widehat{T(f)} = \varphi \cdot \widehat{f}, \qquad f \in L^p(G) \cap L^2(G).$$

Semi-groupes analytiques bornés

Pour tout $0 < \theta < \pi$

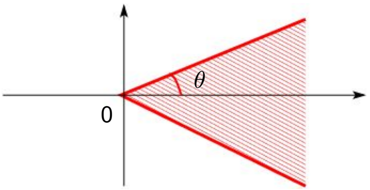
Semi-groupes analytiques bornés

Pour tout $0 < \theta < \pi$, on pose $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : -\theta < \mathrm{Arg}(z) < \theta\}$ le secteur ouvert d'angle 2θ autour du demi-axe réel positif $]0, \infty[$.



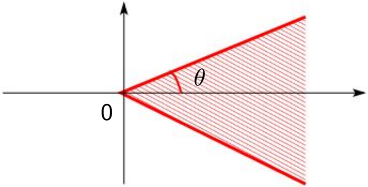
Semi-groupes analytiques bornés

Pour tout $0 < \theta < \pi$, on pose $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : -\theta < \mathrm{Arg}(z) < \theta\}$ le secteur ouvert d'angle 2θ autour du demi-axe réel positif $]0, \infty[$.



Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach X.

Pour tout $0 < \theta < \pi$, on pose $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : -\theta < \mathrm{Arg}(z) < \theta\}$ le secteur ouvert d'angle 2θ autour du demi-axe réel positif $]0, \infty[$.



Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach X.

On dit que c'est un semi-groupe analytique borné si $(T_t)_{t>0}$ admet une extension analytique bornée

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_\theta & \longrightarrow & B(X) \\ z & \longmapsto & T_z \end{array}$$

pour un certain $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Théorème (E. M. Stein, 1970)

Soit Ω un espace mesuré.

Semi-groupes analytiques bornés

Théorème (E. M. Stein, 1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.

Semi-groupes analytiques bornés

Théorème (E. M. Stein, 1970)

Soit Ω *un espace mesuré.*
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ *un semi-groupe de diffusion sur* $L^\infty(\Omega)$*.*
Alors $(T_t)_{t \geq 0}$ *induit un semi-groupe analytique borné sur* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $1 < p < \infty$*.*

Semi-groupes analytiques bornés

Théorème (E. M. Stein, 1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.
Alors $(T_t)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Cas particulier :
les semi-groupes de diffusion $(T_t)_{t\geq 0}$ tels que

Théorème (E. M. Stein, 1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.
Alors $(T_t)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Cas particulier :
les semi-groupes de diffusion $(T_t)_{t\geq 0}$ tels que

- $T_t(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ (positivité),

Semi-groupes analytiques bornés

Théorème (E. M. Stein, 1970)

Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.
Alors $(T_t)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Cas particulier :
les semi-groupes de diffusion $(T_t)_{t\geq 0}$ tels que

- $T_t(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ (positivité),
- $T_t(1) = 1$ pour tout $t \geq 0$ (unital, conservation de la masse)

sont analytiques bornés sur $L^p(\Omega)$.

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ^1_n uniformément

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell_n^1 \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ^1_n uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell^1_n \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Un espace X est K-convexe

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell_n^1 \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Un espace X est K-convexe si X ne contient pas les ℓ_n^1 uniformément.

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell_n^1 \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Un espace X est K-convexe si X ne contient pas les ℓ_n^1 uniformément.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$ sur un certain espace de probabilité Ω.

Espaces de Banach K-convexes

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell_n^1 \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Un espace X est K-convexe si X ne contient pas les ℓ_n^1 uniformément.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$ sur un certain espace de probabilité Ω.

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

Un espace de Banach X est K-convexe ssi

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell_n^1 \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Un espace X est K-convexe si X ne contient pas les ℓ_n^1 uniformément.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$ sur un certain espace de probabilité Ω.

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

Un espace de Banach X est K-convexe ssi la tensorisation $P \otimes Id_X$ de la projection de Rademacher

Un espace de Banach X contient les ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un sous-espace de dimension n X_n de X et un isomorphisme $u_n \colon \ell_n^1 \to X_n$ tel que $\|u_n\| \|u_n^{-1}\| < \lambda$.

Un espace X est K-convexe si X ne contient pas les ℓ_n^1 uniformément.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$ sur un certain espace de probabilité Ω.

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

Un espace de Banach X est K-convexe ssi la tensorisation $P \otimes Id_X$ de la projection de Rademacher

$$\begin{array}{rccc} P\colon & L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_\Omega f \varepsilon_k \Big) \varepsilon_k \end{array}$$

induit un opérateur borné sur l'espace de Bochner $L^2(\Omega, X)$.

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*
- *Soit G un groupe localement compact abélien.*

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*
- *Soit G un groupe localement compact abélien.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$.*

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*
- *Soit G un groupe localement compact abélien.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*
- *Soit G un groupe localement compact abélien.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

La propriété de l'analyticité est préservée par la tensorisation de l'opérateur identité Id_X d'un espace de Banach K-convexe X.

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*
- *Soit G un groupe localement compact abélien.*
- *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G,X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

La propriété de l'analyticité est préservée par la tensorisation de l'opérateur identité Id_X d'un espace de Banach K-convexe X.

Quand on remplace les espaces L^p par des espaces de Bochner, le semi-groupe reste analytique borné.

Préservation de l'analyticité

Le cœur de sa preuve est le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, Annals 1982)

- *Soit X un espace de Banach K-convexe.*
- *Soit G un groupe localement compact abélien.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

La propriété de l'analyticité est préservée par la tensorisation de l'opérateur identité Id_X d'un espace de Banach K-convexe X.

Quand on remplace les espaces L^p par des espaces de Bochner, le semi-groupe reste analytique borné.

Pisier a montré que la K-convexité est nécessaire pour le semi-groupe de Walsh.

Conjecture de Pisier

Donc, la question suivante est naturelle :

Donc, la question suivante est naturelle :

- Peut-on enlever les hypothèses “positifs unitals” et “de multiplicateurs de Fourier”?

Conjecture de Pisier

Donc, la question suivante est naturelle :

- Peut-on enlever les hypothèses “positifs unitals” et “de multiplicateurs de Fourier”?

Conjecture (G. Pisier, 1982)

Soit X un espace de Banach K-convexe.

Conjecture de Pisier

Donc, la question suivante est naturelle :

- Peut-on enlever les hypothèses "positifs unitals" et "de multiplicateurs de Fourier"?

Conjecture (G. Pisier, 1982)

Soit X un espace de Banach K-convexe.
Soit Ω un espace mesuré.

Conjecture de Pisier

Donc, la question suivante est naturelle :

- Peut-on enlever les hypothèses “positifs unitals” et “de multiplicateurs de Fourier”?

Conjecture (G. Pisier, 1982)

Soit X un espace de Banach K-convexe.
Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.

Conjecture de Pisier

Donc, la question suivante est naturelle :

- Peut-on enlever les hypothèses “positifs unitals” et “de multiplicateurs de Fourier”?

Conjecture (G. Pisier, 1982)

Soit X un espace de Banach K-convexe.
Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.
Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Donc, la question suivante est naturelle :

- Peut-on enlever les hypothèses “positifs unitals” et “de multiplicateurs de Fourier” ?

Conjecture (G. Pisier, 1982)

Soit X un espace de Banach K-convexe.
Soit Ω un espace mesuré.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $L^\infty(\Omega)$.
Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Le cas scalaire $X = \mathbb{C}$ est le résultat de Stein.

Mathématiques non commutatives

Mathématiques non commutatives

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème.

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif	non commutatif

Mathématiques non commutatives

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur

Mathématiques non commutatives

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p

Mathématiques non commutatives

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\, \lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	espace d'opérateurs E :

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	espace d'opérateurs E : espace de Banach E muni d'un plongement $E \hookrightarrow B(H)$

Mathématiques non commutatives

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\big(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \big(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\big)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	espace d'opérateurs E : espace de Banach E muni d'un plongement $E \hookrightarrow B(H)$
$L^p(\Omega, X)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M, E)$

Mathématiques non commutatives

Pour tenter d'avancer sur cette conjecture, il est naturel d'étendre le contexte du problème. Que peut-on dire de la conjecture si on élargit le question aux espaces L^p non commutatifs ?

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	espace d'opérateurs E : espace de Banach E muni d'un plongement $E \hookrightarrow B(H)$
$L^p(\Omega, X)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M, E)$
X K-convexe	$\longleftrightarrow$	E OK-convexe $\Longleftrightarrow S^p(E)$ est K-convexe.

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.
Soit X un espace de Banach K-convexe

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.
Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.
Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.
Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.
Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.
Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

- Soit X un espace de Banach K-convexe.

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.
Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.
Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

- Soit X un espace de Banach K-convexe.
  Peut-on trouver un espace de Banach E isomorphe à X avec une structure d'e.o. OK-convexe ?

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.

Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G,X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

- Soit X un espace de Banach K-convexe.
  Peut-on trouver un espace de Banach E isomorphe à X avec une structure d'e.o. OK-convexe ? i.e. tel que $S^p(E)$ soit K-convexe ?

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.
Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.
Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

- Soit X un espace de Banach K-convexe.
  Peut-on trouver un espace de Banach E isomorphe à X avec une structure d'e.o. OK-convexe ? i.e. tel que $S^p(E)$ soit K-convexe ?
- Ce dernier problème s'insère dans un cadre plus général :

Une réponse partielle

Théorème (C. A., 2014)

Soit G un groupe abélien compact.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion de multiplicateurs de Fourier sur $L^\infty(G)$.

Soit X un espace de Banach K-convexe isomorphe à un espace de Banach E qui admet une structure d'espace d'opérateurs OK-convexe.

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur l'espace de Bochner $L^p(G, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

- Soit X un espace de Banach K-convexe.
  Peut-on trouver un espace de Banach E isomorphe à X avec une structure d'e.o. OK-convexe ? i.e. tel que $S^p(E)$ soit K-convexe ?
- Ce dernier problème s'insère dans un cadre plus général : une question similaire existe pour les autres propriétés des espaces de Banach (UMD, cotype...).

Si on enlève “multiplicateurs de Fourier” on a le résultat suivant :

Si on enlève "multiplicateurs de Fourier" on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif*

Si on enlève “multiplicateurs de Fourier” on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif (i.e isomorphe à un espace uniformément convexe).*

Si on enlève "multiplicateurs de Fourier" on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif (i.e isomorphe à un espace uniformément convexe).*
- *Soit Ω un espace mesuré.*

Si on enlève "multiplicateurs de Fourier" on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif (i.e isomorphe à un espace uniformément convexe).*
- *Soit Ω un espace mesuré.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion d'opérateurs positifs unitals sur $L^\infty(\Omega)$.*

Semi-groupes et super-réflexivité

Si on enlève "multiplicateurs de Fourier" on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif (i.e isomorphe à un espace uniformément convexe).*
- *Soit Ω un espace mesuré.*
- *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion d'opérateurs positifs unitals sur $L^\infty(\Omega)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Semi-groupes et super-réflexivité

Si on enlève "multiplicateurs de Fourier" on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif (i.e isomorphe à un espace uniformément convexe).*
- *Soit Ω un espace mesuré.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de diffusion d'opérateurs positifs unitals sur $L^\infty(\Omega)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Un espace X super-réflexif est K-convexe.

Semi-groupes et super-réflexivité

Si on enlève "multiplicateurs de Fourier" on a le résultat suivant :

Théorème (G. Pisier, 1982)

- *Soit X un espace de Banach super-reflexif (i.e isomorphe à un espace uniformément convexe).*
- *Soit Ω un espace mesuré.*
- *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion d'opérateurs positifs unitals sur $L^\infty(\Omega)$.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\Omega, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Un espace X super-réflexif est K-convexe.

La condition " X super-réflexif" est beaucoup plus contraignante que "X K-convexe".

Théorème de Beurling

Les preuves des théorèmes de Pisier de mon résultat utilisent le théorème suivant :

Les preuves des théorèmes de Pisier de mon résultat utilisent le théorème suivant :

Théorème (A. Beurling, 1970)

Soit X un espace de Banach.

Théorème de Beurling

Les preuves des théorèmes de Pisier de mon résultat utilisent le théorème suivant :

Théorème (A. Beurling, 1970)

Soit X un espace de Banach.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de contractions sur X.

Théorème de Beurling

Les preuves des théorèmes de Pisier de mon résultat utilisent le théorème suivant :

Théorème (A. Beurling, 1970)

Soit X un espace de Banach.
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe de contractions sur X.
Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\limsup_{t \to 0} \left\| (Id_X - T_t)^n \right\|_{X \to X} < 2^n.$$

Théorème de Beurling

Les preuves des théorèmes de Pisier de mon résultat utilisent le théorème suivant :

Théorème (A. Beurling, 1970)

Soit X un espace de Banach.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de contractions sur X.
Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\limsup_{t\to 0} \left\|(Id_X - T_t)^n\right\|_{X\to X} < 2^n.$$

Alors le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est analytique borné.

Théorème de Beurling

Les preuves des théorèmes de Pisier de mon résultat utilisent le théorème suivant :

Théorème (A. Beurling, 1970)

Soit X un espace de Banach.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de contractions sur X.
Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\limsup_{t\to 0} \left\|(Id_X - T_t)^n\right\|_{X\to X} < 2^n.$$

Alors le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est analytique borné.

La régularité du semi-groupe est, grossièrement parlant, induit par la qualité de l'approximation de l'opérateur identité quand le paramètre tend vers 0.

Soit G un groupe localement compact

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$.

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$\left(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X\right)^n$$

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n,X) \to L^p(G^n,X)$$

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n,X) \to L^p(G^n,X)$$

L'hypothèse "semi-groupes de multiplicateurs de Fourier" apparaît dans le cas où X est K-convexe car Pisier utilise :

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n,X) \to L^p(G^n,X)$$

L'hypothèse "semi-groupes de multiplicateurs de Fourier" apparaît dans le cas où X est K-convexe car Pisier utilise :

Lemme (G. Pisier, 1982)

Soit G un groupe compact abélien,

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n,X) \to L^p(G^n,X)$$

L'hypothèse "semi-groupes de multiplicateurs de Fourier" apparaît dans le cas où X est K-convexe car Pisier utilise :

Lemme (G. Pisier, 1982)

Soit G un groupe compact abélien, $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n,X) \to L^p(G^n,X)$$

L'hypothèse “semi-groupes de multiplicateurs de Fourier” apparaît dans le cas où X est K-convexe car Pisier utilise :

Lemme (G. Pisier, 1982)

Soit G un groupe compact abélien, $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$ et X un espace de Banach.

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n,X) \to L^p(G^n,X)$$

L'hypothèse "semi-groupes de multiplicateurs de Fourier" apparaît dans le cas où X est K-convexe car Pisier utilise :

Lemme (G. Pisier, 1982)

Soit G un groupe compact abélien, $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$ et X un espace de Banach. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\left\|(Id - T_t)^n \otimes Id_X\right\| \leq \left\|(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X\right\|.$$

K-convexité vs super-réflexivité

Soit G un groupe localement compact et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de diffusion sur $L^\infty(G)$. Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer

$$(Id_{L^p(G,X)} - T_t \otimes Id_X)^n = (Id - T_t)^n \otimes Id_X \colon L^p(G,X) \to L^p(G,X)$$

et

$$(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X \colon L^p(G^n, X) \to L^p(G^n, X)$$

L'hypothèse "semi-groupes de multiplicateurs de Fourier" apparaît dans le cas où X est K-convexe car Pisier utilise :

Lemme (G. Pisier, 1982)

Soit G un groupe compact abélien, $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de multiplicateurs de Fourier positifs unitals sur $L^\infty(G)$ et X un espace de Banach. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\|(Id - T_t)^n \otimes Id_X\| \leq \|(Id - T_t)^{\otimes n} \otimes Id_X\|.$$

Pisier : "It is likely that the group structure plays no role, in the general case, but I do not see how to avoid using it in the proof".

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Lemme

Soit G un groupe compact.

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Lemme

Soit G un groupe compact. L'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G^n) = L^\infty(G)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Lemme

Soit G un groupe compact. L'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G^n) = L^\infty(G) \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s_1, \dots, s_n) = f(s_1 \cdots s_n), \qquad f \in L^\infty(G), \qquad s_1, \dots, s_n \in G$$

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Lemme

Soit G un groupe compact. L'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G^n) = L^\infty(G)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s_1,\ldots,s_n) = f(s_1\cdots s_n), \qquad f \in L^\infty(G), \qquad s_1,\ldots,s_n \in G$$

induit une isométrie positive $\Delta \colon L^p(G,X) \to L^p(G^n,X)$ dont l'image est complémenté par une espérance conditionnelle $\mathbb{E}$.

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Lemme

Soit G un groupe compact. L'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G^n) = L^\infty(G)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s_1,\ldots,s_n) = f(s_1\cdots s_n), \qquad f \in L^\infty(G), \qquad s_1,\ldots,s_n \in G$$

induit une isométrie positive $\Delta \colon L^p(G,X) \to L^p(G^n,X)$ dont l'image est complémenté par une espérance conditionnelle $\mathbb{E}$.

$$\begin{tikzcd}
L^\infty(G^n) \arrow[r, "(M_\varphi)^{\otimes n}"] & L^\infty(G^n) \arrow[d, "\mathbb{E}"] \\
L^\infty(G) \arrow[u, "\Delta_G"] \arrow[r, "(M_\varphi)^n"'] & L^\infty(G)
\end{tikzcd}$$

Observation

Le lemme de Pisier découle essentiellement du résultat suivant :

Lemme

Soit G un groupe compact. L'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G^n) = L^\infty(G)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s_1,\ldots,s_n) = f(s_1\cdots s_n), \qquad f \in L^\infty(G), \qquad s_1,\ldots,s_n \in G$$

induit une isométrie positive $\Delta \colon L^p(G,X) \to L^p(G^n,X)$ dont l'image est complémenté par une espérance conditionnelle $\mathbb{E}$.

$$\begin{tikzcd}
L^\infty(G^n) \arrow[r, "(M_\varphi)^{\otimes n}"] & L^\infty(G^n) \arrow[d, "\mathbb{E}"] \\
L^\infty(G) \arrow[u, "\Delta_G"] \arrow[r, "(M_\varphi)^n"'] & L^\infty(G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L^p(G^n,X) \arrow[r, "(Id-T_t)^{\otimes n}\otimes Id_X"] & L^p(G^n,X) \arrow[d, "\mathbb{E}"] \\
L^p(G,X) \arrow[u, "\Delta_G"] \arrow[r, "(Id-T_t)^n\otimes Id_X"'] & L^p(G,X)
\end{tikzcd}$$

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s,t) = f(st), \qquad f \in L^\infty(G) \qquad s, t \in G.$$

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s,t) = f(st), \qquad f \in L^\infty(G) \qquad s,t \in G.$$

On peut voir $L^\infty(G)$ comme une algèbre de von Neumann sur $L^2(G)$

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s,t) = f(st), \qquad f \in L^\infty(G) \qquad s,t \in G.$$

On peut voir $L^\infty(G)$ comme une algèbre de von Neumann sur $L^2(G)$ en voyant les éléments f de $L^\infty(G)$ comme des opérateurs $M_f \colon L^2(G) \to L^2(G)$ de multiplication.

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s,t) = f(st), \qquad f \in L^\infty(G) \qquad s,t \in G.$$

On peut voir $L^\infty(G)$ comme une algèbre de von Neumann sur $L^2(G)$ en voyant les éléments f de $L^\infty(G)$ comme des opérateurs $M_f \colon L^2(G) \to L^2(G)$ de multiplication.

Cette application Δ_G est à la base de la théorie des groupes quantiques compacts.

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s,t) = f(st), \qquad f \in L^\infty(G) \qquad s,t \in G.$$

On peut voir $L^\infty(G)$ comme une algèbre de von Neumann sur $L^2(G)$ en voyant les éléments f de $L^\infty(G)$ comme des opérateurs $M_f \colon L^2(G) \to L^2(G)$ de multiplication.

Cette application Δ_G est à la base de la théorie des groupes quantiques compacts.

Un groupe quantique compact est une algèbre de von Neumann M munie d'un "coproduit"

$$\Delta_G \colon M \to M\overline{\otimes}M$$

vérifiant certains axiomes.

Observation

Le cas $n = 2$ est l'application

$$\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) = L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

définie par l'égalité

$$\Delta_G(f)(s,t) = f(st), \qquad f \in L^\infty(G) \qquad s,t \in G.$$

On peut voir $L^\infty(G)$ comme une algèbre de von Neumann sur $L^2(G)$ en voyant les éléments f de $L^\infty(G)$ comme des opérateurs $M_f \colon L^2(G) \to L^2(G)$ de multiplication.

Cette application Δ_G est à la base de la théorie des groupes quantiques compacts.

Un groupe quantique compact est une algèbre de von Neumann M munie d'un "coproduit"

$$\Delta_G \colon M \to M\overline{\otimes}M$$

vérifiant certains axiomes.

Cela permet de mieux comprendre le mystérieux lemme de Pisier.

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

De la, il est possible de généraliser le résultat aux semigroupes de multiplicateurs sur *certains* groupes quantiques compacts mais pas tous

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

De la, il est possible de généraliser le résultat aux semigroupes de multiplicateurs sur *certains* groupes quantiques compacts mais pas tous (d'autres difficultés sont présentes) :

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

De la, il est possible de généraliser le résultat aux semigroupes de multiplicateurs sur *certains* groupes quantiques compacts mais pas tous (d'autres difficultés sont présentes) :

Théorème (C. A.)

Soit G un groupe discret moyennable.

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

De la, il est possible de généraliser le résultat aux semigroupes de multiplicateurs sur *certains* groupes quantiques compacts mais pas tous (d'autres difficultés sont présentes) :

Théorème (C. A.)

Soit G un groupe discret moyennable.

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un w^*-semigroupe de multiplicateurs contractants sur $\mathrm{VN}(G)$ et autoadjoints sur $L^2(\mathrm{VN}(G))$.

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

De la, il est possible de généraliser le résultat aux semigroupes de multiplicateurs sur *certains* groupes quantiques compacts mais pas tous (d'autres difficultés sont présentes) :

Théorème (C. A.)

Soit G un groupe discret moyennable.

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un w^*-semigroupe de multiplicateurs contractants sur $\mathrm{VN}(G)$ et autoadjoints sur $L^2(\mathrm{VN}(G))$.

Soit E un espace d'opérateurs OK-convexe.

Cas des multiplicateurs de Fourier non commutatifs

Un exemple de groupe quantique compact est donné par l'algèbre de von Neumann $\mathrm{VN}(G)$ d'un groupe discret G.
On peut définir une notion de multiplicateur de Fourier associée.

De la, il est possible de généraliser le résultat aux semigroupes de multiplicateurs sur *certains* groupes quantiques compacts mais pas tous (d'autres difficultés sont présentes) :

Théorème (C. A.)

Soit G un groupe discret moyennable.

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semigroupe de multiplicateurs contractants sur $\mathrm{VN}(G)$ et autoadjoints sur $L^2(\mathrm{VN}(G))$.

Soit E un espace d'opérateurs OK-convexe.

Alors $(T_t \otimes Id_E)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\mathrm{VN}(G), E)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Question

Que se passe-t-il s'il n'y a plus de structure de groupe ou de groupe quantique ?

Questions

Question

Que se passe-t-il s'il n'y a plus de structure de groupe ou de groupe quantique ?

Par exemple :

Question

Que se passe-t-il s'il n'y a plus de structure de groupe ou de groupe quantique ?

Par exemple :

Que peut-on dire des semi-groupes de multiplicateurs de Schur ?

Questions

Question

Que se passe-t-il s'il n'y a plus de structure de groupe ou de groupe quantique ?

Par exemple :

Que peut-on dire des semi-groupes de multiplicateurs de Schur ?

Que peut-on dire des semi-groupes de multiplicateurs sur le tore non commutatif $\mathbb{T}_\theta^d$?

Multiplicateurs de Schur

Un opérateur dans $B(\ell^2)$ peut être identifié avec sa matrice relative à la base canonique de ℓ^2.

Multiplicateurs de Schur

Un opérateur dans $B(\ell^2)$ peut être identifié avec sa matrice relative à la base canonique de ℓ^2.

Un multiplicateur de Schur défini par une matrice A est une application

$$\begin{array}{rccc} M_A\colon & B(\ell^2) & \longrightarrow & B(\ell^2) \\ & [x_{ij}] & \longmapsto & [a_{ij}x_{ij}]. \end{array}$$

Multiplicateurs de Schur

Un opérateur dans $B(\ell^2)$ peut être identifié avec sa matrice relative à la base canonique de ℓ^2.

Un multiplicateur de Schur défini par une matrice A est une application

$$\begin{array}{rccc} M_A\colon & B(\ell^2) & \longrightarrow & B(\ell^2) \\ & [x_{ij}] & \longmapsto & [a_{ij}x_{ij}]. \end{array}$$

Rappelons que

$$S^p = \left\{x \in B(\ell^2) \colon \|x\|_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,|x|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$$

où $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$.

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ par

Semi-groupes de multiplicateurs de Schur

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ par

$$\begin{array}{rccc} \Delta\colon & B(\ell^2) & \longrightarrow & B(\ell^2) \overline{\otimes} B(\ell^2) \\ & e_{ij} & \longmapsto & e_{ij} \otimes e_{ij}. \end{array}$$

Semi-groupes de multiplicateurs de Schur

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ par

$$\begin{array}{rccc} \Delta\colon & B(\ell^2) & \longrightarrow & B(\ell^2)\overline{\otimes}B(\ell^2) \\ & e_{ij} & \longmapsto & e_{ij} \otimes e_{ij}. \end{array}$$

Théorème (C. A.)

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semi-groupe de multiplicateurs de Schur contractants sur $B(\ell^2)$ qui sont auto-adjoints sur S^2.

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ par

$$\begin{array}{rccc} \Delta \colon & B(\ell^2) & \longrightarrow & B(\ell^2) \overline{\otimes} B(\ell^2) \\ & e_{ij} & \longmapsto & e_{ij} \otimes e_{ij}. \end{array}$$

Théorème (C. A.)

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un w^*-semi-groupe de multiplicateurs de Schur contractants sur $B(\ell^2)$ qui sont auto-adjoints sur S^2.

Soit E un espace d'opérateurs OK-convexe.

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ par

$$\begin{array}{cccc} \Delta \colon & B(\ell^2) & \longrightarrow & B(\ell^2)\overline{\otimes}B(\ell^2) \\ & e_{ij} & \longmapsto & e_{ij} \otimes e_{ij}. \end{array}$$

Théorème (C. A.)

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un w^*-semi-groupe de multiplicateurs de Schur contractants sur $B(\ell^2)$ qui sont auto-adjoints sur S^2.

Soit E un espace d'opérateurs OK-convexe.

Alors $(T_t \otimes Id_E)_{t\geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $S^p(E)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Le tore non commutatif

Si $\theta \in \mathbb{R}$, rappelons que le tore non commutatif de dimension 2 est une algèbre de von Neumann $\mathbb{T}_\theta^2$ contenant deux unitaires U_1 et U_2 vérifiant

Le tore non commutatif

Si $\theta \in \mathbb{R}$, rappelons que le tore non commutatif de dimension 2 est une algèbre de von Neumann $\mathbb{T}_\theta^2$ contenant deux unitaires U_1 et U_2 vérifiant

$$U_1 U_2 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta} U_2 U_1.$$

Le tore non commutatif

Si $\theta \in \mathbb{R}$, rappelons que le tore non commutatif de dimension 2 est une algèbre de von Neumann $\mathbb{T}^2_\theta$ contenant deux unitaires U_1 et U_2 vérifiant

$$U_1 U_2 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta} U_2 U_1.$$

Un polynôme est une somme finie

$$x = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2} \quad \text{with} \quad \alpha_{m_1,m_2} \in \mathbb{C}$$

c'est à dire $\alpha_m = 0$ pour tous les indices $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ sauf un nombre fini.

Le tore non commutatif

Si $\theta \in \mathbb{R}$, rappelons que le tore non commutatif de dimension 2 est une algèbre de von Neumann $\mathbb{T}_\theta^2$ contenant deux unitaires U_1 et U_2 vérifiant

$$U_1 U_2 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta} U_2 U_1.$$

Un polynôme est une somme finie

$$x = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2} \quad \text{with} \quad \alpha_{m_1,m_2} \in \mathbb{C}$$

c'est à dire $\alpha_m = 0$ pour tous les indices $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ sauf un nombre fini.
L'action de la trace $\tau \colon \mathbb{T}_\theta^2 \to \mathbb{C}$ de $\mathbb{T}_\theta^2$ sur tout polynôme x est donnée par

$$\tau(x) = \alpha_{0,0}.$$

Multiplicateurs sur le tore non commutatif

Let $\varphi = (\varphi_{m_1,m_2})_{m_1,m_2 \in \mathbb{Z}}$ des nombres complexes.

Let $\varphi = (\varphi_{m_1,m_2})_{m_1,m_2 \in \mathbb{Z}}$ des nombres complexes.

On définit M_φ par

$$M_\varphi\Bigg(\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}\Bigg) = \sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}} \varphi_{m_1,m_2}\alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}$$

pour tout élément $x = \displaystyle\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}$ de $\mathbb{T}_\theta^2$.

Let $\varphi = (\varphi_{m_1,m_2})_{m_1,m_2 \in \mathbb{Z}}$ des nombres complexes.

On définit M_φ par

$$M_\varphi\Big(\sum_{m_1,m_2 \in \mathbb{Z}} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}\Big) = \sum_{m_1,m_2 \in \mathbb{Z}} \varphi_{m_1,m_2} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}$$

pour tout élément $x = \displaystyle\sum_{m_1,m_2 \in \mathbb{Z}} \alpha_{m_1,m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}$ de $\mathbb{T}_\theta^2$.

On dit que M_φ est un multiplicateur sur le tore quantique $\mathbb{T}_\theta^2$ si M_φ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{T}_\theta^2)$.

Semi-groupe de Poisson

Sur $\mathbb{T}^2$, on a des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t_1}$ et $\frac{\partial}{\partial t_2}$:

Semi-groupe de Poisson

Sur $\mathbb{T}^2$, on a des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t_1}$ et $\frac{\partial}{\partial t_2}$:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1 t_1} = \mathrm{i}m_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1 t_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_2 t_2} = 0.$$

Sur $\mathbb{T}^2$, on a des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t_1}$ et $\frac{\partial}{\partial t_2}$:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1 t_1} = \mathrm{i}m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1 t_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m_2 t_2} = 0.$$

Sur le tore non commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$, on définit des opérateurs de dérivées partielles $\delta_1, \delta_2 \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$

Semi-groupe de Poisson

Sur $\mathbb{T}^2$, on a des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t_1}$ et $\frac{\partial}{\partial t_2}$:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m_1 t_1} = \mathrm{i} m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i} m_1 t_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m_2 t_2} = 0.$$

Sur le tore non commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$, on définit des opérateurs de dérivées partielles $\delta_1, \delta_2 \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ qui agissent par

$$\delta_1(U_1^{m_1}) = \mathrm{i} m_1 U_1 \qquad \text{et} \qquad \delta_1(U_2^{m_2}) = 0$$

(de même pour δ_2).

Semi-groupe de Poisson

Sur $\mathbb{T}^2$, on a des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t_1}$ et $\frac{\partial}{\partial t_2}$:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m_1 t_1} = \mathrm{i} m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i} m_1 t_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m_2 t_2} = 0.$$

Sur le tore non commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$, on définit des opérateurs de dérivées partielles $\delta_1, \delta_2 \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ qui agissent par

$$\delta_1(U_1^{m_1}) = \mathrm{i} m_1 U_1 \qquad \text{et} \qquad \delta_1(U_2^{m_2}) = 0$$

(de même pour δ_2). On définit alors le laplacien

$$\Delta = \delta_1^2 + \delta_2^2$$

et le semi-groupe de Poisson $T_t = \mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}}$ sur $\mathbb{T}^2_\theta$.

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ par l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta\colon & \mathbb{T}^2_\theta & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}^2)\overline{\otimes}\mathbb{T}^2_\theta = L^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2_\theta) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

Analyticité du semi-groupe de Poisson vectoriel

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ par l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta \colon & \mathbb{T}^2_\theta & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}^2) \overline{\otimes} \mathbb{T}^2_\theta = L^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2_\theta) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$, on note $\pi_z \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ l'isomorphisme défini par

$$\pi_z(U_1^{m_1} U_2^{m_2}) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}.$$

Analyticité du semi-groupe de Poisson vectoriel

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes} L^\infty(G)$ par l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta \colon & \mathbb{T}^2_\theta & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}^2)\overline{\otimes}\mathbb{T}^2_\theta = L^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2_\theta) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$, on note $\pi_z \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ l'isomorphisme défini par

$$\pi_z(U_1^{m_1} U_2^{m_2}) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}^2_\theta$, on considère la fonction $\tilde{x} \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2_\theta$, $z \mapsto \pi_z(x)$.

Analyticité du semi-groupe de Poisson vectoriel

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ par l'application

$$\begin{array}{cccc} \Delta \colon & \mathbb{T}^2_\theta & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}^2) \overline{\otimes} \mathbb{T}^2_\theta = L^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2_\theta) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$, on note $\pi_z \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ l'isomorphisme défini par

$$\pi_z(U_1^{m_1} U_2^{m_2}) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}^2_\theta$, on considère la fonction $\tilde{x} \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2_\theta$, $z \mapsto \pi_z(x)$.

Théorème (C. A., 2015)

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de Poisson sur $\mathbb{T}^2_\theta$.

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ par l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta\colon & \mathbb{T}^2_\theta & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}^2)\overline{\otimes}\mathbb{T}^2_\theta = L^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2_\theta) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$, on note $\pi_z \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ l'isomorphisme défini par

$$\pi_z(U_1^{m_1} U_2^{m_2}) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}^2_\theta$, on considère la fonction $\tilde{x} \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2_\theta$, $z \mapsto \pi_z(x)$.

Théorème (C. A., 2015)

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de Poisson sur $\mathbb{T}^2_\theta$.

Soit E un espace d'opérateurs OK-convexe.

Analyticité du semi-groupe de Poisson vectoriel

On remplace le coproduit $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ par l'application

$$\begin{array}{rccc}\Delta \colon & \mathbb{T}^2_\theta & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}^2)\overline{\otimes}\mathbb{T}^2_\theta = L^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2_\theta) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x}\end{array}$$

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$, on note $\pi_z \colon \mathbb{T}^2_\theta \to \mathbb{T}^2_\theta$ l'isomorphisme défini par

$$\pi_z(U_1^{m_1} U_2^{m_2}) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} U_1^{m_1} U_2^{m_2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}^2_\theta$, on considère la fonction $\tilde{x} \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2_\theta$, $z \mapsto \pi_z(x)$.

Théorème (C. A., 2015)

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de Poisson sur $\mathbb{T}^2_\theta$.

Soit E un espace d'opérateurs OK-convexe.

Alors $(T_t \otimes Id_E)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe analytique borné sur $L^p(\mathbb{T}^d_\theta, E)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Coproduits

On a un "coproduit" qui s'étend aux espaces L^p associés :

Coproduits

On a un "coproduit" qui s'étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$

Coproduits

On a un “coproduit” qui s’étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$,
- pour les tores non commutatifs : $\Delta \colon \mathbb{T}_\theta^d \to L^\infty(\mathbb{T}^d) \overline{\otimes} \mathbb{T}_\theta^d$

Coproduits

On a un "coproduit" qui s'étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$,
- pour les tores non commutatifs : $\Delta \colon \mathbb{T}^d_\theta \to L^\infty(\mathbb{T}^d) \overline{\otimes} \mathbb{T}^d_\theta$,
- pour $B(\ell^2)$: $\Delta \colon B(\ell^2) \to B(\ell^2) \overline{\otimes} B(\ell^2)$

Coproduits

On a un "coproduit" qui s'étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$,
- pour les tores non commutatifs : $\Delta \colon \mathbb{T}_\theta^d \to L^\infty(\mathbb{T}^d) \overline{\otimes} \mathbb{T}_\theta^d$,
- pour $B(\ell^2)$: $\Delta \colon B(\ell^2) \to B(\ell^2) \overline{\otimes} B(\ell^2)$,
- pour d'autres algèbres de von Neumann...

Coproduits

On a un "coproduit" qui s'étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$,
- pour les tores non commutatifs : $\Delta \colon \mathbb{T}^d_\theta \to L^\infty(\mathbb{T}^d) \overline{\otimes} \mathbb{T}^d_\theta$,
- pour $B(\ell^2)$: $\Delta \colon B(\ell^2) \to B(\ell^2) \overline{\otimes} B(\ell^2)$,
- pour d'autres algèbres de von Neumann...

Problème

Existe-t-il des axiomes qui permettent d'englober ces différentes situations dans un même contexte permettant de faire de l'analyse sur les espaces L^p ?

Coproduits

On a un "coproduit" qui s'étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$,
- pour les tores non commutatifs : $\Delta \colon \mathbb{T}^d_\theta \to L^\infty(\mathbb{T}^d) \overline{\otimes} \mathbb{T}^d_\theta$,
- pour $B(\ell^2)$: $\Delta \colon B(\ell^2) \to B(\ell^2) \overline{\otimes} B(\ell^2)$,
- pour d'autres algèbres de von Neumann...

Problème

Existe-t-il des axiomes qui permettent d'englober ces différentes situations dans un même contexte permettant de faire de l'analyse sur les espaces L^p ?

Ce contexte devrait inclure le cas des groupes quantiques *compacts*.

Coproduits

On a un “coproduit” qui s'étend aux espaces L^p associés :

- pour les groupes compacts : $\Delta_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$,
- pour les tores non commutatifs : $\Delta \colon \mathbb{T}^d_\theta \to L^\infty(\mathbb{T}^d)\overline{\otimes}\mathbb{T}^d_\theta$,
- pour $B(\ell^2)$: $\Delta \colon B(\ell^2) \to B(\ell^2)\overline{\otimes}B(\ell^2)$,
- pour d'autres algèbres de von Neumann...

Problème

Existe-t-il des axiomes qui permettent d'englober ces différentes situations dans un même contexte permettant de faire de l'analyse sur les espaces L^p ?

Ce contexte devrait inclure le cas des groupes quantiques *compacts*.

A suivre...

Ce fut un grand plaisir de vous présenter ce travail !