Quelques aperçus du programme de Langlands

Vincent Lafforgue

CNRS et MAPMO, Université d'Orléans

CIRM, 3 novembre 2015

Articles d'introduction au programme de Langlands :
Stephen Gelbart, An elementary introduction to the Langlands program.
Ed Frenkel, Lectures on the Langlands program and conformal field theory.
Article sur le travail exposé : Introduction aux chtoucas pour les groupes réductifs et à la paramétrisation de Langlands globale.

On commence par un panorama du programme de Langlands (orienté vers les algèbres d'opérateurs). Il y a trop de personnes à citer pour pouvoir le faire dans ce court panorama.

Le programme de Langlands concerne les deux types de corps “globaux” : corps de nombres et corps de fonctions.
Un corps de nombres est une extension finie de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire un corps obtenu en ajoutant à $\mathbb{Q}$ des racines d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
Un corps de fonctions F est le corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective lisse X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.
Si q est un nombre premier, $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. En général q est une puissance d'un nombre premier et tous les corps finis de cardinal q sont isomorphes entre eux, bien que non canoniquement, d'où la notation $\mathbb{F}_q$.
L'exemple le plus simple est $F = \mathbb{F}_q(t)$ qui est le corps des fonctions rationnelles sur la droite projective $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \infty$ (où $\mathbb{A}^1$ est la droite affine).

On appelle place d'un corps global F une norme (à équivalence près) c'est-à-dire une façon de le compléter en un corps dit "local". Par exemple les places de $\mathbb{Q}$ sont

- la place archimédienne, en laquelle le complété est $\mathbb{R}$ et la norme est la valeur absolue usuelle,
- pour tout nombre premier p, la place p en laquelle le complété est $\mathbb{Q}_p$ et la norme d'un nombre $r \in \mathbb{Q}^*$ est p^{-n_p}, où $n_p \in \mathbb{Z}$ est l'exposant de p dans la décomposition de r en un produit de facteurs premiers.

En toute place v on note F_v le corps local complété (qui est donc $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{R}$ pour le corps global $\mathbb{Q}$). Une place v est dite archimédienne si F_v est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ces places sont en nombre fini pour les corps de nombres et absentes pour les corps de fonctions. Pour toute place non archimédienne on note $\mathcal{O}_{F_v}$ son anneau d'entiers (qui est donc $\mathbb{Z}_p$ si $F_v = \mathbb{Q}_p$).

Soit F le corps des fonctions sur une courbe projective lisse X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Alors les places de F correspondent aux points fermés de X. Dans le cas où $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \infty$, les places sont

- la place ∞ (en laquelle le complété est $F_q((t^{-1}))$)
- les places associées aux polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{F}_q[t]$ (qui est l'anneau des fonctions sur $\mathbb{A}^1$).

On voit que $\mathbb{F}_q[t]$ est un anneau principal comme $\mathbb{Z}$ et que les polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{F}_q[t]$ jouent un rôle analogue à celui des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. Cependant ∞ était juste un choix arbitraire d'un point dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ et ne joue pas un rôle particulier comme la place archimédienne de $\mathbb{Q}$.

L'anneau des adèles $\mathbb{A}$ est le produit restreint des F_v, formé des éléments de $\prod_v F_v$ qui appartiennent à $\mathcal{O}_{F_v}$ pour tous les v sauf un nombre fini. L'espace vectoriel $\mathfrak{Aut}$ des formes automorphes pour G est l'espace des fonctions sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ (vérifiant certaines conditions). Il y a plusieurs variantes suivant les conditions qu'on impose. On peut prendre par exemple

$$\mathfrak{Aut} = L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C}),$$

qui est une représentation unitaire de $G(\mathbb{A})$ par translations à droite. Une représentation automorphe est une sous-représentation irréductible de $\mathfrak{Aut}$.

Lorsque $F = \mathbb{Q}$ la partie sans niveau (c'est-à-dire invariante par $\prod_p G(\mathbb{Z}_p)$) donne l'espace plus familier $L^2(G(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ vu comme représentation de $G(\mathbb{R})$ et du produit des algèbres de Hecke $C_c(G(\mathbb{Z}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)/G(\mathbb{Z}_p), \mathbb{C})$.

Soit G un groupe réductif sur un corps global F.
La correspondance de Langlands relie

- l'espace vectoriel $\mathfrak{Aut}$ des formes automorphes pour G
- les paramètres de Langlands globaux σ, définis page suivante.

Plus précisément on conjecture

- une décomposition canonique $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_\sigma \mathcal{H}_\sigma$ de représentations de $G(\mathbb{A})$, indéxée par les paramètres de Langlands globaux σ (de façon compatible avec l'isomorphisme de Satake en toutes les places non ramifiées en un sens que l'on rappellera plus tard),
- des formules de multiplicités pour les $\mathcal{H}_\sigma$ (comme représentations de $G(\mathbb{A})$), proposées par Arthur en général.

On supposera G déployé pour simplifier.

On note $\widehat{G}$ le groupe dual de Langlands de G. Il est caractérisé par le fait que ses racines et ses poids sont les coracines et les copoids de G, et vice-versa. Exemples :

G	$\widehat{G}$
GL_n	GL_n
SL_n	PGL_n
SO_{2n+1}	Sp_{2n}
Sp_{2n}	SO_{2n+1}
SO_{2n}	SO_{2n}

et si G est un des cinq groupes exceptionnels, $\widehat{G}$ est du même type.

Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique du corps de fonctions F. On note $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de ses automorphismes, qui est profini.

Définition. Un paramètre de Langlands global est une classe de conjugaison de morphismes $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ continus et semi-simples.

On utilise $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et non $\mathbb{C}$ car les morphismes continus vers $\widehat{G}(\mathbb{C})$ sont tous d'image finie et ne suffiraient pas.

En fait pour la correspondance de Langlands sur les corps de nombres on doit se restreindre aux formes automorphes dont le caractère infinitésimal aux places archimédiennes est algébrique, ou bien remplacer le groupe de Galois par un groupe conjectural proposé par Langlands. Dans ce cas l'énoncé de la correspondance de Langlands est moins explicite mais a quand même pour conséquence la conjecture de fonctorialité de Langlands, que l'on va expliquer maintenant.

On se donne un deuxième groupe H et un morphisme $\rho : \widehat{G} \to \widehat{H}$. Tout paramètre de Langlands dans $\widehat{G}$ donne par composition avec ρ un paramètre de Langlands dans $\widehat{H}$. On s'attend donc à pouvoir associer à toute représentation automorphe pour G une représentation automorphe pour H (de façon compatible avec l'isomorphisme de Satake en les places non ramifiées).

Conjecture de fonctorialité de Langlands. Soit $\rho : \widehat{G} \to \widehat{H}$. On espère posséder

- pour toute place v une représentation π_v de $G(F_v) \times H(F_v)$
- une forme linéaire λ (non bornée) $G(F) \times H(F)$-invariante sur $\bigotimes_v \pi_v$.

Cela fournirait un morphisme

$$\Theta : \bigotimes_v \pi_v \to \mathrm{F}^{\mathrm{ns}}\Big(\big(G(F) \times H(F)\big)\backslash\big(G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A})\big), \mathbb{C}\Big)$$

qui à $x \in \bigotimes_v \pi_v$ associerait la fonction $g \mapsto \lambda(gx)$.
Les opérateurs (non bornés) de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ vers $L^2(H(F)\backslash H(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ ayant pour noyaux les fonctions dans l'image de Θ réaliseraient alors la fonctorialité de G vers H.

Des cas particuliers de fonctoralité sont donnés par la correspondance thêta.
Un de ces cas est le suivant : $G = SO_{2n}$, $H = Sp_{2n}$, $\rho : SO_{2n} \to SO_{2n+1}$ l'inclusion évidente entre leurs groupes duaux. Comme le produit tensoriel d'une forme quadratique et d'une forme symplectique est une forme symplectique on a une inclusion $SO_{2n} \times Sp_{2n} \subset Sp_{4n^2}$. Alors

- pour toute place v, π_v est la restriction à $SO_{2n}(F_v) \times Sp_{2n}(F_v)$ de la représentation de Schrödinger de $Sp_{4n^2}(F_v)$ sur $L^2((F_v)^{2n^2}, \mathbb{C})$,
- la forme linéaire λ sur $\bigotimes_v \pi_v = L^2(\mathbb{A}^{2n^2}, \mathbb{C})$ est donnée par $\lambda(f) = \sum_{x \in F^{2n^2}} f(x)$.

Par la formule de Poisson λ est invariante par $Sp_{4n^2}(F)$ et donc par $SO_{2n}(F) \times Sp_{2n}(F)$.
En dehors de la correspondance thêta la conjecture de fonctorialité constitue un problème extrêmement difficile de quantification et de formule de Poisson non linéaire.

On note N le radical unipotent d'un Borel de G (si $G = GL_r$, N est formé des matrices triangulaires supérieures avec diagonale 1). On fixe χ un caractère non dégénéré de $N(\mathbb{A})$ trivial sur $N(F)$. On considère la fonctionnelle de Whittaker (non bornée)

$$\lambda_\chi : L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f\chi.$$

Une représentation automorphe est dite générique si la restriction de λ_χ à l'espace de cette représentation est non nulle.

Conjecture de Ramanujan-Petersson : les représentations automorphes génériques sont tempérées (comme représentations de $G(\mathbb{A})$).

On connaît des énoncés approchés (grâce auxquels cette conjecture est impliquée par la conjecture de fonctorialité). Cette conjecture équivaut sans doute au fait que les coefficients de matrice entre λ_χ et les éléments de $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ sont presque L^2 (sur $N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$).

Hypothèse de Riemann généralisée. Contrairement aux énoncés précédents qui concernaient tous les groupes G elle s'énonce avec GL_r. A toute représentation automorphe cuspidale sur GL_r on associe une fonction L définie comme un produit de facteurs locaux en toutes les places. C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (avec des pôles en 0 et 1 dans le cas particulier de la fonction zêta usuelle qui correspond à la forme automorphe triviale pour GL_1). L'hypothèse de Riemann généralisée affirme que ses zéros sont sur la droite $Re = 1/2$.
La conjecture est démontrée sur les corps de fonctions (par la correspondance de Langlands et Weil II mais cette méthode n'a aucune chance de passer aux corps de nombres, en particulier pour les formes automorphes non algébriques).
En général elle équivaut à la positivité d'une forme hermitienne sur $\mathfrak{Aut}$, qui dans le cas des corps de fonctions est liée au théorème de l'indice de Hodge.
Ceci termine le court panorama des conjectures du programme de Langlands.

Dans la suite on expose un travail récent où l'on construit, pour tout groupe réductif G sur un corps de fonctions (et même pour les groupes métaplectiques), la décomposition canonique $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_\sigma \mathcal{H}_\sigma$.
Dans le cas où $G = GL_r$ cela était déjà connu par Drinfeld pour $r = 2$ et Laurent Lafforgue pour r arbitraire (par une méthode différente utilisant la formule des traces d'Arthur-Selberg).

Remerciements. Ce travail est issu d'un projet avec Jean-Benoît Bost. Il n'existerait pas non plus sans de très nombreuses discussions avec Alain Genestier. Je n'aurais jamais pu travailler sur ce sujet éloigné de ma spécialité d'origine sans la précieuse liberté de chercher permise par le CNRS. Je remercie mes collègues du MAPMO pour leur soutien.

Il est commode de fixer un niveau et pour simplifier on va prendre le niveau trivial. Pour les corps de fonctions toutes les places sont non archimédiennes et possèdent donc un anneau d'entiers $\mathcal{O}_{F_v}$. On note $\mathbb{O} = \prod_v \mathcal{O}_{F_v}$ l'anneau des adèles entiers. Alors l'espace des formes automorphes sans niveau est $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{C})$. On a

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}) = \mathrm{Bun}_G(F_q)$$

où $\mathrm{Bun}_G(F_q)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes des G-torseurs sur X (i.e. G-fibrés principaux) sur X. En effet

- un G-torseur sur X trivialisé au point générique est déterminé par un point de $G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}) = \prod_v G(F_v)/G(\mathcal{O}_{F_v})$, c'est-à-dire la donnée d'une structure entière en chaque place v,
- deux trivialisations d'un G-torseur au point générique diffèrent par $G(F)$.

En fait comme les G-torseurs sur X peuvent avoir des automorphismes, $\mathrm{Bun}_G(F_q)$ est un groupoïde discret, c'est-à-dire un ensemble dont les objets ont des groupes d'automorphismes finis. Il est égal au groupoïde des points sur $\mathbb{F}_q$ du champ Bun_G sur $\mathbb{F}_q$ dont les S-points (avec S un schéma sur $\mathbb{F}_q$) classifient les G-torseurs de rang r sur $X \times S$. Un champ est comme une variété dont les points ont des groupes d'automorphismes (par exemple le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique est un champ).
Pour $G = GL_r$ un G-torseur est équivalent à un fibré vectoriel de rang r (en associant à celui-ci le GL_r-torseur de ses bases).

On note Z le centre de G et Ξ un sous-groupe d'indice fini dans $\mathrm{Bun}_Z(\mathbb{F}_q)$ (si G a un centre fini on peut donc prendre Ξ trivial). Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas q. On note

$$\mathfrak{Aut} = C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel de dimension finie formé des fonctions cuspidales sur $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi$. Une forme automorphe est dite cuspidale si elle ne peut s'obtenir par induction parabolique (i.e. série d'Eisentein) à partir d'aucun sous-groupe de Levi propre de G. Ces formes automorphes forment donc les "briques élémentaires" et il suffit de les comprendre. On les prend à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et non $\mathbb{C}$ car on va utiliser la cohomologie ℓ-adique et que les paramètres de Langlands qu'on veut construire sont aussi à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.
On va construire une décomposition *canonique* $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$ indexée par les paramètres de Langlands σ.

Voici une autre façon de voir les opérateurs de Hecke (non ramifiés) en une place v. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux G-torseurs sur X on dit que $\mathcal{G}'$ est une modification de $\mathcal{G}$ en v si on se donne un isomorphisme entre leurs restrictions à $X \setminus v$. Alors leur position relative $[\mathcal{G}' : \mathcal{G}]$ est un copoids dominant λ de G (lorsque $G = GL_r$ il s'agit du r-uplet des diviseurs élémentaires). On introduit ainsi un opérateur de Hecke

$$T_{\lambda,v} : C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$
$$f \mapsto [\mathcal{G} \mapsto \sum_{\mathcal{G}', [\mathcal{G}' : \mathcal{G}] = \lambda} f(\mathcal{G}')]$$

où la somme (finie) porte sur les modifications $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ en v avec position relative λ. Ces opérateurs commutent entre eux et forment l'algèbre de Hecke (non ramifiée)

$$\mathcal{H}_v = C_c(G(\mathcal{O}_{F_v}) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_{F_v}), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

qui est commutative et agit donc sur $\mathfrak{Aut} = C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Nous allons construire une décomposition canonique

$$\mathfrak{Aut} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}$$

où la somme porte sur les paramètres de Langlands σ non ramifiés. Cette décomposition sera respectée par l'action des opérateurs de Hecke. En fait on va construire une algèbre commutative $\mathcal{B}$ contenant les $\mathcal{H}_v$ telle que

- $\mathcal{B}$ agit naturellement sur $\mathfrak{Aut}$
- chaque caractère ν de $\mathcal{B}$ correspond de manière unique à un paramètre de Langlands σ.

Comme $\mathcal{B}$ est commutative on aura une décomposition spectrale canonique

$$\mathfrak{Aut} = \bigoplus_{\nu} \mathfrak{H}_{\nu}$$

où ν parcourt les caractères de $\mathcal{B}$ (trigonalisation simultanée d'une famille d'opérateurs qui commutent). En associant à tout ν un paramètre de Langlands σ on en déduira la décomposition $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}$ attendue.

La décomposition ci-dessus $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$ sera compatible avec l'isomorphisme de Satake en toute place v de X, au sens suivant.
L'isomorphisme de Satake est un isomorphisme canonique

$$[V] \mapsto T_{V,v}$$

de l'anneau des représentations de $\widehat{G}$ vers l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_v$ (si V est une représentation irréductible de $\widehat{G}$, $T_{V,v}$ est une combinaison des $T_{\lambda,v}$ pour λ poids de V).
On note $\mathrm{Frob}_v \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ un élément de Frobenius en v c'est à-dire l'image d'un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ relevant $1 \in \mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v) = \widehat{\mathbb{Z}}$ (où k_v désigne le corps résiduel).
Alors la compatibilité de la décomposition $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$ avec Satake signifie que pour toute place v et toute représentation V de $\widehat{G}$, $T_{V,v}$ préserve cette décomposition et agit sur $\mathfrak{H}_\sigma$ par multiplication par $\mathrm{Tr}_V(\sigma(\mathrm{Frob}_v))$.

Pour construire la décomposition $\mathfrak{Aut} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$ on va utiliser la cohomologie ℓ-adique des champs de chtoucas.

La cohomologie ℓ-adique des variétés (sur des corps de caractéristique $\neq \ell$) est très proche de la cohomologie de Betti des variétés complexes, mais elle est à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Elle a nécessité l'introduction par Grothendieck de la notion de topos, qui est une généralisation extraordinaire de la notion d'espace topologique.

Dans un espace topologique X on a la catégorie dont

- les objets sont les ouverts $U \subset X$
- les flèches $U \to V$ sont les inclusions $U \subset V$

et on a la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts.

En considérant une catégorie abstraite avec une notion de recouvrement vérifiant certains axiomes on obtient la notion de site.

Un topos est la catégorie des faisceaux d'ensemble sur un site.

Pour définir la cohomologie étale d'une variété algébrique X (lisse pour simplifier) on considère le site étale dont les objets sont les morphismes étales

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

(un morphisme est étale si sa différentielle est partout inversible), dont les flèches sont données par les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

avec toutes les flèches étales et où la notion de recouvrement est évidente. La cohomologie étale est définie à coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, d'où $\mathbb{Z}_\ell$ en passant à la limite, et $\mathbb{Q}_\ell$ en inversant ℓ.

Soit I un ensemble fini et $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$ une représentation irréductible de $\widehat{G}^I$ (autrement dit chaque W_i est une représentation irréductible de $\widehat{G}$).
Pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ on note $\mathrm{Frob}_S : S \to S$ le morphisme qui agit par $f \mapsto f^q$ au niveau des fonctions : $\mathrm{Frob}_S^*(f) = f^q$.
On définit $\mathrm{Cht}_{I,W}$ comme le champ de Deligne-Mumford (=orbifold) sur X^I dont les points sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$ classifient les chtoucas, c'est-à-dire

- des points $(x_i)_{i \in I} : S \to X^I$, appelés les pattes du chtouca,
- un G-torseur $\mathcal{G}$ sur $X \times S$,
- un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{(X \times S) \smallsetminus (\bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{G})\big|_{(X \times S) \smallsetminus (\bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i})}$$

  où Γ_{x_i} désigne le graphe de x_i, tel que la position relative en x_i soit bornée par le copoids dominant de G correspondant au poids dominant de W_i.

On note $H_{I,W}$ le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel égal à la partie Hecke-finie de la cohomologie ℓ-adique d'intersection (en degré moitié) de la fibre de $\mathrm{Cht}_{I,W}/\Xi$ au-dessus du point générique de X^I (ou, de façon en fait équivalente, du point générique de la diagonale $X \subset X^I$).
On remarque que ce qui compte n'est pas l'espace $\mathrm{Cht}_{I,W}/\Xi$ mais le morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{Cht}_{I,W}/\Xi \\ \big\downarrow \\ X^I \end{array}$$

(qui à un chtouca associe le I-uplet de ses pattes). Depuis Grothendieck les morphismes sont plus importants que les espaces.
Le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel $H_{I,W}$ est muni d'une action de $(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F))^I$.

Pour $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$ (la représentation triviale), on a un isomorphisme

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} \simeq C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \mathfrak{Aut}$$

car le champ des chtoucas sans pattes est discret et égal à $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$. On veut donc construire une décomposition

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma .$$

L'idée est de considèrer $H_{\emptyset,\mathbf{1}}$ comme l'espace des états du vide et $H_{I,W}$ comme l'espace des états à $\sharp I$ particules avec des "spins" donnés par W. Alors $\mathcal{B} \subset \mathrm{End}(H_{\emptyset,\mathbf{1}})$ sera formé de "matrices de scattering" obtenues en créant des particules, en les faisant interagir, puis en les annihilant.

L'équivalence de Satake géométrique (due à Lusztig, Drinfeld, Ginzburg, et Mirkovic–Vilonen dans la lignée directe des travaux de Grothendieck et de ses élèves) fournit une équivalence canonique de catégories tensorielles entre

- la catégorie des faisceaux pervers sur le "champ" des modifications de G-torseurs sur le voisinage formel D_x d'un point $x \in X$, à savoir

$$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}' \text{ deux } G-\text{torseurs sur le disque formel } D_x$$
$$\text{et } \phi \text{ un isomorphisme entre leurs restrictions à } D_x \setminus x\}$$

- la catégorie tensorielle des représentations de $\widehat{G}$.

La structure tensorielle sur la première catégorie est obtenue en considérant des modifications en deux points x, y de X et en les "fusionnant".
En fait cela *définit* $\widehat{G}$ à partir de G (grâce à un foncteur fibre).
L'équivalence de Satake géométrique permet alors de définir $H_{I,W}$ de façon fonctorielle en W, et compatible à la fusion des pattes.

a) Fonctorialité de $H_{I,W}$ en W

Pour tout ensemble fini I,

$$W \mapsto H_{I,W}, \quad u \mapsto \mathcal{H}(u)$$

est un foncteur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-linéaire de la catégorie des représentations de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$.
Cela signifie que pour tout morphisme

$$u : W \to W'$$

de représentations de $(\widehat{G})^I$, on a un morphisme

$$\mathcal{H}(u) : H_{I,W} \to H_{I,W'}$$

de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$.

b) Fusion des pattes pour les $H_{I,W}$

Pour toute application $\zeta : I \to J$ et toute représentation W de $(\widehat{G})^I$, on possède un isomorphisme

$$\chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta}$$

où W^ζ désigne la représentation de $(\widehat{G})^J$ sur W obtenue en composant avec le morphisme diagonal

$$(\widehat{G})^J \to (\widehat{G})^I, (g_j)_{j\in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i\in I}.$$

Cet isomorphisme χ_ζ est fonctoriel en W, $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^J$-équivariant, et compatible avec la composition, c'est-à-dire $\chi_{\zeta\circ\zeta'} = \chi_\zeta \circ \chi_{\zeta'}$.

Deux exemples pour b).
Si W_1 et W_2 sont deux représentations de $\widehat{G}$, on a par b) un isomorphisme canonique

$$H_{\{1,2\},W_1 \boxtimes W_2} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},W_1 \otimes W_2}$$

associé à l'application évidente $\{1,2\} \to \{0\}$. On note la différence entre $W_1 \boxtimes W_2$ qui est une représentation de $(\widehat{G})^2$ et $W_1 \otimes W_2$ qui est une représentation de $\widehat{G}$.
Un autre exemple d'application de b) est l'isomorphisme

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},\mathbf{1}}$$

associé à l'application évidente $\emptyset \to \{0\}$ (l'idée est que $H_{\emptyset,\mathbf{1}}$ *resp.* $H_{\{0\},\mathbf{1}}$ est la cohomologie du champ de chtoucas sans pattes *resp.* avec une patte inutile et qu'elles sont identiques). Donc $\mathfrak{Aut} = H_{\{0\},\mathbf{1}}$ et nous sommes ramenés à construire une décomposition

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}.$$

Construction des opérateurs d'excursion (ou de "scattering").

Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G})$ on peut trouver une représentation W de $(\widehat{G})^I$ et $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de $\widehat{G}$ tels que

$$f((g_i)_{i \in I}) = \langle \xi, (g_i)_{i \in I} \cdot x \rangle. \tag{0.1}$$

Soit $(\gamma_i)_{i \in I} \in (\mathrm{Gal}(\overline{F}/F))^I$. L'endomorphisme $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ de $H_{\{0\},\mathbf{1}} = \mathfrak{Aut}$ est défini comme la composée

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} H_{\{0\},W^\zeta} \xrightarrow{\sim} H_{I,W} \xrightarrow{(\gamma_i)_{i \in I}} H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},W^\zeta} \xrightarrow{\mathcal{H}(\xi)} H_{\{0\},\mathbf{1}}$$

où $\zeta : I \to \{0\}$ est l'application évidente, de sorte que W^ζ est simplement W muni de la représentation diagonale de $\widehat{G}$, et $x : \mathbf{1} \to W^\zeta$ et $\xi : W^\zeta \to \mathbf{1}$ sont considérés ici comme des morphismes de représentations de $\widehat{G}$. On montre que $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ ne dépend pas du choix de W, x, ξ vérifiant (0.1), et on le note aussi $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$.

Les opérateurs de Hecke non ramifiés sont des cas particuliers d'opérateurs d'excursion.

En effet soit V une représentation irréductible de $\widehat{G}$. On prend

$$I = \{1, 2\} \text{ et } f : (g_1, g_2) \mapsto \mathrm{Tr}_V(g_1 g_2^{-1}) \text{ dans } \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G}).$$

Par un argument géométrique (une sorte de calcul d'intersection de cycles algébriques dans le champ de chtoucas) on montre que pour toute place v,

$$T_{V,v} = S_{\{1,2\},f,(\mathrm{Frob}_v,1)}.$$

Cette égalité joue un rôle très important dans des arguments techniques, et elle permet de justifier le fait que la décomposition que nous allons construire est compatible avec l'isomorphisme de Satake en toutes les places v de X.

Une heuristique approximative est que

$$H_{I,W} \stackrel{?}{=} \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma \otimes W_{\sigma^I},$$

où W_{σ^I} est la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$ obtenue en composant la représentation W de $\widehat{G}^I$ avec le morphisme $\sigma^I : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I \to \widehat{G}^I$.
Dans cette heuristique l'endomorphisme $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}} = S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ de

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} \stackrel{?}{=} \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathbf{1} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma$$

agit sur $\mathfrak{H}_\sigma$ par la composée

$$\mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathfrak{H}_\sigma} \otimes x} \mathfrak{H}_\sigma \otimes W \xrightarrow{(\sigma(\gamma_i))_{i\in I}} \mathfrak{H}_\sigma \otimes W \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathfrak{H}_\sigma} \otimes \xi} \mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathbf{1}$$

c'est-à-dire par le scalaire

$$\langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i\in I} \cdot x \rangle = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I}).$$

A l'aide des propriétés a) et b) on montre que

1) l'algèbre $\mathcal{B}$ d'endomorphismes de $H_{\{0\},\mathbf{1}} = \mathfrak{Aut}$ engendrée par les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ quand I, f et $(\gamma_i)_{i\in I}$ varient est commutative et les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ vérifient entre eux un certain nombre de relations,

2) pour chaque caractère ν de $\mathcal{B}$ il existe un unique paramètre de Langlands σ tel que pour tous I, f et $(\gamma_i)_{i\in I}$,

$$\nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I}).$$

Comme $\mathcal{B}$ est commutative on a une décomposition spectrale canonique $H_{\{0\},\mathbf{1}} = \bigoplus_\nu \mathfrak{H}_\nu$ où ν parcourt les caractères de $\mathcal{B}$ (trigonalisation simultanée d'une famille d'opérateurs qui commutent). En associant à tout ν un unique paramètre de Langlands σ comme dans 2) on en déduit la décomposition $H_{\{0\},\mathbf{1}} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$ attendue.

Un résultat de théorie géométrique des invariants.

On considère le quotient grossier $(\widehat{G})^n /\!\!/ \widehat{G}$, où $\widehat{G}$ agit par conjugaison diagonale, c'est-à-dire que $h \in \widehat{G}$ agit par $(g_1, ..., g_n) \mapsto (hg_1 h^{-1}, ..., hg_n h^{-1})$.

D'après Richardson, les points de $(\widehat{G})^n /\!\!/ \widehat{G}$ correspondent aux classes de conjugaison de n-uplets semi-simples d'éléments de $\widehat{G}$ (un n-uplet est dit semi-simple si pour tout sous-groupe parabolique qui le contient il existe un Levi associé qui le contient).

Autrement dit pour tout n-uplet $(g_1, ..., g_n)$ d'éléments de $\widehat{G}$, sa classe de conjugaison $\{(hg_1 h^{-1}, ..., hg_n h^{-1}), h \in \widehat{G}\}$ est fermée si et seulement ce n-uplet est semi-simple. Cela est bien connu pour $n = 1$: la classe de conjugaison d'un élément est fermée si et seulement si cet élément est semi-simple.

Idée de la preuve de 2). On se donne un caractère ν de $\mathcal{B}$. On veut montrer l'unicité et l'existence de σ paramètre de Langlands vérifiant

$$\nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I}) \tag{0.2}$$

pour tous I, f et $(\gamma_i)_{i\in I}$. En faisant varier f on voit que (0.2) détermine $(\sigma(\gamma_i))_{i\in I}$ dans $\widehat{G}\backslash(\widehat{G})^I/\widehat{G}$.
Or en prenant $I = \{0, ..., n\}$, on a un isomorphisme

$$(\widehat{G})^n /\!\!/ \widehat{G} \xrightarrow{\sim} \widehat{G}\backslash(\widehat{G})^{\{0,\ldots,n\}}/\widehat{G}, \quad (g_1, ..., g_n) \mapsto (1, g_1, ..., g_n).$$

Donc en prenant de plus $\gamma_0 = 1$ on voit pour tous n et $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$, (0.2) détermine la classe de conjugaison semi-simplifiée de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$.
Pour simplifier on suppose que l'image de σ est finie. Alors en prenant n et $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tels que $\mathrm{Image}(\sigma) = \{\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n)\}$ on voit que σ est déterminé à conjugaison près par la classe de conjugaison (semi-simplifiée) de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$. Les relations vérifiées par les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ montrent que σ est un morphisme de groupes .

Idée de la preuve de 2) en général.
On ne suppose plus que l'image de σ est finie.
Unicité de σ. En choisissant n et $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tels que $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$ engendre un sous-groupe Zariski dense de l'image de σ, on voit que la classe de conjugaison de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n), \sigma(\gamma))$ pour γ variable détermine σ. Cela détermine donc σ comme paramètre de Langlands, c'est-à-dire comme classe de conjugaison de morphismes continus et semi-simples $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.
Existence de σ. On choisit $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tel que la classe de conjugaison semi-simplifiée de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$ engendre un sous-groupe fermé de $\widehat{G}$ le plus grand possible avec un centralisateur le plus petit possible. Alors les classes de conjugaison de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n), \sigma(\gamma))$ pour γ variable permettent de construire σ comme ci-dessus et les relations vérifiées par les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ montrent qu'un tel σ est un morphisme de groupes.

La vraie heuristique pour les $H_{I,W}$ est que pour tout σ il existe une représentation $\mathfrak{A}_\sigma$ de son centralisateur $S_\sigma \subset \widehat{G}$, de sorte que

$$H_{I,W} \stackrel{?}{=} \bigoplus_\sigma \left(\mathfrak{A}_\sigma \otimes W_{\sigma^I}\right)^{S_\sigma}$$

(et donc en particulier pour $W = \mathbf{1}$, $\mathfrak{H}_\sigma = (\mathfrak{A}_\sigma)^{S_\sigma}$).
Grâce à une idée de Drinfeld on peut montrer un résultat avoisinant. On note Reg la représentation régulière gauche de $\widehat{G}$. On peut munir $H_{\{0\},\mathrm{Reg}}$

a) d'une structure de $\mathcal{O}$-module sur "l'espace" des morphismes $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}$,

b) d'une action de $\widehat{G}$ compatible avec la conjugaison par $\widehat{G}$ sur l'espace des σ ci-dessus.

Alors $\mathfrak{A}_\sigma$ est la fibre de $H_{\{0\},\mathrm{Reg}}$ en σ.
Quand dans une décomposition spectrale les points du spectre ont des groupes d'automorphismes, les multiplicités doivent être des représentations de ces groupes.

Tout ce qui précède est également valable avec un niveau (un sous-schéma fini N de X). On note $K_N = \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$. On a alors une décomposition canonique de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$-modules

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma, \tag{0.3}$$

avec σ paramètre de Langlands global non ramifié sur $X \smallsetminus N$. Si G est déployé, $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) = G(F) \backslash G(\mathbb{A})/K_N$.
Dans un article en cours de rédaction, Alain Genestier et moi-même montrons la paramétrisation locale à semi-simplification près et la compatibilité local-global. Autrement dit, si $\pi = \bigotimes \pi_v$ est une représentation irréductible de $G(\mathbb{A})$ telle que π^{K_N} apparaisse dans $\mathfrak{H}_\sigma$ alors le semi-simplifié de $\sigma\big|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ ne dépend que de π_v.

Remarques finales.
1) Dans ce travail on obtient une paramétrisation mais on ne calcule pas les multiplicités (on ne sait même pas montrer qu'elles sont non nulles). Les formules de trace permettent de calculer des multiplicités pour les espaces de formes automorphes ou de cohomologie (Drinfeld, Laumon, Laurent Lafforgue, Ngo Bao Chau, Lau, Ngo Dac Tuan, Badulescu, Roche).
2) On espère que tous les paramètres de Langlands σ apparaissant dans cette décomposition proviennent de paramètres d'Arthur elliptiques. Cela impliquerait la conjecture de Ramanujan-Petersson (sur les corps de fonctions). On espère même une paramétrisation de l'espace des formes automorphes discrètes (et pas seulement cuspidales) indexée par des paramètres d'Arthur elliptiques.

3) On espère que la décomposition

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$$

est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (au lieu de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$) et indépendante de ℓ (et du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}_\ell}$). La question a un sens car dans un article récent Drinfeld définit l'ensemble des σ indépendamment de ℓ (et du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}_\ell}$).
En fait on espère que tous les opérateurs d'excursion sont définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (et si les considère sur $\mathbb{C}$ ils seraient alors normaux donc diagonalisables, autrement dit $\mathcal{B} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ serait une C^*-algèbre commutative et la décomposition ci-dessus serait une diagonalisation au lieu d'être seulement une trigonalisation). On pourrait montrer ce qui précède si on savait construire les opérateurs d'excursion de façon motivique.
Les motifs de Grothendieck forment une catégorie $\overline{\mathbb{Q}}$-linéaire et unifient les cohomologies ℓ-adiques pour les différents ℓ (un motif est un morceau d'une cohomologie universelle d'une variété).

Hommage à Alexandre Grothendieck.

Comme tous les articles actuels en géométrie algébrique, celui que je viens d'exposer est entièrement fondé sur les travaux de Grothendieck : définition fonctorielle des schémas et des champs, construction Quot pour Bun_G, cohomologie étale, topos, motifs, formalisme tannakien.

Les merveilleuses découvertes de Grothendieck que sont la vision des motifs et la théorie des topos ont déjà entraîné des conséquences immenses mais d'autres au moins aussi importantes sont sans doute encore à venir.

Des travaux récents de Scholze définissent des analogues des chtoucas locaux sur $\mathbb{Q}_p$. Un analogue des champs de chtoucas pour $\mathbb{Q}$ donnerait des résultats semblables à ceux de ce travail pour les formes automorphes sur les corps de nombres. Comme on ne sait pas définir $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, un tel analogue ne peut pas être un objet géométrique au sens usuel et il est à l'heure actuelle totalement hypothétique. Mais s'il existe on peut penser qu'il fournira (voire sera lui-même) un ... topos !